République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Univérsité D'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

جامعة أحمد دراية.أدرار-الجزائر

Université Ahmed Draia.Adrar -Algérie

MEMOIRE

présenté par

Sbai Abd Errahman

pour obtenir

Le grade de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème

Sur les espaces vectoriels n-normés

Evaluée le 09 /06 /2022 , par le jury composé de

Mr. Mamouni Touhami,	Université d'Adrar,	Président
Mme. Belal Dhehbiya,	Université d'Adrar,	Examinateur
Mr. Khalladi Mohammed Taha,	Université d'Adrar,	Encadreur

L'année universitaire

2021-2022

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة أحمد دراية- أدرار

المكتبة المركزية

مصلحة البحث الببليوغرافي

Ministry of Higher Education and
Scientific Research
University Ahmed Draia of Adrar
The central library

شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذ(ة) : خلادي محمد طه

المشرف على مذكرة الماستر الموسومة بـــ : Sur les espaces vectoriels n-normés

من إنجاز الطالب(ة): سباعي عبد الرحمن

و الطالب(ة): ....

كلية : العلوم و التكنولوجيا

القسم : الرياضيات و الإعلام الآلي

التخصص: رياضيات

تاريخ تقييم / مناقشة: 26 جوان 2022

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقييم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.
وبإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والاليكترونية (PDF).

- **امضاء المشرف:**

04 JUIL. 2022

ادرار في :...

مساعد رئيس القسم:

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ★ جامعة أدرار ★ كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

أ. كعبلي محمد
رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي

ملاحظة :لاتقبل أي شهادة بدون التوقيع والمصادقة.

Dédicaces

.... Je dédie ce travail:

À

Mes Parents
Pour tous leurs sacrifices, leurs soutiens,
Leurs encouragements et leurs amours qui ont été
la raison de ma réussite.
Que dieu leur présente une bonne santé et une
longue vie.

À

Mes sœurs et Mes frères
Pour leur disponibilité à entendre mes frustrations
et les sources de mon stress
Avec mes souhaits de bonheur et de réussite dans
leur vie.

À

Tous ceux que j'aime et qu'ils m'aiment.
Qu'ils trouvent dans ce travail l'expression de mes
sentiments les plus affectueux.

⋆ ⋆ ⋆

Sbai Abd Errahman

Remerciements

Avant tout, je remercie, Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la force, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincére remerciement à mon encadreur **Khalladi Mohammed Taha** pour le sujet intéressant qu'il m'a proposé. Je le remercie encore pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail. Sans ses idées et son expertise, réaliser ce modeste travail n'aurait pas été possible. Je remercie également le jury composé de les professeurs **Mr. Mamouni Touhami** et **Mme. Belal Dhehbiya** d'avoir accepté ce modeste travail.

Mes remerciements ne seraient pas complets si je ne remerciais pas tous les professeurs de mathématiques et tous ceux qui m'ont enseigné dans ma vie universitaire.

Enfin, je remercie à toutes les personnes qui ont conribué de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier l'espace vectoriel n-normé et leurs propriétés élémentaires. Plusieurs exemples illustratifs ont été donnés et une application au théorème du point fixe a été établie.

Mots clés: n-Norme, n-Produit scalaire , Espace n-normé, Espace n-préhilbertien; Espace de n-Banach, φ-Opérateur de contraction, Point fixe.

Abstract

The main objective of this thesis is to study the n-normed vector space and their elementary properties. Several illustrative examples have been given and an application to the fixed point theorem has been established.

Key words: n-Norm, n-Inner product, n-Normed space, n-Inner product space; n-Banach space, Contraction φ-operator, Fixed point.

Table des matières

Tableau de notations

$\mathbb{N}^*$	L'ensemble $\{1,2,3,\ldots\}$.
$\mathbb{K}$	Le corps des numbres complexes $\mathbb{C}$ ou des numbres réels $\mathbb{R}$.
E	Espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.
$d(x,y)$	La distance de x à y.
(E,d)	Espace métrique .
$\Vert.\Vert$	Norme.
$(E,\Vert.\Vert)$	Espace vectoriel normé .
$\langle.,.\rangle$	Produit scalaire.
$(E,\langle.,.\rangle)$	Espace vectoriel préhilbertien .
$dimE$	Dimension de l'espace vectoriel E.
$abs(x)$	La valeur absolue de x.
$L\,(E,F)$	L'ensemble des applications linéaires définies de E dans F.
E^*	Le dual algébrique de E.
$\mathcal{L}\,(E,F)$	L'ensemble des applications linéaires et continues définies de E dans F.

E'	Le dual topologique de E.
$d_n(.,\ldots,.)$	n-Distance .
(E,d_n)	Espace vectoriel n-metrique.
$\\|.,\ldots,.\\|$	n-Norme .
$(E,\\|.,\ldots,.\\|)$	Espace vectoriel n-normé.
$\langle .,\ldots,. \mid .,. \rangle$	n-Produit scalaire.
$(E,\langle .,\ldots,. \mid .,. \rangle)$	Espace vectoriel n-préhilbertien.
$vect\{a_1,\ldots,a_n\}$	L'espace vectoriel engendré par la famille $\{a_1,\ldots,a_n\}$.
$\perp$	Symbol d'orthogonalité.
$A^\perp$	L'orthogonal de A.

Introduction

En 1963, S.Gahler a introduit les définitions d'un espace 2-métrique et d'un espace 2-normé en commençant par des leurs propriétés topologiques. Plus tard, ces espaces ont été utilisés par plusieurs chercheurs pour l'étude et l'analyse de certaines problémes en géométrie et analyse fonctionnelle. Cela a conduit à l'apparence du concept de l'espace 2-préhilbertien. Les résultats obtenus sur ces espaces 2-métriques, 2-normés et 2-préhilbertiens ont été généralisés par S.Gahler aux nouveaux espaces n-métriques, n-normés et n-préhilbertiens, où n est un nombre naturel arbitraire.

L'objectif principal de ce mémoire consiste en l'étude théorique et appliquée de certains concepts et propriétés élémentaires liées aux espaces vectoriels n-normés et aux espaces vectoriels n-préhilbertiens. Dans ce travail, nous allons découvrir de nouveaux concepts tels que la n-norme, la n-distance, le n-produit scalaire, l'espace n-normé, l'espace n-préhilbertien et l'espace de n-Banach, ainsi que quelques extensions de résultats classiques bien connus à ce nouveu contexte d'espace n-normé.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notations, notions est résultats sur les espaces vectoriels normés et les espaces vectoriels préhilbertiens.

Le deuxième chapitre est consacré à une étude assez détaillée du nouveau concept d'espaces vectoriels n-normés et n-préhilbertiens. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à diverses généralisations de concepts et de résultats déjà connus des espaces normés et des espaces préhilbertiens. Nous aborderons également la relation d'inclusion entre ces nouveaux espaces. Enfin, nous allons étudier en détail, l'extension de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à ces espaces n-normés.

Le troisième chapitre est une application de l'étude théorique abordée dans les chapitres précédents à la théoré du point fixe dans les espaces de n-Banach, en définissant, d'abord, les nouveux concepts d'opérateurs n-linéaires, n-bornés et n-continues dans les espaces n-normés et leurs propriétés fondamentales.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons la définition d'un espace vectoriel normé et leurs propriétés élémentaires ainsi que les applications linéaires continues entre les espaces de Banach. Pour les preuves et plus de détails voir [1]

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes ou le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et par E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimention quelconque.

1.1 Espaces vectoriels normés

1.1.1 Définition et propriétés élémentaires

Rappelons d'abord la notion d'une norme et quelques exemples fondamentaux.

