Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Univérsité Ahmed Draia Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et d'Informatique

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Applications

présenté par

BARKAOUI Amal

Thème

Sur le théorème du point fixe et ses applications à l'existence et l'unicité de solution d'un probleme de cauchy dans un espace métrique .

Soutenue publiquement le 22/06/2022 , devant les jury composé de

Mr.KHALLADI Mohammed Taha	professeur	Université d'ADRAR	Président
Mr. DEBAGHE Mohammed	Maître assistant A	Université d'ADRAR	Rapportreur
Mr. DEFFA Ahmed	Maître assistant A	Université d'ADRAR	Examinateur

Année Universitaire :2021-2022.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة أحمد دراية- أدرار

المكتبة المركزية

مصلحة البحث الببليوغرافي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

University Ahmed Draia of Adrar

The central library

شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذ(ة): Debagh Mohammed

المشرف مذكرة الماستر الموسومة بـــ : Sur le théorème du point fixe et ses applications à l'existence et l'unicité de solution d'un problème de cauchy dans un espace métrique.

من إنجاز الطالب(ة): BARKAOUI Amal

و الطالب(ة): /

كلية: La Faculté de Sciences et de la technologie

القسم : Departement de Mathématique

التخصص: Mathématiques

تاريخ تقييم / مناقشة: 22/06/2022

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقييم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.

وبإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والاليكترونية (PDF).

- امضاء المشرف:

دباغ محمد

ادرار في : 22/06/22

مساعد رئيس القسم:

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي - جامعة أدرار - كلية العلوم والتكنولوجيا

كحيلي محمد

رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي

ملاحظة :لاتقبل أي شهادة بدون التوقيع والمصادقة.

Dédicace

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce travail à :

— Mes chers mère et père , qui m'ont encouragé tout le long de mes études et qui ne m'ont jamais laissé tomber dans toutes les circonstances.

— Mon frére bien-aimé A.El-azize, qui m' toujours beaucoup aidé et Tous mes chers frères et leurs femmes .

— Mes sœurs Fatima et Zohra et les jeunes enfants de ma famille que j'aime tant.

— Mes meilleurs amis.

— Mes Collègues qui étaient du soutien :Bellaoui Aicha ,Bouchbouch Fatima , Rahman fadila.

— Tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation et toute la promotion mathématiques 2022 .

Remerciements

Avant tout, je remercie le Dieu tout puissant de m'avoir donné le couroge, la force, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.
Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincére remerciement à mon encadreur Mr.DEBAGHE Mohammed pour le sujet intéressant qu'il m'a proposé et pour avoir suivi l'évolution de ce travail tout au long de l'année, pour ses conseils judicieux et ses encouragements.
J'exprime mes sincères remerciements à Mr. KHALLADI Mohammed Taha , qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. Je souhaite remercier aussi à Mr. DEFFA Ahmed d'avoir accepté d'être membres du jury et d'examiner mon travail. Mes remerciements les plus respectueux vont aussi aux professeurs de mathématiques du département mathématiques et informatique sans exception, et tous les enseignants qui ont contribué à l'enrichissement de mes connaissances du primaire jusqu 'à l'université. Enfin, je remercie tous ceux qui a contribué de près ou de loin à la rèalisation de ce mémoire.

Table des matières

INTRODUCTION

En analyse, un théorème du point fixe est un résultat qui permet d'affirmer que l'équation $f(x) = x$ admet des solutions sous certaines conditions Ces théorèmes se révèlent être des outils très importants en principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielle. De nombreuses questions, liées à l'existence et l'unicité de solutions de certains types d'équations (par exemple, les équations différentielles, les équations intégrales) peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une application définie sur un espace métrique.
Ce travaille est composé de trois chapitres :
Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions mathématiques de base nécessaires pour la suite de cette étude.
Dans le deuxième chapitre, on présente quelques théorèmes du point fixe. Comme le théorème du point fixe le plus simple et le plus utilisé dans la littérature concerne les applications contractantes, on commence par discuter le principe de contraction de Banach qui a été Énonce par Banach en 1922 , il amélioré par Picard et qu' il donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe puis Une version locale ,ainsi que plusieurs généralisations de ce théorème sont présentées dans ce chapitre. aux plus on indiqué l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour les applications contractantes, après avoir montré que la propriété d'existence du point fixe est invariante par homotopie pour cette classe d'applications.Le chapitre est termine par étudie l'existence du point fixe aux classe des applications non-expansives (1-Lipschitzienne).

- Finalement, dans le dernier chapitre on donne quelques applications de ces résultats théoriques. ont été démontrés en faisant appel aux théorèmes du point fixe concernent le théorème de Cauchy Lipschitz globale et local.

Chapitre 1

préliminaire

Dans ce chapitre nous rappellons quelques définitions et résultats préliminaires nous utiliserons dans la suite du mémoire.

1.1 Espaces métriques

Definition 1.1.1. (Distance - Espace métrique) (1) Soit X un ensemble. On appelle distance sur X toute application d : $X\times\ X \to \mathbb{R}^+$, telle que :

1. $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y. \qquad \forall x,y \in X$
2. $d(x,y) = d(y,x). \qquad \forall x,y \in X$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y). \qquad \forall x,y,z \in X$

Le couple (X,d) est appelé un espace métrique.

Example 1.1. 1. L'application

$$d : \mathbb{R}\times\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$(x,y) \to d(x,y) = |x - y|$$

définie une distance, appelée distance usuelle.

2. Soit X un ensemble et $d : \mathbb{R}\times\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une application définie par :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = y \\ 1, \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

Est appelé une distance discrète.

Definition 1.1.2. (Distance entre deux parties et diamètre)(14) Soit (X,d) un espace métrique pour toute partie non vide A de X, et tout point x $\in X$, on définit :
1. la distance de A et B, et l'on note $d(A,B)$ la quantité positive définie par

$$dist(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y)$$

2. la distance de x à l'ensemble A par

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

3.On appelle le diamètre d'une partie A de X, et l'on note par $\delta(A)$:

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

On dit qu'une partie A de X est bornée si $\delta(A) < \infty$.

Definition 1.1.3. (1)

Soit X un ensemble non vide. Deux distances d_1, d_2 sur X sont équivalentes si et seulement si :$\exists C_1$, $C_2 > 0$ telles que $C_1\ d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2\ d_1(x,y)$, $\forall x$, $y \in X$.

Topologie d'un espace métrique

Definition 1.1.4. (topologie)(1)
De manière générale, on appelle topologie sur X un ensemble τ de parties de X ;($\tau \subseteq P(X)$) qui vérifie les trois propriétés ci-dessous (qui sont appelées axiomes des ouverts) :

— $\emptyset$, $X \in \tau$.
— Si L'intersection de toute famille finie d'éléments de τ appartient à τ .
— La réunion de toute famille d'éléments de τ appartient à τ .

L'ensemble X muni de la topologie τ , est appelé espace topologique,On notera par (X,τ). Les éléments de τ sont appelés ouverts de (X,τ) ou de τ .

Definition 1.1.5. (14)

1. On appelle voisinage d'un point $x \in X$, toute partie de X qui contient un ouvert contenant x.
2. On dit que X est séparé ou de Hausdorff si, pour tout x_1, $x_2 \in X$,,il existe $V_1 \in v(x_1)$ et $V_2 \in v(x_2)$tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
3. Soit A une partie d'un espace topologique X ,A est dit partout dense sur X si $\bar{A} = X$.

Definition 1.1.6. (**boules , sphère et partie borné**)(14) Soit (X, d) un espace métrique. Pour $a \in X$ et $r \geq 0$, on définit les ensembles suivants :

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est :

$$B(a,r) := \{x \in X | d(x,a) < r\}$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon r est :

$$B_f(a,r) := \{x \in X | d(x,a) \leq r\}$$

   Aussi on le noté par $\bar{B}$

3. La sphère de centre a et de rayon r est :

$$S(a,r) = B_f(a,r) \backslash B(a,r) = \{x \in X | d(x,a) = r\}$$

4. Une partie $A \subset X$ est dite bornée s'il existe une boule $B(a,r)$ de X contenant à A .

Proposition 1.1.1. ***(1)*** *L'ensemble de parties τ_d défini par*

$$\tau_d = \{O \subset X \ | \forall x \in O, \exists r_x > 0 \, ; \, tq \ B(x,r_x) \subset O\}.$$

est une topologie sur X.

Remarque 1.1.1. (1) τ_d est une topologie associée à la métrique d. et Un espace métrique (X,d) sera toujours considéré comme un espace topologique muni de τ_d.

Definition 1.1.7. (1) Soit (X, d) un espace métrique. Pour $a \in X$ et $r \geq 0$, on définit :

1. . Une partie $U \subset X$ est dite ouverte si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0; B(a,r) \subset U$$

2. . Une partie$F \subset X$ est dite fermée si son complémentaire $F^c = X \backslash F$ est ouvert.
3. . V_x est un voisinage de x s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq V_x$.
4. Les ensembles $v_1(x)$ et $v_2(x)$ tq :

$$v_1(x) = \{B(x,\frac{1}{n})|n > 0\}$$

et

$$v_2(x) = \{B_f(x,\frac{1}{n})|n > 0\}$$

sont des bases de voisinage de x.

Definition 1.1.8. (1) Soit A une partie quelconque de l'espace métrique (X, d), alors on définie l'ensemble d'adhérence (ou la ferméteur) de A par :

$$\bar{A} = \cap\{F : F \text{ est fermé et } A \subseteq F\}$$

Remarque 1.1.2. Pour tout sous-ensemble B de E et pour tout $a \in E$ on note :

$$a + B := \{a + x|x \in B\}$$

Alors on a $B(a,r) = a + B(0,r)$ et $B_f(a,r) = a + B_f(0,r)$. De plus on a toujours $B(a,r) \subset B_f(a,r)$

Proposition 1.1.2. ***(1)***

Soit (X,d)un espace métrique $A \subset X$. Alors pour tout $x \in X$ $d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bar{A}$

Preuve voire (1) □

Remarque 1.1.3. Si $d(x,A) = 0$, n'est pas nécessairement $x \in A$ avec A n'est pas fermé .

Contre-exemple : $(R,|.|)$ espace métrique. Soit $A = \{\frac{1}{n},n \in N^*\}$, $x = 0$, on a :

$$\begin{aligned} d(x,A) &= \inf_{n\in N^*} d(x,\frac{1}{n}) \\ &= \inf_{n\in N^*} d(0,\frac{1}{n}) \\ &= \inf_{n\in N^*} \frac{1}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $d(x,A) = 0$ mais $0 \notin A$.

Definition 1.1.9. (14) (2) Soient (X,d_X),(Y,d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ est une fonction. On dit que f est :

1. continue en un point a $\in X$, si et seulement si :

$$\forall\varepsilon > 0,\exists\eta > 0,\forall x \in X,d_X(x,a) < \eta, \Longrightarrow d_Y(f(x),f(a)) < \varepsilon 0$$

2. uniformément continue sur X, si et seulement si :

$$\forall\varepsilon > 0,\exists\eta > 0(\eta \text{ ne dépend que de } \varepsilon),\forall x_1,x_2 \in X,d_X(x,a) < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x_1),f(x_2)) < \varepsilon$$

3. un homéomorphisme si f est une bijection bicontinue (f et f^{-1} continues) :
4. lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que $\forall x,y \in X$, on a

$$d_Y(f(x),f(y)) \leq k\ d_X(x,y)$$

5. une contraction si f est lipschitzienne et de rapport $k < 1$ (on dit aussi que f est contractante).
6. non-expansive Si f est lipschitzienne et $k = 1$.

— Soit (X, d) un espace métrique ,l'application $f : X \to X$ est dite contractive si

$$d(f(x),f(y)) < d(x,y)\ ,\forall x,y \in X \text{avec } x \neq y.$$

Proposition 1.1.3. *(1) Si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue sur X.*

Definition 1.1.10. (14) On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in N}$converge vers une limite x dans l'espace métrique (X,d) si et seulement si on a :

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$$

Proposition 1.1.4. ***(1)***

1. *$f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ est continue en $x = a$ si et seulement si lorsque $x_n \to a$ dans X,alors $f(x_n) \to f(a)$ dans Y .*
2. *a est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement s'il existe une sous-suite (x_{n_i}) de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,telle que*

$$\lim_{n_i\to\infty} d(x_{n_i},a) = 0$$

3. *Soit $A \subset X$. Alors $a \in \bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.*
4. *Soit $A \subset X$. Alors A est fermé dans X si et seulement si la limite de toute suite convergent d'éléments de A appartient à A.*

Théoreme 1.1.1. ***(Intersection de Cantor,(5))*** *Soit (X,d) un espace métrique, soit $\{A_n\}_{n\in N}$une suite de sous ensembles non-vides fermés de X tels que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset$.. et tels que $\lim_{n\to+\infty} diam(A_n) = 0$, Alors l'ensemble $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est constitué d'un unique point.*

1.1.1 Espaces métriques compacts

Definition 1.1.11. (14) Soit X un espace topologique.