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle semi-norme sur E, toute application

$$\|\cdot\| : \quad E \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R},$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\forall x \in E$, $\|x\| \geq 0$, (positivité)

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,(homogénéité)

(iii) $\forall \, (x,y) \in E \times E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.(Inégalité triangulaire)

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ s'appelle espace vectoriel semi-normé.

Exemple 1.1. 1. La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des semi-normes.

2. Les applications

$$\begin{array}{rccc} |\cdot|_{\pm} & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & |x \pm y| \end{array},$$

sont des semi-normes.

Définition 1.2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle norme sur E, toute application

$$\|\cdot\| : \quad E \longrightarrow \mathbb{R},$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0,$ (positivité)

(ii) $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0,$ (séparation).

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|\,,$ (homogénéité).

(iv) $\forall\,(x,y) \in E \times E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\,.$ (Inégalité triangulaire)

Définition 1.3. On appelle espace vectoriel normé tout couple $(E, \|\cdot\|)$ formé d'un espace vectoriel menu d'une norme sur E.

Remarque 1.1. Toute norme est une semi-norme, mais la réciproque est, en général, fausse, en effet, les applications 2 définies par $|\cdot|_{\pm}$ dans l'exemple (1.1), ne sont pas des normes, car elles ne vérifient pas la condition (ii) $-$Définition 1.2 de séparation.

Exemple 1.2. 1. La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des normes.

2. Normes fondamentales sur $\mathbb{K}^n$:

Si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, les applications suivantes :

2.1. $\|x\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|$

2.2. $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, (norme euclidienne)

2.3. $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq j \leq n} (|x_j|)\,,$ (norme infinie)

sont des normes dans $\mathbb{K}^n$.

Nous exposons maintenant quelques propriétés élémentaires des espaces vectoriles normés.

Proposition 1.1. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace semi-normé. Alors*

(i) $\|0\| = 0$,

(ii) $\forall (x,y) \in E \times E$, $\|x \pm y\| = \|y \pm x\|$.

(iii) $\forall (x,y) \in E \times E$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

L'assertion (iii) de la Proposition (1.1) entraîne le résultat suivant.

Proposition 1.2. *Toute norme est une application uniformément continue.*

Le résultat suivant nous permet d'introduire la topologie associe à une norme.

Théorème 1.3. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace normé. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) = \|x - y\| \end{array}, \tag{1.1}$$

définit une distance sur E.

Définition 1.4. L'application d définie par (1.1) est appelée la distance canonique de $(E, \|\cdot\|)$.

Remarque 1.2. Le théorème précédent, montre que à toute norme sur E, on peut associer une distance définie par la relation (1.1) .

Corollaire 1.4. *Tout espace normé est mérique.*

Définition 1.5. Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes, si l'application identité

$$\begin{array}{rccc} Id_E: & (E, \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (E, \|\cdot\|_2) \\ & x & \longmapsto & Id_E(x) = x \end{array},$$

est homéomorphisme, i,e., bijective et continue.

Proposition 1.5. *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes, si et seulement s'il existe deux constantes réelles strictement positives α et β, $(\alpha < \beta)$ telles que :*

$$\forall x \in E,\, \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 .$$

Exemple 1.3. Les normes fondamentales sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Soit $\left(\left(E_j, \|\cdot\|_j\right)\right)_{1\leq j\leq n}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés sur un même corps $\mathbb{K}$. L'espace produit

$$E = \prod_{j=1}^{n} E_j,$$

muni des opérations traditionnelles d'addition et de multiplication par un scalaire, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Pour tout $x = (x_1,...,x_n) \in E$, les normes fondamentales sur l'espace produit E, sont définies par :

$\|x\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} \|x_j\|_j$,

$\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \|x_j\|_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq n} \left(\|x_j\|_j\right)$.

Théorème 1.6. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé sur $\mathbb{K}$. Alors les deux applications f et g définies par*

$$\begin{array}{rccc} f: & E\times E & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ & (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha x \end{array},$$

sont continues.

On sait qu'un espace vectoriel dont la topologie rende continues les deux applications sus-citées est appelé espace vectoriel topologique. En conséquuence, on a le résultat suivant

Corollaire 1.7. *Tout espace vectoriel normé est topologique.*

Définition 1.6. Soit E un espace normé. On appele sous-espace normé de E, tout sous-espace vectoriel F muni da la topologie induite, i,e., muni de la restriction de la norme de E.

Définition 1.7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace vectoriel normé $(E; \|.\|)$ et $x \in E$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E si

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p,q > n_0 : \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Définition 1.8. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite convergente en norme vers une limite $x \in E$, si et seulement si

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n - x\| = 0,$$

i,e.,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x\| \leq \varepsilon.$$

Comme conséquence du Corollaire 1.4, on peut vérifier facilement les asserations suivants.

Théorème 1.8.
1. *Toute suite de Cauchy d'un espace normé est bornée.*
2. *Toute suite convergente d'un espace normé est de Cauchy.*
3. *L'image $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(E, \|\cdot\|_1)$ par une application uniformément continue $f : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_2)$ est une suite de Cauchy de $(F, \|\cdot\|_2)$.*
4. *Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes équivalentes sur un espace vectoriel normé E, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_1)$ si et seulement si c'est une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_2)$.*

Définition 1.9. On dit qu'un espace normé E est de Banach, si toute suite de Cauchy de E est convergente, i,e., E est complet en tant qu'espace métrique muni de la distance associée à sa norme.

Définition 1.10. Une partie F d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite complète si l'espace normé induit $(F, \|\cdot\|)$ est complet, i,e., si toute suite de Cauchy de $(F, \|\cdot\|)$ converge vers un élément de F.

Exemple 1.4. 1. Les espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ et $(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ sont de Banach.

2. L'espace

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \text{ est bornée}\},$$

muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est de Banach.

1.1.2 Opérateurs linéaires continues

Dans ce paragraphe nous allos exposer quelques notions et résultats concernant les applications linéaires continues sur les espaces vectoriels normés.

Définition 1.11. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On appelle une application linéaire de E dans F, toute application de la forme

$$\begin{array}{cccc} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

satisfaisant à la condition

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall (x,y) \in E^2, \quad f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y).$$

Notation 1.9. *L'ensemble des applications linéaires définies de E dans F, est noté $L(E,F)$.*

Remarque 1.3. L'ensemble $L(E,F)$ muni des opérations suivantes

$$\begin{array}{ccc} L(E,F) \times L(E,F) & \longrightarrow & L(E,F) \\ (f,g) & \longmapsto & f+g \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times L(E,F) & \longrightarrow & L(E,F) \\ (\lambda,f) & \longmapsto & \lambda f \end{array},$$

forme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Remarque 1.4. Dans le cas où E et F sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, l'application f sera dite opérateur linéaire.

Définition 1.12. On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{K}-$espace vectoriel , toute application linéaire définie de E dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.13. L'ensemble $L(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires définies sur E, noté E^* est appelé dual algébrique de E.

Remarque 1.5. E^* est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Le résultat suivant donne la continuité d'un opérateur linéaire de $L(E,F)$.

Théorème 1.10. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et f un opérateur linéaire de $L(E,F)$. Alors f est continue si et seulement si*

$$\exists c > 0, \forall x \in E, \ \ \|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E.$$

Remarque 1.6. (1) L'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F forme un sous espace vectoriel de $L(E,F)$ que l'on note $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$ si $E = F$.

(2) L'ensemble des formes linéaires continues sur E forme un sous espace vectoriel du dual E^*. On la note E' et on l'appelle dual topologique de E.