1. Un recouvrement de X est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \cup_{i\in I} A_i$. Si de plus I est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de X.
2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Si $J \subset I$ tel que $X = \cup_{j\in J} A_j$, on dit que$(A_j)_{j\in J}$ est un sous-recouvrement de $(A_i)_{i\in I}$.

Definition 1.1.12. (Espace compacte)(14)
Soit X un espace topologique séparé. On dit que X est compact si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$de X telle que $X = \cup_{i\in I} U_i$, il existe un sous ensemble fini J de I tel que $X = \cup_{i\in J} A_i$.

Proposition 1.1.5. *(1)*

1. *A est compacte dans $\mathbb{R}$ si et seulement si A est fermée bornée.*
2. *Dans X séparé, la réunion d'une famille finie de compacts est compacte.*

Théoreme 1.1.2. *(1) Soit f une application continue de X compact dans Y séparé, alors $f(X)$ est compact.*

Preuve voir (1) □

Corollaire 1.1.1. *(1)*

1. *si X est homéomorphe à Y et si X est compact, alors Y est compact.*
2. *Si f est continue de X compact dans $\mathbb{R}$,alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Lemme 1.1.1. *(1) Soit X un espace métrique tel que toute suite de points de X admet au moins une valeur d'adhérence, alors pour tout recouvrement $(\theta_i)_{i\in I}$ de X, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $B(x,r) \subset \theta_i$.*

Preuve voir (1)

Théoreme 1.1.3. ***(Bolzano-Weierstrass,(1))*** *Soit X un espace métrique. Alors X est compact si et seulement si toute suite infinie admet au moins une valeur d'adhérence.*

Definition 1.1.13. (Pré-compacité)(1)

Un espace métrique X est dit pré-compact si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ fini par des ensembles de diamètre $< \varepsilon$.

Le diamètre noté $\delta(A_i)$ satisfait donc $\delta(A_i) < \varepsilon$, pour tout $i \in I$.
(c-à-d pour tout $\varepsilon > 0$,il existe A_ε fini tel que pour tout $x \in X$, alors $d(x,A_\varepsilon) < \varepsilon$).

Example 1.2. $X = [a, b]$ est pré-compact.

Definition 1.1.14. (Séparabilité) (1)

Un espace topologique X est dit séparable s'il existe une partie A au plus dénombrable partout dense sur X.

Proposition 1.1.6. *(1)*

1. *Si X est un espace métrique compact, alors X est pré-compact,mais La réciproque est fausse.*
2. *Si un espace métrique X est pré-compact, alors X est séparable.*
3. *Si un espace métrique X est compact, alors X est séparable.*

Preuve voir (1)

Proposition 1.1.7. *(1)*

— *Toute application continue f d'un espace métrique compact (X,d_X) dans un espace métrique (Y,d_Y) est uniformément continue sur (X,d_X).*

1.1.2 Espaces métriques complets

Definition 1.1.15. (1) Une suite (x_n) d'un espace métrique (X,d) est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $\forall m,\ n > N$ alors $d(x_n,\ \mathrm{x}_m) < \varepsilon$.

Definition 1.1.16. (1) un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans (X,d) est convergente.

Proposition 1.1.8. *(1)*

1. *Tout espace métrique compact X est complet.*
2. *Pour qu'un espace métrique X soit complet, il suffit qu'il existe $r > 0$ tel que toutes les boules fermées de rayon r soient compactes.*
3. *Si (X,d_X) est un espace métrique complet et si f est une bijection bi-uniformément continue de (X,d_X) sur (Y,d_Y), alors(Y,d_Y) est complet.*
4. *Tout produit fini d'espace métriques complets est complet.*

5. *Si un produit d'espaces métriques est complet alors chaque facteur est complet.*
6. *Si A est un sous-espace complet dans X métrique,alors A est fermé .*
7. *Si A est un sous-espace fermé de X métrique complet alors A est complet.*

Corollaire 1.1.2. *(1) Soit X un espace métrique complet. Alors A est un sous-espace complet si et seulement si A est un sous-espace fermé .*

Théoreme 1.1.4. ***(12)*** *Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques avec Y complet. Alors l'ensemble $C_b(X,Y)$ est complet pour la distance uniforme*

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X}\{d_Y(f(x),g(x))\}$$

$C_b(X,Y)$ est l'ensemble des fonctions continues et bornées de X dans Y .

1.2 Espace vectoriel normé

Definition 1.2.1. Soit E un espace vectoriel, on dit qu'une famille F de E est génératrice de E si $E = vect(F)$ i. e :tout vecteur $\vec{u}$ de E est un combinaison linéaire d'élément de F.

On dit que E est de dimension finie si E admet une famille génératrice finie.

Definition 1.2.2. (1) On appelle norme sur E, toute application N de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout x, $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) , on ait :

1. $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (condition de séparation).
2. $N(\lambda\ x) = |\lambda|\ N(x)$ (condition d'homogénéité) .
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$(inégalité du triangulaire) .

Si les propriétés (2), (3) sont vérifiées et ($N(x) = 0 \Leftarrow x = 0$), on dira qu'on a affaire à une semi-norme.

Definition 1.2.3. (1) On appelle espace vectoriel normé ,en abrégé (EVN) (resp. semi-normé) le couple (E,N) formé par un espace vectoriel et une norme (resp.semi-norme) N définie sur E.

- On utilise bien souvent la notation $\|.\|$ pour une norme.

Exemple

1. $E = \mathbb{R}$ et $N(x) = |x|$ est une norme.
2. tout espace vectoriel euclidien E muni de la norme

$$\| x \| := \sqrt{< x,x >} \text{ est un EVN.}$$

3. pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'espace vectoriel $E = C([a, b])$ muni de la norme :

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in [a;b]} |f(x)|$$

   est une espace vectoriel normé.

4. Il en est de même, pour $1 \leq \alpha < \infty$, avec

$$\| f \|_\alpha = \left(\int_a^b | f(x) |^\alpha \, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

   est un espace vectoriel normé .

Proposition 1.2.1. *(1) tout norme N sur un espace vectoriel E est vérifies :*

$$| N(x) - N(y) | \leq N(x - y) \, ; \forall x,y \in E.$$

Proposition 1.2.2. ***métrique associée à une norme**,(1)*
L'application $d : (x,y) \to \| x - y \|$ est une métrique sur E invariante par translation (c'est-à-dire $d(x + a, y + a) = d(x,y)$ $\forall x,y \in E$ $\forall a \in \mathbb{R}$). On dit que d est la métrique associée à la norme.

Definition 1.2.4. (14) Soit E un espace vectoriel réel. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dite équivalentes ssi $\exists$ c_1, $c_2 > 0$ telle que :

$$\forall x \in E, c_1 N_1(x) \leq N_2 \leq c_2 N_1(x)$$

Remarque 1.2.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$\| x \|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$$
$$\| x \|_2 := \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$$
$$\| x \|_\infty := \max(|x_1|, ..., |x_n|)$$

Sur $\mathbb{R}$ les trois normes $\| x \|_1$, $\| x \|_2$ et $\| x \|_\infty$ sont équivalentes.

Definition 1.2.5. soit $(E, \| . \|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_k)_{k\in N}$ une suite dans E et $\ell \in E$.
On dit que la suite $(u_k)_{k\in N}$ converge vers ℓ pour la norme $\| . \|_E$ si et seulement si

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - \ell \|_E = 0$$

Definition 1.2.6. Soit $(E, \| . \|_E)$ et $(E', \| . \|_{E'})$ deux EVN. Soit A un sous-ensemble de E et $f : A \to E'$ une application. Soit $x_0 \in A$, on dit que f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in A, \| x - x_0 \|_{E'} < \eta \Rightarrow \| f(x) - f(x_0) \|_{E'} < \varepsilon.$$

Definition 1.2.7. Soit $(E, \| . \|_E)$ et $(F, \| . \|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}^n$, f une application de E dans F. On dit que l'application f est Lipschitzienne de rapport $k > 0$ si et seulement si :

$$\forall(x,y) \in E^2 : \| f(x) - f(y) \|_F \leq k \| x - y \|_E$$

Théoreme 1.2.1. ***(14)*** *Soit $(E, \| . \|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
— *(i) E est de dimension finie.*
— *(ii) Toutes les normes sur E sont équivalentes.*
— *(iii) Toutes les formes linéaires sur E sont continues.*

Preuve voir (14) □

Théoreme 1.2.2. *(14) Soient$(E_1, \| . \|_{E_1})$, $(E_2, \| . \|_{E_2})$ deux espaces vectoriels normés et $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire. On a l'équivalence entre*

1. *f est continue sur E_1 .*
2. *f est lipschitzienne.*
3. *f est continue en 0.*
4. *f est uniformément continue .*

5. *f est bornée sur la sphère $S = \{x \in E_1 \,;\, \| x \|_{E_1} = 1\}$.*
6. *Il existe $M > 0$ tel que :*

$$\| f(x) \|_{E_2} \leq M \| x \|_{E_1} \,, \forall x \in E_1.$$

Preuve voire (14) □

Definition 1.2.8. (1) On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.

Exemple

1. $E = \mathbb{R}$ est un espace de Banach.
2. $C([a,b],\mathbb{R})$ pour $\| f \|_\infty = sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ est un espace de Banach.
3. $C([a,b],\mathbb{R})$ pour $\| f \|_\alpha$ définie précédemment est non complet, donc ce n'est pas un espace de Banach (vérifier pour $\alpha = 1$).

Definition 1.2.9. (Contraction non linéaire)(3) Soit E un espace de Banach, $f : E \to E$ une application. l'application f est dite contraction non linéaire s'il existe une fonction continue croissante $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tels que $\Phi(r) < r \,;\, \forall r > 0$ et

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \Phi(\| x - y \|), \forall x,y \in E$$

— Si $\Phi(r) = k\, r \,;\, 0 < k < 1 \,;\, f$ est une contraction.
— Si $\Phi(r) = r \,;\, f$ est une application non-expansive.
— Si $\Phi(r) = r$ et l'inégalité précédente est stricte, f est contractive.

Exemple (Application contractante)

On considère l'espace de Banach $E = \{x : [0; +\infty[\to \mathbb{R}^n \,; x \text{ borné}\}$ muni de la norme

$$\| x \|_E = \sup_{t\geq 0} e^{-\alpha t} \| x(t) \|_{\mathbb{R}^n} \quad \text{ou } \alpha > 0 \text{ est à choisir.}$$

soit $f : [0; +\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue et k-lipschitzienne . Soit A l'application définie par :

$$Ax(t) = \int_0^t f(s,x(s))ds.$$

On voit que $\forall x \in E$; $A(x) \in E$ et donc $A : E \to E$.
L'application A est une contraction si $0 < k < \alpha$ En effet, pour x_1,$x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$ .On a

$$\begin{aligned}
\| Ax_1 - Ax_2 \|_E &= \sup_{t\geq 0} e^{-\alpha t} \| (Ax_1 - Ax_2)(t) \|_{\mathbb{R}^n} \\
&= \sup_{t\geq 0} e^{-\alpha t} \| \int_0^t (f(s,x_1(s)) - f(s,x_2(s)))ds \|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \sup_{t\geq 0} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} e^{-\alpha s} k \| x_1 - x_2 \|_{\mathbb{R}^n} \ ds \\
&\leq \frac{k}{\alpha} e^{-\alpha t}(e^{\alpha t} - 1) \| x_1 - x_2 \|_E \\
&\leq \frac{k}{\alpha} \| x_1 - x_2 \|_E .
\end{aligned}$$

1.2.1 La Compacité dans un EVN

Definition 1.2.10. (14) Soit $(E, \| \ . \ \|)$un espace normé.On dit que E est relativement compact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties de E dans le diamètre est inférieure à ε .

Definition 1.2.11. (14)

1. Un espace normé $(E, \| \ . \ \|)$ est dit compact s'il est relativement compact et complet.
2. Une partie A d'un espace normé $(E, \| \ . \ \|)$ est dite compacte si le sous-espace normé $(A, \| \ . \ \|_A)$ est compact.

Théoreme 1.2.3. *(14) Soit $(E, \| \ . \ \|)$ un e.v.n sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ de dimension fini. Alors les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées de E.*

Proposition 1.2.3. *(14) L'image réciproque d'un ensemble compact par une application continue n'est pas nécessairement compact.*

Definition 1.2.12. (14) Une famille des fonctions ϕ définies sur un intervalle $[a,b]$, est dite uniformément bornée s'il existe une constante k telle que :

$$\| \phi(x) \| < k, \forall x \in [a,b].$$

Théoreme 1.2.4. ***(théorème de Riesz,1918)***,*(14)*
Si un espace normé E possède une boule compacte $B(x_0,r)$ de rayon $r > 0$ alors il est de dimension finie.