Proposition 1.11. *Si E est un espace normé de dimension finie, alors pour tout espace normé F, on a*

$$L(E,F) = \mathcal{L}(E,F).$$

Corollaire 1.12. *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors*

$$E^* = E'.$$

Soient E et F deux espaces normés sur $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)} & : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f & \longmapsto & \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup\limits_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \end{array},$$

définit une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$. Elle s'appelle la norme subordonnée de l'application f.

Proposition 1.13. *L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est lui-même un espace vectoriel normé.*

Proposition 1.14. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E$.*

Proposition 1.15. *Soient $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$ deux espacés normés. Si $(F,\|.\|_F)$ est un espace de Banach. Alors $(\mathcal{L}(E;F),\|.\|)$ est un espace de Banach.*

1.2 Espaces vectoriels préhilbertiens

L'etude suivante est cansacré au cas général des espaces de Hilbert, le cas des Hilbert réels se déduisant immédiatement.

1.2.1 Produit scalaire

Définition 1.14. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application

$$u: \quad E \times E \quad \longrightarrow \quad \mathbb{K},$$

est dite forme sesquilinéaire sur E, si elle vérifie :

$$(i) \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y,z) \in E^3, u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x,z) + \beta u(y,z),$$

$$(ii) \quad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y,z) \in E^3, u(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} u(x,y) + \overline{\beta} u(x,z).$$

Remarque 1.7. (i) La définition précédente est équivalente à dire que l'application u est linéaire par rapport à la première variable et semi-linéaire par rapport à la deuxième variable.

(ii) Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application u devient une forme bilinéaire.

Définition 1.15. Une forme sesquilinéaire u est dite hermitienne si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in E \times E, u(x,y) = \overline{u(y,x)},$$

où $\overline{u(y,x)}$ désigne le complexe conjugué de $u(y,x)$.

Remarque 1.8. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la forme sesquilinéaire u sera dite forme bilinéaire symétrique.

Exemple 1.5. L'application

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array},$$

est une forme bilinéaire symétrique.

Proposition 1.16. *Soit u une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est hermitienne.

(ii) $\forall x \in E, u(x,x) \in \mathbb{R}$.

Définition 1.16. Une forme hermitienne u sur E est dite positive (resp. définie positive) si elle vérifie :

$$\forall x \in E, u(x,x) \geq 0 \text{ (resp. } \forall x \in E \setminus \{0\}, u(x,x) > 0).$$

Définition 1.17. On appelle produit scalaire sur E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive notée par

$$\begin{array}{cccc} \langle .,. \rangle & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \langle x,y \rangle \end{array}.$$

Exemple 1.6. L'application citée dans l'exemple (1.5) défini un produit scalaire.

Proposition 1.17. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soit $u = \langle .,. \rangle$ une forme hermitienne positive, alors*

$$\forall (x,y) \in E \times E, |\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle .$$

Proposition 1.18. *(Inégalité de Minkowski). Soit $\langle \cdot,\cdot \rangle$ un produit scalaire sur E, alors*

$$\forall (x,y) \in E \times E, \langle x+y, x+y \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y,y \rangle^{\frac{1}{2}} .$$

Définition 1.18. Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E. La norme associée à $\langle .,. \rangle$ est notée et définie par l'application

$$\begin{array}{cccc} \|.\| & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \longmapsto & \|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle} \end{array}.$$

1.2.2 Espace de Hilbert

Définition 1.19. On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel muni d'une norme associée à un produit scalaire.

Exemple 1.7. L'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ des fonctions continues et $2\pi-$périodiques sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx,$$

est un espace préhilbertien.

Remarque 1.9. (1) Tout espace préhilbertien est un espace normé.

(2) Si E est un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$, (resp. $\mathbb{C}$) la norme $\|.\|$ est dite norme euclidienne, (resp. hermitienne).

Proposition 1.19. *(Identité du parallèlogramme) Si E est un espace préhilbertien, alors*

$$\forall (x,y) \in E \times E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

La réciproque est donnée dans le résultat suivant .

Théorème 1.20. *Pour qu'un espace normé E soit préhilbertien il faut et il suffit que sa norme satisfasse à l'identité du parallèlogramme.*

Exemple 1.8. (1) L'ensemble

$$l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C}) = \left\{ x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C},\ \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^2 < +\infty \text{ dans } \mathbb{R} \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i\geq 0} x_i \overline{y}_i,$$

est un espace préhilbertien.

(2) L'espace normé $(C([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ n'est pas préhilbertien. En effet, en prenant, par exemple, les les deux fonctions $f(x) = 1$ et $g(x) = x$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$, on obtient

$$\|f\|_\infty = 1, \|g\|_\infty = 1, \|f+g\|_\infty = 2 \text{ et } \|f-g\|_\infty = 1.$$

Il est clair $5 = \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \neq 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) = 4$.

Définition 1.20. On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.

Exemple 1.9. (1) L'espace $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $\langle x,y\rangle = xy$ et de la norme $\|x\| = |x|$ est un espace de Hilbert.

(2) L'espace. $\mathbb{C}^n$, muni du produit scalaire $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ et de la norme $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ est un espace de Hilbert.

(3) L'espace $l^2_{\mathbb{N}}(\mathbb{C})$ de l'exemple (1), (1.8) est un espace de Hilbert.

Chapitre 2

Espaces vectoriels n-normés

2.1 Espaces vectoriels n-normés

2.1.1 n-Norme

Définition 2.1. [5] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension $dimE \geq n$. On appelle n-norme sur E , toute application

$$\|.,...,.\| : E^n \to \mathbb{R},$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\|x_1,...,x_n\| \geqslant 0$, $\forall (x_1,x_2,...,x_n) \in E^n$.

(ii)$\|x_1,...,x_n\| = 0$ si et seulement si $x_1,x_2,...,x_n$ sont linéairement dépendants.

(iii)$\|x_1,...,x_n\|$ est invariante par permutation.

(iv)$\|\lambda x_1,...,x_n\| = |\lambda|\|x_1,...,x_n\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x_1,x_2,...,x_n) \in E^n$.

(v)$\|x_1,...,x_n + y\| \leq \|x_1,...,x_n\| + \|x_1,...,y\|$, $\forall (x_1,x_2,...,x_n) \in E^n, \forall y \in E$.

Définition 2.2. Le couple $(E; \|.,...,.\|)$ est appelé un espace vectoriel n-normé .

Remarque 2.1. (i) Dans la définition précédente, pour n=1 la 1-norme coïncicide avec la norme ordinaire.

(ii) dimE est quelconque, i,e., finie ou infinie.

(iii) La condition (iii) signifie que $\|x_1,...,x_n\| = \|x_{\sigma_1},...,x_{\sigma_n}\|$ où $\sigma_i \in \{1,\ldots,n\}$, $1 \leq i \leq n$.

Exemple 2.1.

Pour $n = 2$, $E = \mathbb{R}^2$ muni avec la 2-norme

$$\|x_1,x_2\|_e = abs \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$$

où $x_i = (x_{i1},x_{i2}) \in \mathbb{R}^2$ pour $i \in \{1,2\}$, et $|.|$ est le déterminant de la matrice associé, forme un espace vectoriel 2-normé..

En général, on peut munir l'espace euclidienne $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$ par la n-norme euclidienne :

$$\|x_1, \ldots, x_n\|_e = abs \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

où $x_i = (x_{i1},...,x_{in}) \in \mathbb{R}^n$ pour $i \in \{1,...,n\}$, de sorte que $\mathbb{R}^n$ devient un espace n-normé.

Exemple 2.2. Soit $(E,\langle .,. \rangle)$ un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension $dimE \geqslant n$, alors l'application

$$\begin{aligned} \|.,...,.\|_s : E^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,...,x_n) &\longmapsto \|x_1, \ldots, x_n\|_s = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

definit une n-norme sur E. Elle s'appelle la n-norme standard.

Remarque 2.2. Si $E = \mathbb{R}^n$, la n-norme standart $\|.,...,.\|_s$ de l'exemple 2.2. coïncide avec la n-norme euclidienne $\|.,...,.\|_e$ de l'exemple 2.1.

Proposition 2.1. *Toute n-norme est uniformément continue.*

Preuve Nous ne montrerons la proposition que pour le cas $n = 2$, le cas général $n > 2$ se déduit immédiatement à l'aide d'un raisonnement par reccurence sur n.

À cet effet, il suffit de montrer que la 2-norme $\|\cdot,\cdot\|$ définit une application lipschitzienne, i.e.,

$$\exists k > 0 \text{ tel que } |\|x_1,x_2\| - \|y_1,y_2\|| \leq \|x_1 - y_1,x_2 - y_2\| .$$

On a $(y_1,y_2) = (y_1,y_2) - (x_1,x_2) + (x_1,x_2)$. En utilisant la condition (v), on obtient

$$\begin{aligned} \|y_1,y_2\| &= \|y_1 - x_1 + x_1,y_2 - x_2 + x_2\| \\ &\leq \|y_1 - x_1,y_2 - x_2 + x_2\| + \|x_1,y_2\| \\ &\leq \|y_1 - x_1,y_2 - x_2\| + \|y_1 - x_1,x_2\| + \|x_1,y_2\| \\ &\leq \|y_1 - x_1,y_2 - x_2\| + \|x_1,x_2\| + \|y_1,x_2\| + \|x_1,y_2\| \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|y_1,y_2\| - \|x_1,x_2\| \leq \|y_1 - x_1,y_2 - x_2\| + \|y_1,x_2\| + \|x_1,y_2\| \tag{2.1}$$

On déstingue les deux cas : (i) $\|y_1,x_2\| + \|x_1,y_2\| \leq \|y_1 - x_1,y_2 - x_2\|$ et
(ii) $\|y_1 - x_1,y_2 - x_2\| \leq \|y_1,x_2\| + \|x_1,y_2\|$.
(i) Si $\|y_1,x_2\| + \|x_1,y_2\| \leq \|y_1 - x_1,y_2 - x_2\|$, l'inégalité (2.1) devient

$$\|y_1,y_2\| - \|x_1,x_2\| \leq 2\,\|y_1 - x_1,y_2 - x_2\| \tag{2.2}$$

De la même façon, puisque $(x_1,x_2) = (x_1,x_2) - (y_1,y_2) + (y_1,y_2)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|x_1,x_2\| &= \|x_1 - y_1 + y_1,x_2 - y_2 + y_2\| \\ &\leq \|x_1 - y_1,x_2 - y_2 + y_2\| + \|y_1,x_2\| \\ &\leq \|x_1 - y_1,x_2 - y_2\| + \|x_1 - y_1,y_2\| + \|y_1,x_2\| \\ &\leq \|x_1 - y_1,x_2 - y_2\| + \|x_1,y_2\| + \|y_1,y_2\| + \|y_1,x_2\| \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|x_1,x_2\| - \|y_1,y_2\| \leq \|x_1 - y_1,x_2 - y_2\| + \|x_1,y_2\| + \|y_1,x_2\| \tag{2.3}$$

$$\|x_1,x_2\| - \|y_1,y_2\| \leq 2\,\|y_1 - x_1,y_2 - x_2\| \tag{2.4}$$

De (2.2) et (2.4), on déduit que

$$|\|x_1,x_2\| - \|y_1,y_2\|| \leq 2\,\|y_1 - x_1,y_2 - x_2\| .$$

Ce qui montre que la 2-norme $\|\cdot,\cdot\|$ est lipschitzienne de rapport 2. Par conséquent, elle est uniformément continue.

(ii) Si $\|y_1 - x_1, y_2 - x_2\| \leq \|y_1, x_2\| + \|x_1, y_2\|$, en utilisant le fait que $\left(\mathbb{R}_+^*, + , \leq\right)$ est un group totalement ordonné archimédien, il existe un entier naturel m tel que

$$\|y_1, x_2\| + \|x_1, y_2\| \leq m \|y_1 - x_1, y_2 - x_2\|,$$

Par conséquent, pour $(y_1, y_2) = (y_1, y_2) - (x_1, x_2) + (x_1, x_2)$, l'inégalité (2.1), devient

$$\|y_1, y_2\| - \|x_1, x_2\| \leq (m + 1) \|y_1 - x_1, y_2 - x_2\| \tag{2.5}$$

et pour pour $(x_1, x_2) = (x_1, x_2) - (y_1, y_2) + (y_1, y_2)$, l'inégalité (2.3), devient

$$\|x_1, x_2\| - \|y_1, y_2\| \leq (m + 1) \|y_1 - x_1, y_2 - x_2\| \tag{2.6}$$

De (2.5) et (2.6), on obtient

$$|\|x_1, x_2\| - \|y_1, y_2\|| \leq (m + 1) \|y_1 - x_1, y_2 - x_2\|.$$

Ce qui montre que la 2-norme $\|\cdot,\cdot\|$ est lipschitzienne de rapport $m + 1$. Ainsi, elle est uniformément continue. □

Le résultat suivant montre que la topologie définie sur un espace vectoriel n-normé est compatible avec les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.

Théorème 2.2. *Soit $(E, \|\cdot,\ldots,\cdot\|)$ un espace n-normé de dimension $\dim E \geq n$. Alors les deux applications f et g définies par*

$$\begin{array}{cccc} f: & E^n \times E^n & \longrightarrow & E^n \\ & (x,y) = (x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) & \longmapsto & x + y = (x_1 + y_1,\ldots,x_n + y_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{K} \times E^n & \longrightarrow & E^n \\ & (\alpha,x) = (\alpha,x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & (\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n) \end{array}$$

sont continues.

Preuve Montrons seulement la continuité de f. Soient $x_0 = (x_0^1,...,x_0^n)$ et $y_0 = (y_0^1,...,y_0^n)$ deux vecteurs de E^n et $\varepsilon > 0$. Supposons que $x = (x_1,...,x_n)$ et $y = (y_1,...,y_n)$ sont deux vecteurs de E^n satisfaisant à

$$\|x - x_0\| = \left\|x_1 - x_0^1,...,x_n - x_0^n\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|y - y_0\| = \left\|y_1 - y_0^1,...,y_n - y_0^n\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

alors

$$\begin{aligned}
\|(x+y) - (x_0 + y_0)\| &= \left\|(x_1 + y_1,...,x_n + y_n) - \left(x_0^1 + y_0^1,...,x_n^1 + y_n^1\right)\right\| \\
&= \left\|x_1 - x_0^1 + y_1 - y_0^1,...,x_n - x_n^1 + y_n - y_n^1\right\| \\
&= \left\|\left(x_1 - x_0^1,...,x_n - x_n^1\right) + \left(y_1 - y_0^1,...,y_n - y_n^1\right)\right\| \\
&= \|(x - x_0) + (y - y_0)\| \\
&\leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que f est uniformément continue sur $E^n \times E^n$. □

Corollaire 2.3. *Tout espace n-normé est topologique.*

Définition 2.3. Soit E un espace n-normé. On appele sous-espace n-normé de E, tout sous-espace vectoriel F muni da la topologie induite, i,e,. muni de la restriction de la n-norme de E.