Preuve voire (14) □

1.3 la Convexité :

Definition 1.3.1. (14) On dit que $C \subset E$ est un ensemble convexe si :

$$\forall t \in [0,1], \forall (x,y) \in C^2, t\ x + (1-t)y \in C$$

Example 1.3. soit $(E, \| \ . \ \|)$ un espace normé.Alors toutes les boules (fermés, ouverts) sont des ensembles convexes.

Definition 1.3.2. (14) Soit A une partie de E. On appelle enveloppe convexe de A noté $conv(A)$ l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A ; i.e

$$conv(A) = \{\cap_{A \in C} C\ ;\ C \text{ est convexe}\}$$

Definition 1.3.3. (14) Un ensembles convexe C de E est stable par combinaison convexe si $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in C$, $\forall t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}$,tell que $\sum_{i=1}^{n} \mid t_i \mid = 1$, Alors $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in C$

Corollaire 1.3.1. *(14)*

- *Soit A une partie dans un espace vectoriel réel E. Alors A est un ensemble convexe ssi il contient toutes les combinaison convexe de ses éléments.*
- *Soit A une partie de E. Alors $conv(A)$ est égale à l'ensemble de tout les combinaisons convexes des éléments de A.*

Preuve voire (14) □

1.4 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

la notion de la mesure

Definition 1.4.1. (tribu) (13)
Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une famille de parties de Ω . La famille $\mathcal{T}$ est une tribu (on dit aussi une σ-algèbre) sur Ω si $\mathcal{T}$ vérifie :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}, \Omega \in \mathcal{T}$.
2. $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable.
3. $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire.

Definition 1.4.2. (Tribu engendrée)(13)
Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C} \subset P(\Omega)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$

Definition 1.4.3. (tribu borélienne) (13) Soit Ω un ensemble muni d'une topologie. On appelle tribu borélienne la tribu engendrée par les ouverts de Ω,sera notée B_Ω.

Definition 1.4.4. (Mesure)(13) Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ une tribu. On appelle mesure une application $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$ vérifiant :

— $\mu(\emptyset) = 0$.

— μ est σ-additive, c'est-'a-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$de parties disjointes deux à deux, (i.e.$\forall\ n \neq m\,;\ A_n \cap A_m \neq \emptyset$), et on a :

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Definition 1.4.5. (13)

— Un espace mesurable est un couple $(\Omega, \mathcal{T})$, avec $\mathcal{T}$ est une tribu dans Ω.

— On appelle espace mesuré un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ avec $\mathcal{T}$ est une tribu dans Ω et μ une mesure.

Definition 1.4.6. (13) On dit qu'une fonctions mesurables $f : (\Omega, \mathcal{T}, \mu) \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si :

$$F^{-1}(B) \in \mathcal{T} \text{pour tout } B \in B_{\mathbb{R}}.$$

Definition 1.4.7. (L'espace L^1)(9)
On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctios integrable sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$,et on pose

$$\| f \|_{L^1} = \int_\Omega | f(x) | \, dx.$$

Definition 1.4.8. (Espace de lebesegue)(9)
Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Si $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ est mesurable et } \exists C \geq 0 \text{ tq } |f(x)| \leq C \text{ p.p } \}.$$

Notation : p.p=presque partout =sauf sur un ensemble négligable (c-à-d du mesure nulle).

Proposition 1.4.1. *(12) Soit la fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose*

$$\| f \|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\| f \|_{L^\infty} = \inf\{C \geq 0 \, ; \, |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Pour $1 \leq p \leq +\infty$:
-l'application $\| \, . \, \|_{L^p}$ définie une norme sur $L^p(\Omega)$.
-Les espaces L^p muni de la norme $\| \, . \, \|_{L^p}$ sont complet.

Preuve voir (9) □

1.5 Espace de Hilbert

Definition 1.5.1. (9) Soit E un espace vectoiel .Un produit scalaire $\langle u,v \rangle$ est une forme bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, symétrique et définie positive (i.e : $\langle u,v \rangle \geq 0 \; \forall u \in E$ et , $\langle u,u \rangle > 0$ si $u \neq 0$) .

Le couple constitué d'un espace vectoriel E et d'un produit scalaire sur E est appelé un espace pré-hilbertien .

Definition 1.5.2. (9) Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel préhilbertien et complet pour la norme $\| u \| = \langle u,u \rangle^{\frac{1}{2}}$; $u \in H$.

Proposition 1.5.1. ***(Inégalité de Schwarz,(9))*** *Soit H un espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire $< . >$. Pour tous u, $v \in H$ on a*

$$|< u.v >|^2 \leq \ |< u.u >| \, . \, |< v.v >| \, .$$

Proposition 1.5.2. ***(l'identité du parallélogramme,(12))*** *Si u et v sont deux éléments d'un espace pré-hilbertien, alors :*

$$\| \frac{u+v}{2} \|^2 + \| \frac{u-v}{2} \|^2 = \frac{1}{2}(\| u \|^2 + \| v \|^2)$$

1.6 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Soit I=]a,b[un inervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$,avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Definition 1.6.1. (9) L'espace de Sobolev noté $W^{1,p}(I)$est définie par :

$$W^{1,p}(I) = \{f \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{tel que} \int_I f\phi' = -\int_I g\phi \ \} \, ; \forall \phi \in C_c^1(I)$$

Notation : $C_c^1(I) =$: l'espace des fonctions de C^1 à support compact,avec

$$supp(\phi) = \overline{\{x \in I \, ; \, \phi(x) \neq 0\}}.$$

Proposition 1.6.1. *(9) On munit les espaces de Sobolev par une structure d'espaces normés dont les normes sont définit par :*

$$\| f \|_{W^{1,p}(I)} = \| f \|_{L^p} + \| f' \|_{L^p} \ ,1 \leq p < +\infty$$

Chapitre 2

quelques types des Théorèmes du point fixe

Un point fixe de $N : X \to X$ est un point $x \in X$ qui est appliqué sur lui même, i.e. $N\ x = x$.

Le théorème du point fixe de Banach, connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou encore théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922, dans le cadre de la résolution d'une Équation intégrale. Notons que ce théorème est une abstraction de la méthode classique des approximations successives introduites par Liouville en 1837 et développée par la suite, par Picard en 1890. A cause de sa simplicité et de son utilité, ce théorème est largement utilise dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier dans la branche des équations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach a connu différentes généralisations dans les espaces métriques et les espaces topologiques localement convexe.

2.1 Théorèmes du point fixe de contraction

2.1.1 Principe de contraction de Banach

Théoreme 2.1.1. ***(Principe de contraction de Banach,1922)***,*(7) Soient* (X,d) *un espace métrique complet et* $f : X \to X$ *une application contractante sur* X *de constante de contraction* k*, Alors :*

— f *admet un unique point fixe .*

Preuve

i) Existence : Soit $(x_n)_{n\in N}$ la suite dèfinie par :

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), n\in N. \end{cases}$$

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n,x_{n+1}) \leq k^n d(x_0,x_1)$$

On raisonne par récurrence

— Pour $n = 0$, on a :

$$d(x_0,x_1) \leq k^0 d(x_0,x_1) \text{ c'est vérifie}$$

— Supposons que la condition est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour$(n+1)$, c'est-à-dire on montre :

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq k^{n+1} d(x0,x1)$$

On a :

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq k[k^n d(x_0,x_1)] \leq k^{n+1} d(x_0,x_1).$$

D'ou :

$$\forall n \in N; d(x_n,x_{n+1}) \leq k^n d(x0,x1).$$

Montrons que $(x_n)_{n\in N}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$; on cherche $n_0 \in N$; $\forall p,\ q \in N$

$$(p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0\ ) \Longrightarrow d(x_p,x_q) < \varepsilon$$

Soient $p,\ q \in N$;($p \leq q$ par exemple). On a :

$$\begin{aligned} d(x_p,x_q) &\leq d(x_p,x_{p+1}) + d(x_{p+1},x_q) \\ &\leq d(x_p,x_{p+1}) + d(x_{p+1},x_{p+2}) + d(x_{p+2},x_q) \\ &\leq d(x_p,x_{p+1}) + d(x_{p+1},x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1},x_q) \\ &\leq k^p d(x_0,x_1) + k^{p+1} d(x_0,x_1) + ... + k^{q-1} d(x_0,x_1). \end{aligned}$$

donc $d(x_p,x_q) \leq (k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}) d(x_0,x_1)$. Mais $k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1} = k^p \frac{1-k^{q-p}}{1-k} = \frac{k^p}{1-k}(1 - k^{q-p})$. D'ou $d(x_p,x_q) \leq \frac{k^p}{1-k}(1 - k^{q-p}) d(x_0,x_1)$. On a $1 - k^{q-p} < 1$ Donc : $d(x_p,x_q) \leq \frac{k^p}{1-k} d(x_0,x_1)$. Supposons que $d(x_0,x_1) \neq 0$, pour que $d(x_p,x_q) < \varepsilon$; il suffit que :

$$\frac{k^p}{1-k}d(x_0,x_1) < \varepsilon$$

Ce qui donne

$$p > \ln(\frac{\varepsilon(1-k)}{d(x_0,x_1)})\frac{1}{\ln k}$$

Il suffit de prendre :

$$n_0 = \max(0,E(\ln(\frac{\varepsilon(1-k)}{d(x_0,x_1)})\frac{1}{\ln k}) + 1)$$

Alors $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X comme (X,d) est complet, donc la suite $(x_n)_{n\in N}$ est convergente dans X :i.e : $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ Soit $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $x \in X$. Montrons que x est une point fixe de f on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in N, x_{n+1} &= f(x_n) \\
&\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \\
&\Rightarrow x = f(\lim_{n\to+\infty} x_{n+1})(\text{d'après la continuité de} f) \\
&\Rightarrow x = f(x)
\end{aligned}$$

D'ou est un point fixe de f.

ii) Unicité : On suppose $\exists\ x_1,\ x_2 \in X$; $x_1 \neq x_2$; avec $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$:On a

$$\begin{aligned}
d(f(x_1),f(x_2)) &\leq kd(x_1,x_2) \\
&\Rightarrow d(x_1,x_2) \leq kd(x_1,x_2) \\
&\Rightarrow 1 \leq k
\end{aligned}$$

contradiction car $k \in]0,1[$. D'ou l'unicité. Si $d(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = x_1$ $\Longrightarrow x_1$ est le point fixe cherché.

Théoreme 2.1.2. ***(point fixe de Banach- Picard)***,(2) *Soient (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante de constante de contraction k, Alors :*

— *f admet un unique point fixe $\alpha \in X$.*

— *Pour tout* $x \in X$ *;* $\alpha = \lim_{n\to+\infty} f^n(x)$ *ou* $f^0(x) = x$ *et* $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$.

— *La vitesse de convergence peut être estimée par :*

$$d(f^n(x),\alpha) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x,f(x)).$$

Preuve — **Unicité** : Supposons qu'il existe x, $y \in X$ tel que$x = f(x)$ et $y = f(y)$. Alors

$$d(x,y) = d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$$

Par conséquent, $d(x,y) = 0$ ce qui entraine $x = y$.

— **Existence** : Soit $x \in X$. Nous allons établir que $\{f^n(x)\}$ est une suite de Cauchy.Pour tout $n \in N$, on a

$$d(f^n(x),f^{n+1}(x)) \leq kd(f^{n-1}(x),f^n(x)) \leq \cdots \leq k^n d(x,f(x))$$

Ainsi, pour $m > n$, où $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} d(f^n(x),f^m(x)) &\leq d(f^n(x),f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x),f^{n+2}(x)) + \cdots \\ &+ d(f^{m-1}(x),f^m(x)) \\ &\leq k^n d(x,f(x)) + \cdots + k^{m-1} d(x,f(x)) \\ &\leq k^n d(x,f(x))[1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}] \\ &= \frac{k^n - k^m}{1-k} d(x,f(x)). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $m > n$,$n \in \mathbb{N}$

$$d(f^n(x),f^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x,f(x)) \ldots.(")$$

Ceci montre que $\{f^n(x)\}$ est une suite de Cauchy et comme X est espace complet, alors il existe $u \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \alpha$. De plus, la continuité de$f$ entraine que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x)) = f(\alpha).$$

par conséquent, u est un point fixe de f. Ainsi si $m \to \infty$ dans (") alors

$$d(f^n(x),\alpha) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x,f(x)).$$ □

Example 2.1. Soient $X = [a,b]$ et l'application $f : X \to X$ telle que f est dérivable en chaque $x \in]a,b[$ et $\mid f'(x) \mid \leq k < 1$:Alors, on déduit du théorème des accroissements finis que : $\forall x,\ y \in X$, il existe un point entre x et y tel que,

$$f(x) - f(y) \leq \mid f'(x) \mid (x - y).$$

Donc

$$\mid f(x) - f(y) \mid \leq \mid f'(x) \mid\mid (x - y) \mid \leq k \mid x - y \mid .$$

Par conséquent, f est contractante et donc elle admet un unique point fixe.