2.1.2 n-Métrique

Dans ce sous paragraphe nous allons étudier la notion de n-métrique comme propriété topologique des espaces n-normés.

Nous avons les nouveaux concepts et résultats suivants.

Définition 2.4. Soit E un espace vectoriel et $n \geq 2$. On appele n-métrique ou n-distance sur E, toute application

$$\begin{aligned}
d_n : \quad & E^{n+1} && \longrightarrow \mathbb{R} \\
& (x_1, \ldots, x_{n+1}) && \longmapsto d_n(x_1, \ldots, x_{n+1})
\end{aligned}$$

satisfaient aux conditions suivantes :

(i) $d_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) \geq 0$

(ii) $\forall x_1,x_2 \in X$ distingués, $\exists(x_3,\ldots,x_{n+1}) \in E^{n-1} : d_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) \neq 0$.

(iii) Si au moins deux éléments x_1,x_2 sont égales, $d_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) = 0, \forall(x_3,\ldots,x_{n+1}) \in E^{n-1}$.

(iv) $d_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) = d_n(x_{\sigma_1},\ldots,x_{\sigma_{n+1}})$ pour tout $\sigma_i \in \{1,\ldots,n+1\}$, $1 \leq i \leq n$, $\forall(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in E^{n+1}$.

(v) $d_n(x_1,\ldots,x_n) \leq d_n(y,\ldots,x_{n+1}) + d_n(x_1,y,\ldots,x_{n+1}) + \ldots + d_n(x_1,\ldots,y)$, $\forall(y,x_1,\ldots,x_{n+1}) \in E^{n+2}$.

Exemple 2.3. Pour $n = 2$, l'application

$$\begin{array}{rccl} d_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & d(x,y,z) = \min\{|x-y|,|y-z|,|z-x|\} \end{array}$$

est une 2-distance sur $\mathbb{R}$.

Le lien entre la n-norme et la n-distance est donné par le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Soit $(E,\|.,...,.\|)$ un espace vectoriel n-normé. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} d_n : & E^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,\ldots,x_{n+1}) & \longmapsto & d_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \|x_1 - x_{n+1},...,x_n - x_{n+1}\| \end{array} \tag{2.7}$$

définit une n-distance sur E.

Preuve Puisque l'axiome (i) de la n-norme est triviale, nous montrons les axiomes $(ii)\,,(iii)\,,(iv)$ et $(v)\,.$

(ii) Soit $x_1,x_2 \in E(x_1 \neq x_2)$, alors il existe $x_3,\ldots,x_{n+1} \in E$, tel que les éléments $x_1 - x_{n+1},...,x_n - x_{n+1}$ sont linéarements indépentes. Donc $d_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) \neq 0$.

(iii) Soit $x_i,x_j \in E$, et $x_i = x_j$ tel que $(1 \leq i,j \leq n+1, i \neq j)$, alors les vecteurs de famille $\{x_1 - x_{n+1},\ldots,x_n - x_{n+1}\}$ sont linéarements dépentes. Donc, $d_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) = 0$.

(iv) Comme $\|.,...,.\|$ est une n-norme, alors $d_n(x_1,\ldots,x_{n+1}) = d_n(x_{\sigma_1},\ldots,x_{\sigma_{n+1}})$ pour tout $\sigma_i \in \{1,\ldots,n+1\}$, $1 \leq i \leq n+1$, $\forall(x_1,\ldots,x_n) \in X^{n+1}$.

(v) Soit $a,x_1,\dots,x_{n+1} \in E$. On a

$$\begin{aligned} d_n(x_1,\dots,x_{n+1}) &= \|x_1 - x_{n+1},\ldots,x_n - x_{n+1}\| \\ &= \|x_1 + a - a - x_{n+1},\ldots,x_n + a - a - x_{n+1}\| \\ &\leq d_n(a,\dots,x_{n+1}) + d_n(x_1,a,\dots,x_{n+1}) + \dots + d_n(x_1,\dots,a) \end{aligned}$$ □

Définition 2.5. L'espace (E,d_n) est appelé l'espace n-métrique canoniquent associée à $(E,\|.,\ldots,.\|)$.

Remarque 2.3. Le théorème précédent montre que à toute n-norme sur E on peut associé une n-distance définie par (2.7).

Comme conséquence du théorème précédent on a le résultat suivant.

Corollaire 2.5. *Tout espace n-normé est n-métrique.*

Définition 2.6. Deux n-normes $\|.,\ldots,.\|_1$ et $\|.,\ldots,.\|_2$ sur espace vectoriel E avec de dimension $dimE \geq n$ sont équivalents si et seulement s'il existe deux canstantes réelles positives α et β et $(\alpha < \beta)$ telles que

$$\alpha\|x_1,\ldots,x_n\|_1 \leq \|x_1,\ldots,x_n\|_2 \leq \beta\|x_1,\ldots,x_n\|_1, \forall(x_1,\ldots,x_n) \in E^n.$$

2.1.3 Relation d'inclusion

Dans la suite, nous allons étudier la relation d'inclusion entre les espaces vectoriels n-normés.

Plus précésent, nous allons montrer que tout espace n-normé avec $n \geq 2$ est un espace $(n-1)$-normé et donc, par récurrence, un espace $(n-k)$-normé pour tout $k = 1,\ldots,n-1$.

Théorème 2.6. *[5] Soient $(E;\|.,\ldots,.\|)$ un espace n-normé de dimension $dimE \geq n \geq 2$ et $\{a_1,\ldots,a_n\}$ une famille de vecteurs linéairement indépendants dans E. L'application suivant*

$$\begin{aligned} \|.,\ldots,.\|_\infty : E^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_{n-1}) &\longmapsto \|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_\infty = max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{\|x_1,\ldots,x_{n-1},a_i\|\} \end{aligned}$$

est une (n-1)-norme sur E.

Preuve

Montrons que $\|\cdot,...,\cdot\|_\infty$ vérifie les cinq propriétés $(i)-(v)$ d'une n-norme.

1. C'st claire que $\|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty \geq 0$, $\forall x_1,...,x_{n-1} \in E$, car $\|,...,.\|$ est une n-norme.
2. Si $x_1,...,x_{n-1}$ sont linéairement dépendants, alors $\|x_1,...,x_{n-1},a_i\| = 0$ pour chaque $i = 1,...,n$, et donc $\|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty = 0$. Inversement, si $\|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty = 0$, alors $\|x_1,...,x_{n-1},a_i\| = 0$ et par conséquent $x_1,...,x_{n-1},a_i$ sont linéairement dépendants pour chaque $i = 1,...,n$. Mais ceci ne peut se produire que lorsque $x_1,...,x_{n-1}$ sont linéairement dépendants.
3. Comme $\|x_1,...,x_{n-1},a_i\|$ est invariant sous toute permutation de $\{x_1,...,x_{n-1}\}$, on trouver que $\|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty$ est aussi invariant sous toute permutation.
4. On a
$$\begin{aligned}\|x_1,\dots,x_{n-2},\alpha x_{n-1}\|_\infty &= \max\{\|x_1,\dots,x_{n-2},\alpha x_{n-1},a_i\| : i=1,\dots,n\}\\ &= |\alpha|\max\{\|x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1},a_i\| : i=1,\dots,n\}\\ &= |\alpha|\,\|x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1}\|_\infty .\end{aligned}$$
5. On a
$$\begin{aligned}\|x_1,\dots,x_{n-2},y+z\|_\infty &= \max\{\|x_1,\dots,x_{n-2},y+z,a_i\| : i=1,\dots,n\}\\ &\leq \max\{\|x_1,\dots,x_{n-2},y,a_i\| : i=1,\dots,n\}\\ &\quad + \max\{\|x_1,\dots,x_{n-2},z,a_i\| : i=1,\dots,n\}\\ &= \|x_1,\dots,x_{n-2},y\|_\infty + \|x_1,\dots,x_{n-2},z\|_\infty\end{aligned}$$

Donc $\|.,...,.\|_\infty$ définit une (n−1)-norme sur E. □

Corollaire 2.7. *Tout espace n-normé est un espace (n−k)-normé pour tout $k = 1,...,n-1$. En particulaire, pour $k = n-1$, tout espace n-normé est un espace normé(voir remarque.2.1).*

Théorème 2.8. *[5] Soit $1 \leq p < +\infty$. L'application*
$$\begin{aligned} E^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x_1,\dots,x_{n-1}) &\longmapsto \|x_1,...,x_{n-1}\|_p = (\sum_{i=1}^{n} \|x_1,...,x_{n-1},a_i\|^p)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$
définit aussi une (n−1)-norme sur E.

Preuve D'après le théorème.2.6, il suffait de montrer que $\|.,...,.\|_p$ est équivalant à $\|.,...,.\|_\infty$

Soit $(x_1,\ldots,x_{n-1}) \in E^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty &\leq (\sum_{i=1}^{n} \|x_1,...,x_{n-1},a_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|x_1,...,x_{n-1}\|_p. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|x_1,...,x_{n-1}\|_p &\leq (\sum_{i=1}^{n} \|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq n^{\frac{1}{p}} \|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty. \end{aligned}$$ □

Rappelons qu'une famille de vecteurs $\{e_1,\ldots,e_n\}$ d'un espace vectoriel $(E,\langle .,. \rangle)$ est dite orthogonale si $\langle e_i,e_j \rangle = 0$, pour $1 \leq i,j \leq n$ et $i \neq j$.

Si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est une famille orthogonale dans E, on peut montrer en appliquant le théorème précédent que l'application

$$\begin{aligned} E^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_{n-1}) &\longmapsto \|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty = max_{i\in\{1,...,n\}} \|x_1,...,x_{n-1},e_i\|_s \end{aligned}$$

est une (n-1)-norme sur E. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 2.9. *[5] Sur un espace n-normé standard E, la (n−1)-norme $\|.,...,.\|_\infty$, définie par rapport à $\{e_1,...,e_n\}$, est équivalente à la (n−1)-norme standard $\|.,...,.\|_s$, i.e.,*

$$\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_\infty \leq \|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_s \leq \sqrt{n}\,\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_\infty$$

pour tout $x_1,\ldots,x_{n-1} \in E$.

Preuve

Supposons que $x_1,\ldots,x_{n-1}$ sont linéairement indépendants. Pour chaque $i = 1,...,n$, écrire $e_i = e_i^\circ + e_i^\perp$ où $e_i^\circ \in vect\{x_1,...,x_{n-1}\}$ et $e_i^\perp \in vect^\perp\{x_1,...,x_{n-1}\}$. Ensuite nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_1,\ldots,x_{n-1},e_i\|_s &= \left\|x_1,\ldots,x_{n-1},e_i^\perp\right\|_s \\
&= \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_{n-1}\rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_{n-1},x_1\rangle & \cdots & \langle x_{n-1},x_{n-1}\rangle & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left\langle e_i^\perp,e_i^\perp\right\rangle \end{vmatrix} \\
&\leq \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_{n-1}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_{n-1},x_1\rangle & \cdots & \langle x_{n-1},x_{n-1}\rangle \end{vmatrix} \\
&= \|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_s .
\end{aligned}$$

On obtient donc $\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_\infty \leq \|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_s$

Ensuite, prenons un vecteur unitaire $e=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_1$ tel que $e\in vect^\perp\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$. (Ici on suppose toujours que $x_1,\ldots,x_{n-1}$ sont linéairement indépendants). Alors, par propriétés (iv) et (v) de la n-norme, on a

$$\begin{aligned}
\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_s &= \|x_1,\ldots,x_{n-1},e\|_s \\
&\leq |\alpha_1|\,\|x_1,\ldots,x_{n-1},e_1\|_s+\cdots+|\alpha_n|\,\|x_1,\ldots,x_{n-1},e_n\|_s \\
&\leq (|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|)\,\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_\infty
\end{aligned}$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\sum_{i=1}^n|\alpha_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n|\alpha_i|^2\right)^{1/2}=\sqrt{n}.$$

On obtient donc

$$\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_s \leq \sqrt{n}\,\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_\infty ,$$

et cela complète la preuve. □

La convergence dans les espaces vectoriels n-normés est donné par la définition suivante.

Définition 2.7. [5] On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel n-normé $(E,\|.,\ldots,.\|)$ converge vers un élément $x\in E$ pour la n-norme $\|.,\ldots,.\|$, si

$$\lim_{k\to\infty}\|x_1,\ldots,x_{n-1},x_k-x\|=0,\ \forall x_1,\ldots,x_{n-1}\in E.$$

La proposition suivante montre que la convergence pour la n-norme $\|.,...,.\|$ implique la convergence pour la (n-1)-norme définie par rapport à une famille linéarement indépendente arbitraire $\{a_1, \ldots ,a_n\}$ dans E.

Proposition 2.10. *[5] Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace vectoriel n-normé $(E,\|.,...,.\|)$. Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $x \in E$ pour la n-norme $\|.,...,.\|$, alors elle converge vers x pour la (n-1)-norme $\|.,...,.\|_\infty$, i.e.,*

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1,...,x_{n-2},x_k - x\|_\infty = 0,\ \forall x_1,...,x_{n-2} \in E.$$

Preuve

Soient $\{a_1, \ldots ,a_n\}$ une famille linéarement indépendente arbitraire dans E et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'un E.

Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la n-norme $\|.,...,.\|$, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1,...,x_{n-2},x_k - x,a_i\| = 0\ \ ,\forall x_1,...,x_{n-2} \in E \text{ et }\ ,\forall i \in \{1,...,n\}.$$

Donc,

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1,...,x_{n-2},x_k - x\|_\infty = 0\ \ ,\forall x_1,...,x_{n-2} \in E. \qquad \square$$

Dans le cas où E est un espace n-normé standard l'inverse de la proposition.2.10 est aussi vrai. De plus, on a :

Proposition 2.11. *[5] Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace n-normé standard $(E,\|.,...,.\|_s)$ est convergente pour la n-norme standard $\|.,...,.\|_s$ si et seulement si elle est convergente pour la (n−1)-norme $\|.,...,.\|_\infty$.*

Preuve

Supposons que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un $x \in E$ pour la(n−1)-norme $\|.,...,.\|_\infty$. Montrons que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers x pour la n-norme. Soit $x_1,...,x_{n-1} \in E$. Alors on a

$$\|x_1, \ldots , x_{n-2}, x_{n-1}, x(k) - x\|_s \leq \sqrt{n}\, \|x_1, \ldots , x_{n-2}, x(k) - x\|_\infty \|x_{n-1}\|_s\, .$$

Or $\lim_{k\to\infty} \|x_1,...,x_{n-2},x_k - x\|_\infty = 0$, et donc nous concluons que

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1,...,x_{n-1},x_k - x\|_s = 0.$$

Corollaire 2.12. *Une suite dans un espace n-normé standard est convergente pour la n-norme si et seulement si elle est convergente pour la (n−1)-norme standard, et par récurrence, pour la (n−k)-norme standard pour tout*

Corollaire 2.13. *Une suite d'un espace n-normé standard est convergente pour la n-norme si et seulement si elle est convergente pour la norme usuale* $\|.\| := \langle .,. \rangle^{\frac{1}{2}}$

2.1.4 Complétude

Le présent paragraphe est consacré à la complétude d'un espace vectoriel n-normé.