Remarque 2.1.1. (2) Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème précédent est réellement nécessaire si nous en négligeons seulement une, alors il se peut que le point fixe n'existe pas :

1. . Si X n'est pas stable par f : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0,1]$: On a X est fermé dans $\mathbb{R}$ donc il est complet (car R est complet). De plus $f\prime(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, ce qui implique que max $_{x\in[0,1]} \mid f\prime(x) \mid < 1$, donc f est contractante sur $[0,1]$. Mais X n'est pas stable par f car $f([0,1]) = [1,\sqrt{2}] \notin [0,1]$. Les conditions suffisantes du théorème de Banach ne sont pas toutes remplies. On vérifie, par l'absurde, que f n'admet pas un point fixe.
2. Si f n'est pas contractante : $f : f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur $X = [0, +\infty[$. On a $f([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$ et X est un fermé dans $\mathbb{R}$. Alors X est complet (fermé dans un complet est complet). Mais f n'est pas contractante, car $\sup_{x\in[0;+\infty[} \mid f'(x) \mid = 1$.
3. Si X n'est pas complet : $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ sur $x =]0,\frac{\Pi}{4}]$. On a $f(]0,\frac{\Pi}{4}]) =]0,\frac{\sqrt{2}}{4}]$ et max $_{x\in]0,\frac{\Pi}{4}]} \mid f\prime(x) \mid = \frac{1}{2} < 1$, alors f est contractante. Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc X n'est pas complet. Les conditions suffisantes du théorème de Banach ne sont pas toutes satisfaites. Par l'absurde, on vérifie facilement que f n'admet pas de point fixe. Il existe diverses versions modifiées (extensions) du théorème de contraction de Banach dans la littérature. Généralement, si l'une des hypothèses est affaiblie les autres doivent être renforcées. La complétude de l'espace est généralement indispensable. Dans ce qui suit, on présente quelques variantes du principe de contraction de Banach.

2.1.2 La version locale du théorème de Banach

Il se peut que f ne soit pas une contraction sur tout l'espace X mais juste dans le voisinage d'un point donne. Dans ce cas on a le résultat suivant

Théoreme 2.1.3. *(2)*

$$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\} \text{ ou } x_0 \in X \text{ et } r > 0.$$

Supposons que $f : B(x_0,r) \to X$ est contractante de constante de contraction k, avec

$$d(f(x_0),x_0) < (1-k)r.$$

Alors f admet un unique point fixe dans $B(x_0,r)$.

Preuve Il existe r_0 avec $0 \leq r_0 \leq r$, tel que $d(f(x_0),x_0) < (1-k)r_0$, On montre que $f : \overline{B(x_0,r)} \to \overline{B(x_0,r)}$. Soit $x \in \overline{B(x_0,r)}$,alors

$$\begin{aligned} d(f(x),x_0) &\leq d(f(x),f(x_0)) + d(f(x_0),x_0) \\ &\leq kd(x,x_0) + (1-k)r_0 \\ &\leq kr_0 + (1-k)r_0 \\ &\leq r_0 \end{aligned}$$

Donc l'application $f : \overline{B(x_0,r)} \to \overline{B(x_0,r)}$ est contractante avec $\overline{B(x_0,r)}$ est un espace complet. Par suite, l'application du théorème de contraction de Banach à f assure qu'elle admet un unique point fixe dans $B(x_0,r)$. □

Nous allons examiner brièvement le comportement d'une application de contraction définie de $\bar{B}_r = B(0,r)$ (la boule fermée de rayon r et de centre 0) à valeurs dans un espace de Banach E.

Théoreme 2.1.4. *(2) Soient $\bar{B}_r$ la boule fermé de rayon $r > 0$, centrée en zéro, d'un espace de Banach X et $f : \bar{B}_r \to X$ une application contractante, de constante k, vérifiant $f(\partial\bar{B}_r) \subseteq \bar{B}_r$, (avec $\delta\bar{B}_r$ désigne la frontière de $\bar{B}_r$ dans X) . Alors f a un unique point fixe dans $\bar{B}_r$.*

Preuve On Considérons l'application

$$g(x) = \frac{x + f(x)}{2}$$

Nous montrons d'abord que $g : \bar{B}_r \to \bar{B}_r$. Soit

$$x^* = r \frac{x}{\| x \|} \text{ où } x \in \bar{B}_r \text{ et } x \neq 0.$$

Notons que $x^* \in \partial\bar{B}_r$(car, $\| x^* \| =$ r). si $x \in \bar{B}_r$ et $x \neq 0$ alors

$$\| f(x) - f(x^*) \| \leq k \| x - x^* \| = k(r - \| x \|),$$

car $x - x^* = \frac{x}{\|x\|}(\| x \| - r)$,alors

$$\begin{aligned} \| f(x) \| &\leq \| f(x^*) \| + \| f(x) - f(x^*) \| \\ &\leq r + k(r - \| x \|) \\ &\leq 2r - \| x \| . \end{aligned}$$

Par suite, pour $x \in \bar{B}_r$ et $x \neq 0$ on a

$$\| g(x) \| = \| \frac{x + f(x)}{2} \| \leq \frac{\| x \| + \| f(x) \|}{2} \leq r.$$

De plus, par continuité on aura aussi

$$\| g(0) \| \leq r$$

et par conséquent $g : \bar{B}_r \to \bar{B}_r$.de plus elle est contractante. En effet,Le théorème 2.1.1 implique que g admet un unique point fixe $u \in \bar{B}_r$. i.e $u = g(u)$ par suite $u = f(u)$. □

Plusieurs auteurs ont donné des généralisations du principe de contraction de Banach où le caractère contractive de l'application est affaibli. Dans ce paragraphe nous allons citer quelques versions dans ce sens dont la démonstration repose sur le résultat technique suivant.

Théoreme 2.1.5. ***(Théorème de Banach généralisé,(7))*** *Soit* (X,d) *un espace métrique complet et* $f : X \to X$ *une application vérifiant la condition suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (d(x,f(x)) < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow (f(B(x,\varepsilon)) \subset B(x,\varepsilon)).$$

Si $\lim_{n\to+\infty} d(f^n(u),f^{n+1}(u)) = 0$ *pour certain* $u \in X$, *alors la suite* $\{f^n(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un point fixe de* f.

Preuve Considérons la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\{u_n = f^n(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$.Montrons que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Puisque la

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_n,u_{n+1}) = 0.$$

Alors $\forall\varepsilon > 0,\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_n,u_{n+1}) < \varepsilon$,$\forall n \geq m$

$$d(u_n,f(u_n)) = d(u_n,u_{n+1}) < \varepsilon \ ,\forall n \geq m \Rightarrow f(B(u_n,\varepsilon)) \subset B(u_n,\varepsilon) \ ,\forall n \geq m.$$

par suite

$$u_{n+1} = f(u_n) \in B(u_n,\varepsilon),\forall n \geq m \Rightarrow u_{m+1} \in B(u_m,\varepsilon).$$

Alors

$$u_{m+2} = f(u_{m+1}) \in f(B(u_m,\varepsilon)) \subset B(u_m,\varepsilon) \Rightarrow d(u_{m+2},u_m) < \varepsilon.$$

On peut montrer par récurrence que

$$u_{m+k} = f^k(u_m) \in B(u_m,\varepsilon),\forall k \geq 0.$$

Soit $n,p \geq m$. Alors

$$d(u_n,u_p) \leq d(u_n,u_m) + d(u_m,u_p) < 2\varepsilon.$$

Autrement dit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Alors il existe $z \in X$ tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = z$.

Nous montrons maintenant que y est un point fixe de f

$$f(z) = z \Leftrightarrow d(z,f(z)) = 0.$$

Supposons qu'il ne l'est pas ,Alors

$$d(z,f(z)) = a > 0$$

Nous pouvons choisir $u_n \in B(z,\frac{a}{3})$fixe tel que $d(u_n,u_{n+1}) < \frac{a}{3}$. D'après l'hypothèse du théorème, il vient

$$f(B(u_n,\frac{a}{3})) \subset B(u_n,\frac{a}{3}) \Rightarrow f(z) \in B(u_n,\frac{a}{3}).$$

et Donc

$$\begin{aligned} d(f(z),z) &\leq d(f(z),u_n) + d(u_n,z) \\ &\Rightarrow d(f(z),z) - d(u_n,z) \leq d(f(z),u_n) \\ &\Rightarrow a - \frac{a}{3} < d(f(z),u_n) \\ &\Rightarrow \frac{2a}{3} < d(f(z),u_n). \end{aligned}$$

Mais c'est une contradiction avec $f(z) \in B(u_n,\frac{a}{3})$. □

La proposition suivante, qui généralise le théorème 2.1.1, sera utile pour la suite.

2.1.3 théorème du point fixe pour une application dont une itérée est contractante

Si f est une application continue (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ses itérées $f^{\,p}$ est une contraction, alors f admet encore un point fixe et un seul.

Exemple de motivation

Soit $X = C([0,b],\mathbb{R})$. L'application $f : X \to X$ définie par

$$f(x)(t) = \int_0^t x(s)ds$$

n'est pas contractante si $b > 1$ mais l'application

$$x \to f^n(x)(t) = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}x(s)ds.$$

est contractante pour n assez grand. Le théorème suivant étend un peu les possibilités d'applications du théorème de con traction de Banach.

Théoreme 2.1.6. *(7) Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$.une application dont une itérée f^{n_0} est contractante.c-à-d il'existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$et $k \in]0,1[$ tels que*

$$d(f^{n_0}(x),f^{n_0}(y)) \leq k\ d(x,y),\forall x,y \in X$$

avec $f^{n_0} = f \circ f \circ ... \circ f$, n_0 fois. Alors f admet une point fixe unique.

Preuve Montrons f admet un point fixe unique.

— **l'unicité :** Supposons qu'il existe x, $y \in X$ tels que $x = f(x)$ et $y = f(y)$

$$\begin{aligned} x &= f(x) \Rightarrow f^{n_0}(x) = f^{n_0+1}(x) = f^{n_0}(f(x)) = ... = x. \\ y &= f(y) \Rightarrow f^{n_0}(y) = f^{n_0+1}(y) = f^{n_0}(f(y)) = ... = y. \end{aligned}$$

D'ou $d(x,y) = d(f^{n_0}(x),f^{n_0}(y)) \leq k\ d(x,y)$ Or $k \in]0,1[$. Donc $d(x,y)) = 0$ et donc $x = y$.

— **l'existence :** Comme f^{n_0} est contractante, alors à partir du théorème 2.1.1 , il existe $x \in X$ tel que $f^{n_0}(x) = x_*$. Finalement on montrons que $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} x_* &= f^{n_0}(x_*) \Rightarrow f(x_*) = f^{n_0+1}(x_*) = f^{n_0}(f(x_*)) \\ d(x_*,f(x_*)) &= d(f^{n_0}(x_*),f^{n_0}(f(x_*))) \leq k\ d(x_*,f(x_*)). \end{aligned}$$

Or $k \in]0,1[$; donc $x_* = N(x_*)$. □

2.1.4 théorème du point fixe de Edelstein

Une autre tentative naturelle d'étendre le théorème 2.1.1 serait de supposer que f est contractive, c'est -à- dire $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$; $\forall x$, $y \in X$ avec $x \neq y$ Dans ce cas f n'admet pas nécessairement un point fixe.

Par exemple $f(x) = \ln(1 + e^x)$ et $X = \mathbb{R}$ d'une part, on a :

$$| f(x) - f(y) | = | \ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^y) \ |$$

du théorème des accroissements finis

$$\exists \xi \in \mathbb{R} \text{ tq } | f(x) - f(y) | = | \frac{e^\xi}{1 + e^\xi} || x - y | < | x - y |$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F(x) = x &\Leftrightarrow \ln(1 + e^x) = x \\ &\Leftrightarrow 1 + e^x = e^x \\ &\Leftrightarrow 1 = 0.(imposible) \end{aligned}$$

Cependant, avec une hypothèse plus forte sur l'espace nous obtenons le théorème suivant.

Théoreme 2.1.7. ***(Edelstein,(7))*** *Soit* (X,d) *un espace métrique compact et une application* $f : X \to X$ *,Supposons que*

$$d(f(x),f(y)) < d(x,y) \ ;\forall x,y \in X, x \neq y.$$

Alors f *admet une point fixe unique.*

Preuve — **l'unicité :** Soit $x,y \in X$ tels que $x = f(x)$ et $y = f(y)$

$$d(x,y) = d(f(x),f(y)) < d(x,y) \Rightarrow x = y.$$

— **l'existence :** Considérons l'application $F : X \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$x \to F(x) := d(x,f(x)).$$

Puisque X est compact, alors l'application F atteint son minimum.donc il existe $x_0 \in X$ tel que

$$F(x_0) = d(x_0,f(x_0)) = \min_{x \in X} d(x,f(x)). \tag{2.1}$$

donc $\forall x,y \in X$;$d(x_0,f(x_0)) \leq d(x,f(x))$ On va montrer par l'absurde que x_0 est un point fixe de f c-à-d $(x_0 = f(x_0))$.
Si $x_0 \neq f(x_0)$ On a $d(f(x_0),f(f(x_0))) < d(x_0,f(x_0))$
D'après 2.1 on obtient que $d(x_0,f(x_0)) \leq d(f(x_0),f(f(x_0)))$
D'ou $d(x_0,f(x_0)) < d(x_0,f(x_0))$(contradiction)
D'ou $x_0 = f(x_0)$ □

2.1.5 Théorèmes du point fixe pour des contractions non linéaires

Maintenant, on va présenter sans démonstration quelques généralisations du théorème de contraction de Banach, dans lesquelles la constante de contraction k est remplacée par une fonction réelle.

Théoreme 2.1.8. *(7) Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application. Supposons que*

$$d(f(x),f(y)) \leq \phi(d(x,y)),\forall x,y \in X$$

Ou $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \phi(t) = 0,t \in]0,+\infty[$,Alors f admet un point fixe unique $u \in X$ tel que

$$\lim f^n(t) = u \ ,\forall x \in X.$$

Preuve . Soit $x_0 \in X$ et $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x1)$, . . . , $x_{n+1} = f(x_n)$, . . . ,alors

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(f^n(x_0),f^{n+1}(x_0)) \leq \phi^n(d(x_0,f(x_0))),\forall n \in X.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x_0),f^{n+1}(x_0)) = 0.$$

Montrons que $\phi(t) < t$,$\forall t \in \mathbb{R}_*^+$. Supposons qu'il existe $t \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$t \leq \phi(t) \Rightarrow t \leq \phi^2(t)...t \leq \phi^n(t),\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow t \leq 0$$

C'est une contradiction avec t positive ; alors $\forall t \in \mathbb{R}_*^+$ on a $\phi(t) < t$. Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \phi(\varepsilon) < \varepsilon$. Posons $\delta(\varepsilon) = \varepsilon - \phi(\varepsilon)$.on Montrons que si $d(x,f(x)) < \delta(\varepsilon)$, alors

$$f(B(x,\varepsilon)) \subset B(x,\varepsilon).$$

Soit $z \in B(x,\varepsilon)$, alors

$$d(x,f(z)) \leq d(x,f(x)) + d(f(x),f(z)) \leq \delta(\varepsilon) + \phi(d(x,z)) < \varepsilon - \phi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Alors $f(B(x,\varepsilon)) \subset B(x,\varepsilon)$. D'après le théorème 2.1.5, l'application N admet un point fixe. Il reste à montrer l'unicité de point fixe. Soit x, $y \in X$ tels que $x = f(x)$ et $y = f(y)$. Alors

$$d(x,y) = d(f(x),f(y)) \leq \phi(d(x,y)) \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Sinon $d(x,y) > 0$, ce qui donne

$$d(x,y) \leq \phi(d(x,y)) < d(x,y).$$

ce qui est impossible. □

2.1.6 Alternative non linéaire pour application contractante

Dans cette sous-section on va voir la propriété d'existence du point fixe pour les applications homotopiques (homotopes) contractantes ,et en Commençons par définir l'homotopie pour les contractions. Soit (X,d) un espace métrique complet et U un sous-ensemble ouvert de X.

Definition 2.1.1. (2) Soient $f : \bar{U} \to X$ et $g : \bar{U} \to X$ deux applications contractantes,ou $\bar{U}$ est la fermeture de l'ouvert $U \subset X$: On dit que f et g sont homotopique (homotopes) s'il existe une application $H : \bar{U} \times [0,1] \to X$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $H(.,0) = g(.)$ et $H(.,1) = f(.)$.
2. $x \neq H(x,t)$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \in [0,1]$ (ici désigne la ∂U frontière de U dans X) .
3. Il existe une constante α ; $0 \leq \alpha < 1$ telle que :

$$d(H(x,t),H(y,t)) \leq \alpha d(x,y); \forall x,y \in \bar{U} \text{ et } t \in [0;1].$$

4. Il existe $M \geq 0$ telle que :

$$d(H(x,t),H(x,s)) \leq M \mid x - s \mid ,\forall x \in \bar{U} \text{ et } t,s \in [0;1].$$

Le résultat suivant montre que la propriété d'avoir un point fixe est invariante par homotopie pour les contractions.

Théoreme 2.1.9. ***(2)*** *Soit (X,d) un espace métrique complet et U un ouvert de X. Supposons que $f : \bar{U} \to X$ et $g : \bar{U} \to X$ sont deux applications contractantes homotopes tel que g admet un point fixe dans U. Alors f a un point fixe dans U.*

Preuve Considérons l'ensemble

$$A = \{\lambda \in [0,1] : x = H(x,\lambda) \text{ pour certain } x \in U\}$$

Où H est une homotopie entre f et g. Notons que A est non vide puisque g admet un point fixe,et $0 \in A$;En effect : si $0 \notin A$ alors $\forall x \in U$; $x \neq H(x,0)$
et d'aprés la définition 2.1.1 on a : $H(x,0) = g(x)$,et comme g elle admet un point fixe

dans U alors $\exists x \in U$ tq $g(x) = x = H(x,0)$ (contraduction).
D'ou $0 \in A$.
Nous allons montrer que A est à la fois ouvert et fermé dans [0,1] et ainsi $A = [0,1]$.En conséquence f a un point fixe en U. On montre d'abord que A est fermé dans [0,1]. Pour voir ceci, soit

$$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \text{ avec } \lambda_n \to \lambda \in [0,1] \text{ quant } n \to \infty.$$

Nous devons montrer que $\lambda \in A$. Comme $\lambda_n \in A$ pour $n = 1,2,\cdots$, il existe $x_n \in U$ avec $x_n = H(x_n,\lambda_n)$. Aussi pour n, $m \in \{1,2,\cdots,\}$ nous avons

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &= d(H(x_n,\lambda_n),H(x_m,\lambda_m)) \\ &\leq d(H(x_n,\lambda_n),H(x_n,\lambda_m)) + d(H(x_n,\lambda_m),H(x_m,\lambda_m)) \\ &\leq M \mid \lambda_n - \lambda_m \mid + \alpha d(x_n,x_m). \end{aligned}$$

c'est

$$d(x_n,x_m) \leq \frac{M}{1-\alpha} \mid \lambda_n - \lambda_m \mid .$$

De plus comme $\{\lambda_n\}$ est une suite de Cauchy alors $\{x_n\}$ est aussi une suite de Cauchy,et comme X est complet il existe $x \in \bar{U}$ avec $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. En autre,$x = H(x,\lambda)$ étant donné que

$$\begin{aligned} d(x_n,H(x,\lambda)) &= d(H(x_n,\lambda_n),H(x,\lambda)) \\ &\leq M \mid \lambda_n - \lambda \mid + \lambda d(x_n,x). \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda \in A$ et A est fermé dans [0,1]. Montrons maintenant que A est un ouvert dans [0,1]. Soit $\lambda_0 \in A$. Alors il existe $x_0 \in U$ avec $x_0 = H(x_0,\lambda_0)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon \leq \frac{(1-\alpha)\, r}{M} \text{ où } r < dist(x_0,\partial U),$$

où $dist(x_0,\partial U) = inf\{d(x_0,x) : x \in \partial U\}$. Fixons $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon,\lambda_0 + \varepsilon)$. Alors, pour $x \in \overline{B(x_0,r)}$; $\overline{B(x_0,r)} = \{x : d(x,x_0) \leq r\}$,

$$\begin{aligned} d(x_0,H(x,\lambda)) &\leq d(H(x_0,\lambda_0),H(x,\lambda_0)) + d(H(x,\lambda_0),H(x,\lambda)) \\ &\leq \alpha d(x_0,x) + M|\lambda - \lambda_0| \\ &\leq \alpha r + (1-\alpha)r = r. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$,

$$H(.,\lambda) : \overline{B(x_0,r)} \to \overline{B(x_0,r)}.$$

En appliquant le Théorème 2.1.1 on déduit que $H(.,\lambda)$ admet un point fixe dans U. Ainsi $\lambda \in A$ pour tout $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, et donc A est un ouvert dans [0,1]. □

Dans la suite, nous supposons que X est un espace de Banach. Nous présentons maintenant une alternative non linéaire du type Leray-Schauder pour les applications contractantes.

Alternatives non linéaire de type Leray-Schauder pour les applications contractantes.

Théoreme 2.1.10. ***(2)*** *Soit E un espace de Banach et U un ensemble ouvert, $0 \in U$,et $f : \bar{U} \to E$ une contraction avec $f(\bar{U})$ borné.Alors :*

1. *ou bien, f admet un point fixe dans $\bar{U}$.*
2. *ou bien, il existe $x \in \partial U$, $\lambda \in [0,1]$: $x = \lambda f(x)$.*

Preuve Supposons que (2) n'a pas lieu et f n'a aucun point fixe sur ∂U (sinon la preuve est terminée). Alors :

$$x \neq \lambda f(x) \text{ pour tout } u \in \partial U \text{ et } \lambda \in [0,1].$$

Soit $H : \bar{U} \times [0,1] \to X$ donnée par : $H(x,t) = tf(x)$, g est la fonction nulle (voir la définition 2.1.1). L'application g admet un point fixe dans U (en effet, $g(0) = 0$) et f et g sont deux applications contractantes homotopiques. Maintenant,on applique le théorème 2.1.9 pour déduire l'existence de $x \in U$ avec $x = f(x)$, d'ou le résultat cherché. □

Corollaire 2.1.1. ***(2)*** *Soit $0 \in U \subset E$ avec U un sous ensemble ouvert d'un ensemble convexe dans un espace de Banach E. Supposons que $f : \bar{U} \to E$ est une contraction bornée ($f(\bar{U})$ est bornée) telle que pour tout $x \in \partial\bar{U}$ l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. $\| f(x) \| \leq \| x \|$.

2. $\| f(x) \| \leq \| x - f(x) \|$.
3. $\| f(x) \|^2 \leq \| x \|^2 + \| x - f(x) \|^2$.

Alors, f admet un point fixe.

Preuve Montrons le résultat en supposant que (1) est satisfaite. Si f n'admet pas de point fixe, alors d'après le théorème 2.1.10 il existerait un certain $x \in \partial\bar{U}$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $x = f(x)$. Si la condition (1) est satisfaite alors :

$$\| f(x) \| \leq \| \lambda f(x) \| .$$

c'est -à- dire que $\lambda \geq 1$; ce qui est absurde. Montrons le résultat en supposant que (2) est satisfaite. Si f n'admet pas de point fixe, alors d'après le théorème 2.1.10 il existerait un certain $x \in \partial\bar{U}$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $x = f(x)$: Si la condition (2) est satisfaite alors :

$$\| f(x) \| \leq \| \lambda f(x) - f(x) \| .$$

et alors

$$1 \leq (1 - \lambda).$$

contradiction avec le fait que :

$$(1 - \lambda) < 1, \forall \lambda \in]0,1[.$$

Montrons le résultat en supposant que (3) est satisfaite. Si f n'admet pas de point fixe, alors d'après le théorème 2.1.10 il existerait un certain $x \in \partial\bar{U}$ et $\lambda \in]0,1[$ tel que $x = f(x)$: Si la condition (3) est satisfaite alors :

$$\| f(x) \|^2 \leq \| \lambda f(x) \|^2 + \| \lambda f(x) - f(x) \|^2 .$$

et alors

$$1 \leq \lambda^2 + (1 - \lambda)^2$$

contradiction avec le fait que :

$$\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 < \lambda + (1 - \lambda) = 1, \forall \lambda \in]0,1[. \qquad \square$$

2.2 théorème de point fixe pour application non expansive

Nous commençons ce chapitre en présentant un résultat connu sous le nom du théorème de Schauder pour application non expansive. C'est un cas particulier du théorème de Schauder de point fixe qui sera présenté.

Théoreme 2.2.1. *(2) Soit C un sous-ensemble non vide, fermé, convexe d'un espace vectoriel normé E et soit $f : C \to C$ une application non expansive tel que $f(C)$ est un sous-ensemble d'un ensemble compact de C. Alors f admet un point fixe.*

Preuve Soit $x_0 \in C$, pour $n = 2,3, \cdot \cdot \cdot$, on pose

$$f_n := (1 - \frac{1}{n})f + \frac{1}{n}\, x_0$$

Comme C est convexe et $x_0 \in C$, alors on a bien $f_n : C \to C$ et il est clair que $f_n : C \to C$est une contraction. Par conséquent le théorème 2.1.1 entraine que chaque fn admet une unique point fixe $x_n \in C$, i.e :

$$x_n = f_n(x_n) = (1 - \frac{1}{n})f(x_n) + \frac{1}{n}\, x_0.$$

En outre,étant donné que $f(C)$ est inclus dans un sous-ensemble compact de C, alors il existe une sous-suite S de nombres entiers et un $u \in C$ tel que

$$f(x_n) \to u \text{ lorsque } n \to \infty \text{ dans } S.$$

Ainsi

$$x_n = (1 - \frac{1}{n})f(x_n) + \frac{1}{n}\, x_0 \to u \text{ lorsque } n \to \infty,\text{dans } S.$$

et par conséquent

$$u = f(u).$$ □

Le théorème suivant est un résultat le plus important dans ce paragraphe (établi indépendamment par Browder, Göhde et Kirk en 1965.)