Définition 2.8. [5] Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectorirl n-normé $(E, \|.,...,.\|)$ est dite suite de Cauchy si

$$\lim_{p,q\to\infty} \|x_1, \dots, x_{n-1}, x_p - x_q\| = 0,$$

pour tout $x_1,...,x_{n-1} \in E$.

Rappelons aussi(voir définition.2.7.) qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectorirl n-normé $(E, \|.,...,.\|)$ est convergente pour la n-norme $\|.,...,.\|$, si

$$\lim_{k\to\infty} \|x_1,...,x_{n-1},x_k - x\| = 0, \ \forall x_1,...,x_{n-1} \in E.$$

Définition 2.9. [5] Un espace vectoriel n-normé $(E, \|.,...,.\|)$ est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente pour la n-norme $\|.,...,.\|$.

Un tel espace est dit espace n-Banach

Un des résultats principaux de ce paragraphe est donné par la propsition suivante.

Proposition 2.14. *[5] Un espace n-normé standard est complet si et seulement s'il est complet par rapport la norme usuelle* $\|.\| := \langle .,. \rangle^{1/2}$.

Preuve Elle découle de la Proposition.2.11, le Corollaire.2.12 et le Corollaire.2.13. □

Corollaire 2.15. *Tout espace de n-Banach standard est de Banach par rapport à la norme usuelle* $\|\cdot\| = \langle \cdot,\cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$.

2.2 Espaces vectoriels n-préhilbertiens

2.2.1 n-Produit scalaire

Le n-produit scalaire est une généralisation de la notion classique du produit scalaire. Dans ce paragraphe nous allons donner la définition du n-produit scalaire et certaines de leurs propriétés élémentaires.

Définition 2.10. [4] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel de dimension $dimE \geq n$. On appelle n-produit scalaire sur E toute application notée par

$$\begin{array}{rccc} \langle ., \ldots, .|.,. \rangle : & E^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z) & \longmapsto & \langle x_1, \ldots, x_{n-1} | y, z \rangle \end{array}$$

et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\langle x_1,...,x_{n-1}|x_n,x_n\rangle \geq 0$, $\forall (x_1,...,x_n) \in E^n$.

(ii) $\langle x_1,...,x_{n-1}|x_n,x_n\rangle = 0$ si et seulement si $x_1,...,x_n$ sont linéairement dépendants.

(iii) $\langle x_1,...,x_{n-1}|y,z\rangle = \langle x_1,...,x_{n-1}|z,y\rangle$, $\forall (x_1,...,x_{n-1},y,z) \in E^{n+1}$.

(iv) $\langle x_1,...,x_{n-1}|x_n,x_n\rangle = \langle x_{\sigma_1},...,x_{\sigma_{n-1}}|x_{\sigma_n},x_{\sigma_n}\rangle$ pour toute permutation $\sigma_i \in \{1,...,n\}$, $1 \leq i \leq n$, $\forall (x_1,...,x_n) \in E^n$.

(v) $\langle x_1,...,x_{n-1}|\alpha y,z\rangle = \alpha\langle x_1,...,x_{n-1}|y,z\rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (x_1,...,x_{n-1},y,z) \in E^{n+1}$.

(vi) $\langle x_1,...,x_{n-1}|y,z+z'\rangle = \langle x_1,...,x_{n-1}|y,z\rangle + \langle x_1,...,x_{n-1}|y,z'\rangle$, $\forall (x_1,...,x_{n-1},y,z,z') \in E^{n+2}$.

Le couple $(E,\langle .,...,.|.,.\rangle)$ est appelé un espace n-préhilbertien.

Remarque 2.4. Si $n = 1$, la définition.2.10 coïncide avec la définition ordinaire du produit scalaire.

Exemple 2.4. Pour $n = 2$, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de le 2-produit scalaire

$$\begin{aligned}\langle x \mid y, z\rangle &= \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, z\rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{2} x_i^2 & \sum_{i=1}^{2} x_i z_i \\ \sum_{i=1}^{2} y_i x_i & \sum_{i=1}^{2} y_i z_i \end{vmatrix} \\ &= (\sum_{i=1}^{2} x_i^2)(\sum_{i=1}^{2} y_i z_i) - (\sum_{i=1}^{2} x_i z_i)(\sum_{i=1}^{2} y_i x_i)\end{aligned}$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$, est un espace vectoriel 2-préhilbertien.

En général, pour $n \geq 2$ l'espace $\mathbb{R}^n$ forme un espace vectoriel n-préhilbertien muni du n-produit scalaire

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, z\rangle := \begin{vmatrix} \langle y, z\rangle & \langle y, x_1\rangle & \cdots & \langle y, x_{n-1}\rangle \\ \langle x_1, z\rangle & \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_1, x_{n-1}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_{n-1}, z\rangle & \langle x_{n-1}, x_1\rangle & \cdots & \langle x_{n-1}, x_{n-1}\rangle \end{vmatrix},$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

2.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans ce paragraphe nous allons montrer quelques résultats liées à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En effet, le résultat suivant est une extension de l'inégalité de Cauchy-Schwarz classique aux espaces n-préhilberties dans le cas où $(E,\langle .,. \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Théorème 2.16. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)[4]. Soit $(E,\langle .,. \rangle)$ un espace préhilbetien, alors pour tout $x_1,...,x_{n-1},x,y \in E$, on ait*

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid x, y\rangle^2 \leq \|x_1, \ldots, x_{n-1}, x\|^2 \, \|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\|^2 \tag{2.8}$$

et l'égalité est vraie si et seulement si $x_1,...,x_{n-1},x,y$ sont linéairement dépendants.

Preuve

Remarquons d'abord que l'inégalité peut être récrite comme

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y \rangle & \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, z \rangle \\ \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, y \rangle & \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, z \rangle \end{vmatrix} \geq 0,$$

ce qui est évidemment vrai puisque la matrice est semi-définie positive.

Supposons ensuite que l'on ait l'égalité

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y \rangle & \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, z \rangle \\ \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, y \rangle & \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, z \rangle \end{vmatrix} = 0.$$

Si $\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y \rangle = 0$ou $\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, z \rangle$ $\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, z \rangle = 0$, alors x_1,...,x_{n-1},y,z sont linéaires dépendant. Sinon, il existe un $\beta \neq 0$ tel que

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, z \rangle = \beta \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y \rangle \,,$$

et

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, z \rangle = \beta \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, y \rangle \,.$$

Par conséquent

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, \beta y - z \rangle = 0 \text{ et } \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, \beta y - z \rangle = 0,$$

et donc

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid \beta y - z, \beta y - z \rangle = 0.$$

Mais cela implique que $x_1, \ldots, x_{n-1}$,z, $\beta y - z$ sont linéairement dépendants, de même que $x_1, \ldots, x_{n-1}$,y,z.