Théoreme 2.2.2. *(2) Soit C un ensemble non vide, fermé, borné dans un espace de Hilbert H. Alors toute application non expansive $f : C \to C$ admet au moins un point fixe.*

Remarque 2.2.1. (2) l'unicité n'est pas réalise dans ce théorème la comme on peut le voir dans l'exemple $f(x) = x$, avec $x \in C = [0,1]$.

Definition 2.2.1. Espace uniformément convex(9)
On dit qu' un espace de Banach E est uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$(x,y \in E, \parallel x \parallel \leq 1, \parallel y \parallel \leq 1 \text{ et } \parallel x - y \parallel > \varepsilon) \Rightarrow (\parallel \frac{x-y}{2} \parallel < 1 - \delta)$$

Remarque 2.2.2. (2) En fait dans le théorème 2.2.2 il suffit de supposer que H est un espace de Banach uniformément convexe.
La preuve du Théorème 2.2.2 nécessite les deux résultats techniques suivants.

Théoreme 2.2.3. ***(2)*** *Soit H un espace de Hilbert tel que $u,v \in H$, et soient r,R deux constantes avec $0 \leq r \leq R$. S'il existe $x \in H$ avec*

$$\parallel u - x \parallel \leq R, \parallel v - x \parallel \leq R \text{ et } \parallel \frac{u+v}{2} - x \parallel \geq r$$

alors

$$\parallel u - v \parallel \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Preuve La loi du parallélogramme entraine que

$$\parallel u - v \parallel^2 = 2 \parallel u - x \parallel^2 + 2 \parallel v - x \parallel^2 - \parallel (u - x) + (v - x) \parallel^2 .$$

$$\leq 2R^2 + 2R^2 - 4 \parallel \tfrac{u+v}{2} - x \parallel^2 \leq 4(R^2 - r^2). \qquad \square$$

Théoreme 2.2.4. ***(2)*** *Soit H un espace de Hilbert, $C \subseteq H$ un ensemble borné et $f : C \to C$ une application non expansive. supposons que $x,y \in C$ et $a = \frac{x+y}{2} \in C$. Soit $\delta(C)$ le diamètre de C et soit $\varepsilon \leq \delta(C)$ tel que $\parallel x - f(x) \parallel \leq \varepsilon$ et $\parallel y - f(y) \parallel \leq \varepsilon$. Alors*

$$\parallel a - f(a) \parallel \leq 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\delta(C)}.$$

Preuve Comme

$$\parallel x - y \parallel \leq \parallel x - \frac{a + f(a)}{2} \parallel + \parallel y - \frac{a + f(a)}{2} \parallel .$$

on peut supposer que

$$\parallel x - \frac{a + f(a)}{2} \parallel \geq \frac{1}{2} \parallel x - y \parallel$$

Cependant, puisque

$$\| a - x \| = \frac{1}{2} \| x - y \|$$

nous avons

$$\begin{aligned} \| f(a) - x \| &\leq \| f(a) - f(x) \| + \| f(x) - x \| \\ &\leq \| a - x \| + \varepsilon = \frac{1}{2} \| x - y \| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.3 avec $r = \frac{1}{2} \| x - y \|$, $R = \frac{1}{2} \| x - y \| + \varepsilon$, $u = a$ et $v = f(a)$ donne

$$\begin{aligned} \| a - f(a) \| &\leq 2\sqrt{(\frac{1}{2} \| x - y \| + \varepsilon)^2 - (\frac{1}{2} \| x - y \|)^2} \\ &= 2\sqrt{\| x - y \| \varepsilon + \varepsilon^2} \\ &= 2\sqrt{\varepsilon}.\sqrt{\| x - y \| + \varepsilon} \\ &= 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\delta(C)} \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 2.2.2

Supposons que $0 \in C$. (sans perte de généralité nous pouvons supposer que $x_0 \in C$,par conséquent pour la simplicité on pose $x_0 = 0$) supposons également que $f(0) \neq 0$. Pour chaque $n = 2,3, \cdots$, on remarque que

$$f_n := (1 - \frac{1}{n})f : C \to C$$

est une contraction. Le Théorème 2.1.1 garantit l'existence d'un unique $x_n \in C$ tel que

$$x_n = f_n(x_n) = (1 - \frac{1}{n})f(x_n),$$

Ainsi

$$\| x_n - f(x_n) \| \leq \frac{1}{n} \| f(x_n) \| \leq \frac{1}{n}\delta(C)$$

Où $\theta(C)$ désigne le diamètre de C. Pour chaque $n \in \{2,3, \cdots\}$, soit

$$Q_n = \{x \in C : \| x - f(x) \| \leq \frac{1}{n}\delta(C)\}$$

On remarque que

$$Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \cdots \supseteq Q_n \supseteq \cdots$$

i.e c'est une suite décroissante d'ensembles non vide fermés Soit

$$d_n = \inf\{\| x \|; x \in Q_n\}$$

Comme la suite des ensembles non vides fermés (Q_n) est décroissants alors

$$d_2 \leq d_3 \leq \cdot \cdot \cdot \leq d_n \leq \cdot \cdot \cdot \text{avec } d_i \leq \delta(C)$$

pour chaque $i \in \{2,3, \cdot \cdot \cdot\}$. Par conséquence,$d_n \to d$ avec $d \leq \delta(C)$.

$$A_n = Q_{8n^2} \cap \overline{B(0,d + \frac{1}{n})}$$

où

$$B(0,d + \frac{1}{n}) = \{x \in H : \| x \| < d + \frac{1}{n}\}$$

A_n est une suite décroissante d'ensembles non vide fermés. Nous montrons maintenant que $\lim_{n\to+\infty} \delta(A_n) = 0$. Soit u, $v \in A_n$. Puis

$$\| u - 0 \| \leq d + \frac{1}{n} \text{ et } \| v - 0 \| \leq d + \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

En autre, comme u, δ_{8n^2}on a

$$\| u - f(u) \| \leq \frac{1}{8_{n^2}}\delta(C) \text{ et } \| v - f(v) \| \leq \frac{1}{8_{n^2}}\delta(C)$$

Ainsi le Théorème 2.2.4 implique que

$$\| \frac{u+v}{2} - f(\frac{u+v}{2}) \| \leq 2\sqrt{2\delta(C)}\sqrt{\frac{1}{8_{n^2}}\delta(C)} = \frac{1}{n}\delta(C)$$

donc $\frac{u+v}{2} \in Q_n$ et

$$\| \frac{u+v}{2} - 0 \| \geq d_n \tag{2.3}$$

Ainsi(2.2),(2.3) et Théorème 2.2.3 entraine que

$$\| u - v \| \leq 2\sqrt{(d + \frac{1}{n})^2 - d_n^2}$$

et donc

$$\delta(A_n) \leq 2\sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2} + (d^2 - d_n^2)}$$

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty}\delta(A_n)=0$. Le théorème de Cantor, appliqué à la suite $\{A_n\}_{n=2}^{\infty}$ garantit l'existence d'un

$$x_0 \in \cap_{n=2}^{\infty} A_n$$

et comme

$$x_0 \in \cap_{n=2}^{\infty} Q_{8n^2}$$

nous avons

$$\| x_0 - f(x_0) \| \leq \frac{\delta(C)}{8n^2} \text{ pour tout } n \in \{2,3,\cdots\}.$$

Donc $\| x - f(x_0) \|$ et le théorème est démontré. □

Le théorème suivant de Browder et Gohde a dit que le résultat du théorème reste valable, si H est un espace de Banach uniformément convexe.

Théoreme 2.2.5. ***(Browder et Gohde),(3)*** *Soient X un espace de Banach uniformément convexe, et C un sous ensemble non vide fermé, convexe, borné de X. Alors toute application non-expansive $T : C \to C$ admet au moins un point Fixe dans C.*

Le lemme suivant nous assure qu'on peut toujours approximer une application non expansive définie sur un ensemble convexe borné d'un espace de Banach par une application contractante.

Lemme 2.2.1. ***(17)*** *Soient C un ensemble convexe, bornée d'un espace de Banach X et $F : C \to C$ une application non-expansive. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une application contractante, $F_\varepsilon : C \to C$ telle que pour tout $x \in C$, $\| F(x) - F_\varepsilon(x) \| < \varepsilon$*

Preuve Pour tout point $z \in C$ et pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, on définit :

$$F_\varepsilon(x) = \varepsilon z + (1-\varepsilon)F(x).$$

Pour tout $x,y \in C$, On a :

$$\| F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(y) \| = (1-\varepsilon) \| F(x) - F(y) \|$$

$$\leq (1-\varepsilon) \| x - y \|$$

qui prouve que F_ε est contractante et on a aussi

$$\| F_\varepsilon(x) - F(x) \| = \varepsilon \| z - F(x) \|$$

$$\leq \varepsilon \; diam(c)$$

La conclusion se fait en prenant ε assez proche de 0. □

Théoreme 2.2.6. ***(10)*** *Soient C un sous ensemble fermé, bornée et convexe d'un espace de Banach X et $F : C \to C$ une application non-expansive. Alors*

$$\inf\{\| x - F(x) \|; x \in C\} = 0$$

Preuve Soient $z \in C$,$\varepsilon \in [0,1]$,et F_ε définie comme dans le lemme précédent,l'application F_ε est contractante car

$$\| F_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(y) \| \leq (1-\varepsilon) \| F_x - F_y \| \leq \| x - y \| .x,y \in C.$$

Aussi il admet un unique point fixe $x_\varepsilon \in C$ tq : $x_\varepsilon = F_\varepsilon(x_\varepsilon)$
On a :

$$\| x_\varepsilon - F(x_\varepsilon) \| = \| \varepsilon z + (1-\varepsilon)F(x_\varepsilon) - F(x_\varepsilon) \|$$

$$= \varepsilon \| z - F(x_\varepsilon) \|$$

$$\leq \varepsilon \; diam(C)$$

La conclusion se fait à partir de la propriété caractéristique de la borne inférieure. □

Théoreme 2.2.7. ***(10)*** *Soit C un sous ensemble compact, convexe d'un espace de Banach X et $F : C \to C$ une application non expansive. Alors F admet un point fixe dans C.*

Preuve Évidement la borne inférieure discutée dans le théorème précédent est atteinte ;

$$\inf\{\| x - F(x) \|; x \in C\} = 0 \Rightarrow \exists \; x_0 \in C \text{ telque } \| x_0 - F(x_0) \| = 0.$$

C'est à dire, il existe $x_0 \in C$ tel que $x_0 = F(x_0)$. □

Le théorème suivant donne le comportement d'une application non expansive définie sur une boule fermée de rayon r et de centre 0 a valeurs dans un espace de Hilbert H.

Théoreme 2.2.8. *(2) Soit H un espace de Hilbert réel et $\bar{B}_r = \{x \in H : \| x \| \leq r\}$ avec $r > 0$. Alors toute application $f : \bar{B}_r \to H$ non expansive vérifie au moins l'une de deux properties suivantes :*

— *(A_1) f a un point fixe dans $\bar{B}_r$.*

— *(A_2) Il n'existe pas $x \in \partial\bar{B}_r$ et $\lambda \in (0,1)$ tel que $x = \lambda f(x)$.*

Preuve On définit l'application $r : H \to \bar{B}_r$ par :

$$r(x) = \begin{cases} x, & \| x \| \leq r \\ r\frac{x}{\|x\|}, & \| x \| > r \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $r : H \to \bar{B}_r$ est non expansive. En conséquence $r \circ f : \bar{B}_r \to \bar{B}_r$ est aussi une application non expansive. Théorème 2.2.2 garantit l'existence de $x \in \bar{B}_r$ avec $r(f(x)) = x$. Si $f(x) \in \bar{B}_r$, alors

$$x = r(f(x)) = f(x).$$

et f admet un point fixe, c'est-à-dire le résultat (A_1) se réalise. Si $f(x) \notin \bar{B}_r$ alors

$$x = r(f(x)) = r\frac{f(x)}{\| f(x) \|} = \lambda f(x) \text{ avec } \lambda = \frac{r}{\| f(x) \|} < 1,$$

c'est-à-dire c'est (A_2) qui se réalise étant donné que $x \in \partial\bar{B}_r$. □

Théoreme 2.2.9. *(2) Soit H un espace de Hilbert réel, $\bar{B}r = \{x \in H : \| x \| \leq r\}$ avec $r > 0$, et soit $f : \bar{B}r \to H$ une application non expansive. Supposons que pour tout $x \in \partial\bar{B}_r$ une des quartes conditions suivantes soit vérifie :*

1. $\| f(x) \| \leq \| x \|$.
2. $\| f(x) \| \leq \| x - f(x) \|$.
3. $\| f(x) \|^2 \leq \| x \|^2 + \| x - f(x) \|^2$.
4. $< x, f(x) > \leq \| x \|^2$.

Alors f admet un point fixe dans $\partial\bar{B}$.

Preuve Supposons que la condition (2) soit vérifie. Alors, si f n'a pas de point fixe, d'aprés le théorème 2.2.8, il existe $z \in \partial\bar{B}_r$ et $\lambda \in (0.1)$ tel que $z = \lambda f(z)$. En particulier $f(z) \neq 0$ et

$$\| f(z) \| = \| f(\lambda f(z)) \| \leq \| \lambda f(z) - f(\lambda f(z)) \| ,$$

C'est-à-dire

$$\| f(z) \| \leq (1-\lambda) \| f(z) \|$$

donc $1 \leq 1-\lambda$ C'est une contradiction. $\square$

Chapitre 3

Applications

3.0.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz globale

Il est naturel de commencer notre application du théorème de point fixe de Banach avec l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions de certains problèmes a conditions initiales du premier ordre.
En particulier, nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} ,t \in I \tag{3.1}$$

o'u $f : I\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, et $I = [0,b] \subset \mathbb{R}$: On définit l'opérateur intégral suivant :

$$F : C(I,\mathbb{R}^n) \to C(I,\mathbb{R}^n)$$
$$y(t) \to Fy(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$$

y solution de (3.1) si et seulement si $y = Fy$; i.e la solution de (3.1) est un point fixe de l'opérateur intégral F.
Nous présentons maintenant un résultat connu que sous le nom du théorème de Picard-Lindelof ou bien théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théoreme 3.0.1. ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz)****(2)*
Soit $f : I\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$continue et lipschitzienne par rapport à y : i.e il existe une constante

$\alpha > 0$ telle que pour tout $t \in I$

$$\forall y,z \in \mathbb{R}^n; \mid f(t,y) - f(t,z) \mid \leq \alpha \mid y - z \mid$$

Alors, il existe une unique solution $y \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ du problème (3.1).

Preuve . On applique le théorème 2.1.1, pour $X = C(I, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme à poids

$$\| y \|_\alpha = \sup_{t \in I} \mid e^{-\alpha t} y(t) \mid = \mid e^{-\alpha t} y(t) \mid_0 .$$

on sait que :

1. $\| x \|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \| e^{-\alpha t} x(t) \|_0 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $\| \lambda x \|_\alpha = \| \lambda e^{-\alpha t} x(t) \|_0 = \mid \lambda \mid \| e^{-\alpha t} x(t) \|_0 = \mid \lambda \mid \| x \|_\alpha.$
3. $\| x + y \|_\alpha = \| e^{-\alpha t}(x+y)(t) \|_0 = \| e^{-\alpha t} x(t) + e^{-\alpha t} y(t) \|_0 \leq \| x \|_\alpha + \| y \|_\alpha.$

et l'opérateur intégral défini par :

$$\begin{aligned} F : C(I, \mathbb{R}^n) &\to C(I,\mathbb{R}^n) \\ y(t) &\to Fy(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds \end{aligned} \tag{3.2}$$

Notons que tout point fixe de l'opérateur F est une solution du problème (3.1) et inversement. Observons que $C(I,\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\| \, . \, \|_\alpha$ est un espace de Banach qui est équivalent à la norme $\| y \|_0 = \sup_{t \in I} \| y(t) \|_{\mathbb{R}^n}$. En effet, $\forall y \in C(I,\mathbb{R}^n)$ on a

$$e^{-\alpha b} \| y \|_0 \leq \| y \|_\alpha \leq \mid y \mid_0$$

F est une application contractante. En effet, $\forall y,z \in C(I,\mathbb{R}^n)$, on a

$$F_y(t) - F_z(t) = \int_0^t [f(s,y(s)) - f(s,z(s))] \, ds \text{ pour } t \in I$$

Alors, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} \| (F_y - F_z)(t) \|_{\mathbb{R}^n} &\leq e^{-\alpha t} \int_0^t \alpha e^{\alpha s} e^{-\alpha s} \mid y(s) - z(s) \mid ds \\ &\leq e^{\alpha t} (\int_0^t \alpha e^{\alpha s} ds) \| y - z \|_\alpha \\ &\leq e^{-\alpha t}(e^{\alpha t} - 1) \| y - z \|_\alpha \\ &\leq (1 - e^{-\alpha b}) \| y - z \|_\alpha \end{aligned}$$

D'ou ; $\| F_y - F_z \|_\alpha \leq (1 - e^{-\alpha b}) \| y - z \|_\alpha$, sachant que $(1 - e^{-\alpha b}) < 1$.
Par suite le théorème 2.1.1 implique qu'il existe un unique point fixe $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$ de F.
Par conséquent, le problème de Cauchy (3.1) admet une unique solution $y \in C(I, \mathbb{R}^n)$(car $y \in C(I,\mathbb{R}^n)$, $y\prime = f(t,y) \in C(I,\mathbb{R}^n)$). □

Maintenant nous allons omettre l'hypothèse de la continuité sur f et essayons d'étendre la notion d'une solution de (3.1)
en conséquence. Nous voulons le faire de manière a préserver l'équivalence naturelle entre (3.1) et l'équation $y = Fy$, qui a était obtenu par intégration.nous suivons les idées de Carathéodory et donner les définitions suivantes.

Definition 3.0.1. (2) Une fonction $y \in W^{1,p}(I)$ est une solution L^p -Carathéodory de (3.2) si y résout (3.2) au sens presque partout sur I .

Definition 3.0.2. (Application de Carathéodory)(2)
Une fonction $f : I\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction L^p-Carathéodory $(0 \leq p < +\infty)$ si

1. L'application $t \to f(t,x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. L'application $x \to f(t,x)$ est continue pour tout $t \in I$.
3. pour tout $c > 0$, il existe une fonction positive $h_c \in L^p(I)$ telle que si $\| x \|_{\mathbb{R}^n} \leq c$,$\| f(t,x) \|_{\mathbb{R}^n} \leq h_c(t)$ p,p ,et $t \in I$.

Si f est une fonction L^p-Carathéodory, alors $y \in W^{1,p}(I)$ résout (3.1) si et seulement si

$$y \in C(I) \text{ et } y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$$

En fait (1) et (2) impliquent que l'intégrale de droite est mesurable pour tout y mesurable, et (3) garantit qu'il est intégrable pour tout borné mesurable y. L'équivalence déclarée est maintenant claire. Donc comme dans le cas continu,(3.1) a une solution y si et seulement si $y = Fy$, $F : C(I) \to C(I)$.

Definition 3.0.3. (2) Une fonction

$$f : I\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(t,y) \to f(t,y)$$

est dite L^p-Lipschitzienne en $y \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $\alpha \in L^p(I)$ positive tel que pour tout $t \in I$ et

$$\forall y,z \in \mathbb{R}^n; \| f(t,y) - f(t,z) \|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha(t) \| y - z \|_{\mathbb{R}^n}$$

Théoreme 3.0.2. *(2) Si $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction L^p-Carathéodory et L^p-Lipschitz en y Alors il existe un unique $y \in W^{1,p}(I)$ solution de (3.1).*

Preuve La preuve est similaire à celle du Théorème 3.0.1 et on ne donnera
On applique le théorème 2.1.1.Soit

$$A(t) = \int_0^t \alpha(s)\, ds\ .$$

Alors $A'(t) = \alpha(t) \in L^p(I)$ pour tout t ,$I = [0,b] \in \mathbb{R}$ on définie la norme suivant

$$\| y \|_A = \| e^{-A(t)} y(t) \|_0$$

qui est équivalente à la norme $\| \cdot \|_0$car

$$e^{-\|\alpha\|_1} \| y \|_0 \leq \| y \|_A \leq \| y \|_0 \text{ ,où } \| \alpha \|_1 = \int_0^b | \alpha(t) | \, dt$$

et l'opérateur intégral défini par :

$$F : C(I,\mathbb{R}^n) \to C(I,\mathbb{R}^n)$$
$$y \to Fy(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$$

Notons que tout point fixe de l'opérateur F est une solution du problème (3.1) et inversement.
F est une application contractante. En effet, $\forall y,z \in C(I,\mathbb{R}^n)$, on a

$$F_y(t) - F_z(t) = \int_0^t [f(s,y(s)) - f(s,z(s))ds, \forall t \in I$$

Alors, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
e^{-A(t)} \| (F_y - F_z)(t) \|_{\mathbb{R}^n} &\leq e^{-A(t)} \int_0^t \alpha(s)\, e^{A(s)} e^{-A(s)} \| y(s) - z(s) \|_{\mathbb{R}^n}\, ds \\
&\leq e^{-A(t)} (\int_0^t \alpha(s)\, e^{A(s)} ds) \| y - z \|_\alpha \\
&\leq e^{-A(t)} (\int_0^t A'(s)\, e^{A(s)} ds) \| y - z \|_\alpha \\
&\leq e^{-A(t)} (e^{A(t)} - 1) \| y - z \|_\alpha \\
&\leq (1 - e^{-A(t)}) \| y - z \|_\alpha
\end{aligned}$$

D'ou ; $\exists M > 0$ tq : $\| F_y - F_z \|_\alpha \leq (1 - e^{-M}) \| y - z \|_\alpha$ (car $A(t) = \int_0^t \alpha(s)ds < \infty$).
sachant que $(1 - e^{-M}) < 1$. Ainsi $(C(I,\mathbb{R}^n), \|\|_A)$ est un espace de Banach .
et comme F est contractant l'application du principe de contraction de Banach, essentiellement comme dans la preuve du Théorème 3.0.1, implique qu'il existe un unique $y \in C(I,\mathbb{R})$ avec $y = F\ y$. Par suite, l'équation (3.1) admet une unique solution $W^{1,P}$.□

Théoreme 3.0.3. *(4)*
Si la fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 alors pour toute $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel qu'il existe dans J une unique solution du problème de Cauchy associé.
En particulier, pour toute telle donnée, il existe une unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.

Théoreme 3.0.4. ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz global)****(4)*
Si la fonction f est continue et globalement Lipschitzienne par rapport à y, alors toutes les solutions maximales sont globales. Plus précisément, s'il existe $k : I \to \mathbb{R}$ continue et positive telle que :

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, \| f(t,y_1) - f(t,y_2) \| \leq k(t) \| x - y \| .$$

alors toutes les solutions maximales sont globales.

Preuve le preuve de 3.0.3 et 3.0.4 est d'après (4) □

3.0.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} t \in I \tag{3.3}$$

o'u $(t_0,y_0) \in U$ et $I \subset \mathbb{R}$. On cherche une solution $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle $y'(t) = f(t,y)$, $(t,y) \in U$, telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

Definition 3.0.4. (11) Soient $T > 0$ et $r_0 > 0$.
On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_o, r_0)$est un cylindre de sécurité pour (3.3), si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ de ce problème avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $B_f(y_0, r_0)$

Definition 3.0.5. (Application localement Lipschitzienne)(4)
f est dite localement lipschitzienne par rapport à la variable y sur U, si $\forall (r_0, y_0) \in U$; il existe un voisinage V de (r_0, y_0) dans U et une constante $k = k(V) > 0$ telle que $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in V$; on ait

$$\| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq k \| y_1 - y_2 \|$$

Le théorème suivant de Cauchy-Lipschitz donne un résultat d'existence et d'unicité de solution d'un problème de Cauchy. Ce résultat permet d'élargir le domaine d'application du théorème 3.0.1.

Théoreme 3.0.5. ***(Cauchy-Lipschitz,(6))*** *Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport y sur U,alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$, le problème de Cauchy (3.3) admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to B_f(y_0, r_0)$.*
De plus, si on pose

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) du$$

Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la suite itérée $\Phi^p(y)$ converge uniformément vers la solution exacte.

Preuve On commence par construire un cylindre de sécurité pour le problème (3.3).
Soit V un voisinage de (t_0, y_0) sur lequel f est k-Lipschitzienne par rapport à y, et soient $T_0 > 0$ et

$$C_0 = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0) \subset V$$

un cylindre. C_0 est un fermé borné de $\mathbb{R}^{m+1}$ donc compact, et on en déduit que f est bornée sur C_0
Soit $M = \sup_{(t,y) \in c_0} \| f(t, y) \|$et on pose $T = \min[T_0, \frac{r_0}{M}]$, On aura que

$$C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$$

est un cylindre de sécurité, pour (3.3).

Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité,par construction, on a $\sup_{t\in C} \| f(t,y) \| \leq M$ et f est k -Lipschitzienne par rapport à y sur C. Soit $F = C([t_0 - T,t_0 + T] \times B_f(y_0,r_0))$ muni de la distance $d = \| \, . \, \|_\infty$. $\forall y \in F$. On définit sur F l'application :

$$y \to \Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,y(u))du\,;$$

On montre d'abord l'équivalence suivante :

$$y \text{ est solution du probléme (3.3)} \Longleftrightarrow y \text{ est un point fixe de } \Phi.$$

((⇐) Supposons que y est un point fixe de : Alors $\forall y \in F$ on a $\Phi(y) = y$ D'ou $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,y(u))du$: Or f est continue sur U donc y est continue sur U. De plus,y est dérivable sur $[t_0-T,t_0+T]$ et sa dérivée $y\prime(t) = f(t,y(t))$: On a aussi $y(t_0) = y_0+\int_{t_0}^{t} f(u,y(u))du = y_0$, Donc f est solution du problème (3.3). (⇒)) Supposons maintenant que y est solution de (3.3). On a alors $y'(t) = f(t,y(t))$ et $y(t_0) = y_0$,On peut intégrer y' par rapport à u car $y'(u) = f(u,y(u))$ et $u \to f(u,y(u))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce segment. Alors on obtient :

$$\int_{t_0}^{t} y'(u)du = \int_{t_0}^{t} f(u,y(u))du = [y(u)]_{u=t_0}^{u=t} = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0$$

Donc, on a :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,y(u))du = \Phi(y)(t)$$

et donc y est un point fixe de Φ , On veut appliquer le théorème du point fixe a Φ^p (pour p bien choisi) :

1. On montre d'abord que Φ est une application de F dans F. Pour cela on montre que

$$\Phi(y)(t) \in B_f(y_0,r_0) \ \forall t \in [t_0 - T,t_0 + T] \tag{3.4}$$

Soit $y \in F$. Alors $\forall t \in [t_0 - T,t_0 + T]$ on a :

$$\begin{aligned} \| \Phi(y)(t) - y_0 \| &= \| \int_{t_0}^{t} f(u,y(u))du \| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \| f(u,y(u)) \| \, du \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} du \\ &\leq M(t - t_0) \\ &\leq MT \leq r_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Donc

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \Phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$$

d'ou $\Phi(y) \in F$

On montrer aussi la stabilité de F par Φ^p :

En effect : pour $p = 1$ il est clair daprés 3.4 .

Supposons que pour un certin $p \in \mathbb{N}^*$ on a $\forall y \in F$;$\Phi^p(y)(t) \in B_f(y_0, r_0) \subset F$ et on le montre pour $p + 1$.

commme $\Phi^p(y)(t) \in F$ alors

$$\Phi^{p+1}(y)(t) = \Phi(\Phi^p(y)(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, \Phi^p(y)(u))du$$

Donc $\| \Phi^{p+1}(y)(t) - y_0 \| = \| \int_{t_0}^{t} f(u, \Phi^p(y)(u))du \| \leq r_0$ (d'aprés 3.5).

Ainsi $\Phi^{p+1}(y)(t) \in B_f(y_0, r_0) \subset F$.

D'ou la stabitité de F par Φ^p.

2. On montre maintenant que Φ^p est contractante. Soient y, $z \in F$: On pose $y_p = \Phi^p(y)$, $z_p = \Phi^p(z)$,$\forall p \in \mathbb{N}$: Par récurrence sur p on montre que :

$$\| y_p(t) - z_p(t) \| \leq k^p \frac{| t - t_0 |^p}{p!} d(y, z) ; \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] \tag{3.6}$$

C'est évident dans le cas $p = 0$. Supposons que pour un certain entier p, on ait (3.6). Alors $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\begin{aligned}
\| y_{p+1}(t) - z_{p+1}(t) \| &\leq \int_{t_0}^{t} k \| y_p(u) - z_p(u) \| du \\
&\leq \int_{t_0}^{t} k k^p \frac{| u - t_0 |^p}{p!} d(y, z) du \\
&= \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) \int_{t_0}^{t} | u - t_0 |^p du \\
&= \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) [\frac{| u - t_0 |^{p+1}}{p+1}]_{u=t_0}^{u=t} \\
&= k^{p+1} \frac{| t - t_0 |^{p+1}}{(p+1)!} d(y, z)
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence. Comme $| t - t_0 | \leq T$,on a

$$d(y_p, z_p) \leq k^p \frac{T^p}{p!} d(y, z).$$

donc Φ est lipschitzienne de rapport $k^p \frac{T^p}{p!}$, et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$ (car $\lim_{p \to +\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$) . Donc pour $q \geq p$; Φ^q est contractante.

3. Le théorème 1.1.4 nous assure la complétude de F. On déduit du théorème 2.1.1 que Φ^q admet un unique point fixe y. De plus $\Phi^q(\Phi(y)) = \Phi(\Phi^q(y)) = \Phi(y)$ donc $\Phi(y)$ est un point fixe de Φ^q, et par unicité du point fixe de Φ^q on a $\Phi(y) = y$.Comme les points fixes de Φ sont es points fixes de Φ^q, on en déduit que y est l'unique point fixe de Φ. Finalement, y est l'unique solution de (3.3). □

3.0.3 Application typique

nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) \\ y(0) = \Phi(y(t)) + y_0 \end{cases} ,t \in I \quad , \Phi \in C(I,\mathbb{R}) \tag{3.7}$$

o'u $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $I = [0,1]$. On définit l'opérateur intégral suivant :

$$\begin{aligned} F : C(I,\mathbb{R}) &\to C(I,\mathbb{R}) \\ y &\to Fy(t) = \varphi(y(t)) + \int_0^t f(s,y(s))ds \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec

$$\varphi(y) = \Phi(y) + y_0$$

Théoreme 3.0.6. *Si la fonction f est α-lipschitizienne et ϕ est une fonction k-lipschitzienne avec $\alpha + k < 1$ alors le problem 3.7 admet un solution unique.*

Preuve D'abord nous montrons que y solution de (3.7) si et seulement si $y = Fy$ (c-à-d la solution de (3.7) est un point fixe de l'opérateur intégral F).
($\Rightarrow$) Supposons que y est solution de (3.7) . On a alors $y'(t) = f(t,y(t))$ et $y(0) = \Phi(y) + y_0$,On peut intégrer y' par rapport à s car $y'(s) = f(s,y(s))$ et $s \to f(s,y(s))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce segment. Alors on obtient :

$$\int_0^t y'(s)ds = \int_0^t f(s,y(s))ds = [y(s)]_{s=t_0}^{s=t} = y(t) - y(0) = y(t) - \Phi(y) - y_0$$

Donc, on a :

$$y(t) = \Phi(y) + y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds = Fy(t)$$

((⇐) Supposons maintenant que y est un point fixe de F :Alors $\forall y \in F$ on a $F(y) = y$ D'ou $y(t) = \Phi(y) + y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$: Or f est continue sur I donc y est continue sur U. De plus,y est dérivable sur I et sa dérivée $y\prime(t) = f(t,y(t))$: On a aussi $y(0) = \Phi(y) + y_0 + \int_{t_0}^t f(u,y(u))du = \Phi(y) + y_0$, Donc f est solution du problème (3.7) .
- On applique le théorème 2.1.1 : on note $X = C(I,\mathbb{R})$ muni de la norme à poids

$$\| y \|_0 = \sup_{t\in I} | y(t) | .$$

Observons que X muni de la norme $\| . \|_0$ est un espace de Banach
- F est une application contractante. En effet, $\forall y,z \in C(I,\mathbb{R})$, on a

$$F_y(t) - F_z(t) = \varphi(y(t)) - \varphi(z(t)) + \int_0^t [f(s,y(s)) - f(s,z(s))]\, ds \text{ pour } t \in I$$

Donc

$$\begin{aligned} | (F_y - F_z)(t) | &\leq | \varphi(y(t)) - \varphi(z(t)) | + \int_0^t \alpha \mid y(s) - z(s) \mid ds \\ &\leq | \varphi(y(t)) - \varphi(y(t)) | + \mid y(t) - z(t) \mid \int_0^t \alpha ds. \\ &\leq k \mid y(t) - z(t) \mid + \alpha \mid y(t) - z(t) \mid . \\ &\leq (\alpha + k) \mid y(t) - z(t) \mid . \end{aligned}$$

Donc

$$\| F_y - F_z \|_0 \leq (\alpha + k) \| y - z \|_0$$

Alors, pour $\alpha + k < 1, \forall t \in I$, F est contractant Par suite le théorème 2.1.1 implique qu'il existe un unique point fixe $y \in C(I,\mathbb{R})$ de F.
Par conséquent, le problème de Cauchy (3.7) admet une unique solution $y \in C(I,\mathbb{R})$(car $y \in C(I,\mathbb{R})$, $y\prime = f(t,y) \in C(I,\mathbb{R})$). □

Example 3.1. Si on prend le probléme 3.7 avec $f(t,y) = \sin(\frac{ty}{3})$, $\phi(y) = \cos(\frac{y}{3})$ et $I = [0,1]$, On voir d'aprés le théorème 3.0.6 que ce probléme admet un solution unique dans $C(I,\mathbb{R})$.

conclusion

le théorème du point fixe sont parmi de plus puissants outils plus puissants dans l'analyse et dont la littérature regorge d'applications dans divers domaines ; notamment lorsque il s'agit d'établir l'existence de solutions pour des équations intégrales ou différentielles..
Des quelques théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach , en transformant le problème d'existence en un problème de point fixe.
Le théorème de Banach ne s'appuie pas sur les propriétés topologiques du domaine de définition mais sur le fait que la fonction étudiée soit contractante.Par ailleurs, ils servent aussi de pont entre l'analyse et la topologie, ce qui leur permet d'interagir et de donner de bons et d'intéressants résultats.

Bibliographie

[1] Abdelhaq El Jai, *Eléments de topologie et espaces métriques* , Presses universitaires de Perpignan, 2007.

[2] Agarwal, Ravi P and Meehan, Maria and O'regan, Donal, *Fixed point theory and applications*, vol 141,Cambridge university press,2001.

[3] Agarwal, Ravi P and O'Regan, Donal and Sahu, DR, *Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications*, vol 6,Springer,2009.

[4] Boyer, Franck,*Agrégation Externe de Mathématiques Equations différentielles ordinaires*, 2012.

[5] Dazé, Caroline, *Théorèmes de point fixe et principe variationnel d'Ekeland*,k 2010.

[6] Demailly, Jean-Pierre, *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed*, EDP sciences,2016.

[7] Djebali, Smaıl and Ouahab, Abdelghani, *Analyse Multivoque et Inclusions Différentielles*

[8] Dugundji, J and Granas, A, *Fixed point theory. Vol. 61 of Monografie Matematyczne*, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, Poland ,1982.

[9] Ha im Brézis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications ;[cours ; master, agrégation]*,Dunod ,2005.

[10] Goebel, Kazimierz and Kirk, William A, *Topics in metric fixed point theory*, num 28,Cambridge university press,1990.

[11] LAADJEL, Amirouche and OUAHAB, Abdelghani, *Séminaire de Mathématiques et Informatique*,2017.

[12] Matos, Julia , *Analyse Fonctionnelle.*

[13] Mironescu, Petru, *Mesure et Intégration.*

[14] Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés-2e éd. : Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2018.

[15] Pata, Vittorino, *Fixed point theorems and applications*, vol 116,Springer,2019.

[16] Smart, DR, *Fixed point theorems, Cambridge Uni*, Press , Cambridge,1980.

[17] Wanner, Gerhard and Hairer, Ernst and Hairer, E, *Analysis by its History*,Springer-Verlag,1997.

Résumé

Ce travail est consacrée à l'étude de théorème du point fixe et ses applications à l'existence et à l'unité de solution local , maximale et globale du problème de Cauchy dans un espace métrique. En utilisant certains de théorèmes qui forment la base de la théorie du point fixe, nous présentons des applications et des résultats de ce théorème pour résoudre un problème de Cauchy avec un ajout personnel représenté dans un application typique.

Abstract

This work is devoted to the study of the fixed point theorem and its applications to the existence and to the unit of local,maximal and global solution of the Cauchy problem in a metric space. Using some of the theorems that form the basis of fixed point theory, we present applications and results of this theorem to solve a Cauchy problem with a personal addition represented in a typical application.

ملخص

تم تخصيص هذا العمل لدراسة نظرية النقطة الثابتة وتطبيقاتها في وجود و وحدانية الحل المحلي، الاعظمي و الشامل لمشكلة كوشي في الفضاء المتري . باستخدام بعض النظريات التي تشكل أساس نظرية النقطة الثابتة ، نقدم تطبيقات ونتائج تلك النظرية لحل مشكلة كوشي مع إضافة شخصية متمثلة في تطبيق نموذجي .