Inversement, supposons que $x_1, \ldots, x_{n-1}$,y,z sont linéairement dépendants. Si $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont linéairement dépendante, alors le membre de droite de 2.8 est égal à zéro, de même que le membre de gauche côté. Supposons donc que $x_1, \ldots, x_{n-1}$,y,z sont linéairement indépendants.Puisque l'équation

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \beta y + \gamma z = 0$$

a une solution non triviale, nous devons avoir β ou $\gamma \neq 0$.Sans perte de généralité, supposons que $\gamma \neq 0$ de sorte que

$$t = a_1 x_1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + bz$$

pour certains scalaires $a_1, \cdots, a_{n-1}, b \in \mathbb{R}$. De sa défnition, on a $\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y_k \rangle = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, x_k \rangle$ pour chaque $k = 1,...,n-1$. D'où

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, z \rangle = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, by \rangle = b \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y \rangle$$

et

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, z \rangle = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid by, by \rangle = b^2 \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y \rangle ,$$

et donc l'égalité suit. □

Le résultat suivant affirme que l'inéglité de Cauchy-Schwarz 2.8 est vraie dans n'importe quel espace vecoriel n-préhilbertien, i,e., elle reste vraie que l'espace E soit préhilbrtien ou non.

Théorème 2.17. *[4] Soit E un espce vectoriel de dimension $dimE \geq n$ et $(E, \langle .,...,. | .,. \rangle)$ un espace vectoriel n-préhilbertien. Pour tout $x_1,...,x_{n-1},y,z \in E$, on a*

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, z \rangle^2 \leq \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y \rangle \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, z \rangle ,$$

et l'égalité est vraie si et seulement si $x_1,...,x_{n-1},y,z$ sont linéairement dépendants.

Preuve La preuve est analogue à celle du théorème.2.16. La seule différence est quand nous devons prouver que, si $x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z$ sont linéairement dépendants, alors l'égalité est vérifiée. Notons ici que, pour chaque $k = 1,...,n-1$, on a $\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid x_k, x_k \rangle = 0$ et par conséquence,

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, x_k \rangle^2 \leq \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y \rangle \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid x_k, x_k \rangle = 0,$$

ce qui implique que $\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, x_k \rangle = 0$. Il en est de même lorsque y est remplacé par z. Ainsi, si $t = a_1 x_1 + ... + a_{n-1} x_{n-1} + by$ pour certains $a_1, ... + a_{n-1}, b \in \mathbb{R}$, puis

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, z \rangle = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, by \rangle + \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y \rangle$$

et

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid z, z\rangle = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid by, by\rangle + b^2 \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, y\rangle,$$

et donc l'égalité s'ensuit. $\square$

Corollaire 2.18. *Soit $(E, \langle ., \ldots, . \mid ., .\rangle)$ un espace n-préhilbertien, alors l'application*

$$\|x_1,\ldots,x_n\| := \langle x_1,\ldots,x_{n-1}|x_n,x_n\rangle^{1/2}$$

définit une n-norme sur E.

Preuve Les asserations (i)-(iv) de la n-norme sont faciles à démontrer. Il reste à prouver l'**assertion** (v) . On suppose que $x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z \in E$, en appliquent le théorème.2.17 et linéarité du n-produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}
\|x_1,\ldots,x_{n-1},y+z\|^2 &= \langle x_1,\ldots,x_{n-1}|y+z,y+z\rangle \\
&= \langle x_1,\ldots,x_{n-1}|y,y\rangle + \langle x_1,\ldots,x_{n-1}|z,z\rangle + 2\langle x_1,\ldots,x_{n-1}|y,z\rangle \\
&= \|x_1,\ldots,x_{n-1},y\|^2 + \|x_1,\ldots,x_{n-1},z\|^2 + 2\langle x_1,\ldots,x_{n-1}|y,z\rangle \\
&\leq \|x_1,\ldots,x_{n-1},y\|^2 + \|x_1,\ldots,x_{n-1},z\|^2 + 2\|x_1,\ldots,x_{n-1},y\|.\|x_1,\ldots,x_{n-1},z\| \\
&= (\|x_1,\ldots,x_{n-1},y\| + \|x_1,\ldots,x_{n-1},z\|)^2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|x_1,\ldots,x_{n-1},y+z\| \leq \|x_1,\ldots,x_{n-1},y\| + \|x_1,\ldots,x_{n-1},z\|$$

. $\square$

Corollaire 2.19. *Soit $(E, \langle ., \ldots, . \mid ., .\rangle)$ un espace n-préhilbertien. Si $x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z$ sont linéairement indépendants sur E, alors*

$$\|x_1,\ldots,x_{n-1},y \pm z\| = \|x_1,\ldots,x_{n-1},y\| + \|x_1,\ldots,x_{n-1},z\| \tag{2.9}$$

Inversement si (2.9) est vérifie, alors $x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z$ sont linéaire indépendants sur E.

Preuve Supposons que $x_1, \ldots, x_{n-1}, y, z$ sont linéairement dépendants sur E. Posons $z = a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + by$ pour certains $a_1,\ldots,a_{n-1},b \in \mathbb{R}$. Si $b > 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|x_1, \ldots, x_{n-1}, y + z\| &= \|x_1, \ldots, x_{n-1}, (1 + b)y\| \\
&= (1 + b)\,\|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\| \\
&= \|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \ldots, x_{n-1}, by\| \\
&= \|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \ldots, x_{n-1}, z\|
\end{aligned}$$

Si $b < 0$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|x_1, \ldots, x_{n-1}, y - z\| &= \|x_1, \ldots, x_{n-1}, (1-b)y\| \\
&= (1-b)\|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\| \\
&= \|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \ldots, x_{n-1}, by\| \\
&= \|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \ldots, x_{n-1}, z\|.
\end{aligned}$$

Donc l'une des deux égalités doit être vérifiée.

Inversement, sans perte de généralité, supposons que l'égalité

$$\|x_1, \ldots, x_{n-1}, y + z\| = \|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \ldots, x_{n-1}, z\|$$

est vérifiée. Avec carré les deux côtés, on obtient

$$\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \mid y, z\rangle = \|x_1, \ldots, x_{n-1}, y\| \, \|x_1, \ldots, x_{n-1}, z\|$$

D'après le théorème précédent $x_1, \ldots, x_{n-1}, y$,z doit être linéairement dépendant. □

Définition 2.11. [4] On appelle espace de n-Hilbert ou espace n-hilbertien, tout espace vectoriel n-préhilbertien complet.

Chapitre 3

Application

3.1 Opérateurs n-linéaires, n-countinues et n-bornés

Le paragraphe suivant est une petite introduction à la théorie des opérateurs au sein des espaces vectoriels n-normés, dont nous avons besoin dans les applications que nous aborderons à la fin de ce mémoire.

Dans tout ce paragraphe, $(E, \|\cdot,...,\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel n-normé et $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 3.1. [7] Soit $(E,\|.,...,.\|)$ un espace vectoriel n-normé et $(F,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Un opérateur

$$\begin{array}{rcl} T \quad : E^n & \longrightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & T(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

est dit n-linéaire s'il est linéaire par rapport à chacun des variables $x_1, \dots, x_n$ i,e., $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x_1, \dots, x_n, y \in E$

$$T\left(x_1,...,\alpha x_i + y,...,x_n\right) = \alpha T\left(x_1,...,x_i,...,x_n\right) + T\left(x_1,...,y,...,x_n\right), 1 \leq i \leq n.$$

Définition 3.2. [7] Soit $(E,\|.,...,.\|)$ un espace vectoriel n-normé et $(F,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Un opérateur n-linéaire

$$\begin{array}{rcl} T \quad : E^n & \longrightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & T(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

est dit borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$

$$\|T(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C\,\|x_1, \ldots, x_n\|$$

Notation.

Si T est borné, on pose

$$\|T\| := \sup_{\|x_1,\ldots,x_n\| \neq 0} \frac{\|T(x_1, \ldots, x_n)\|}{\|x_1, \ldots, x_n\|} \tag{3.1}$$

Proposition 3.1. *[7] Soit $(E,\|.,\ldots,.\|)$ un espace vectoriel n-normé et $(F,\|.\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $T : E^n \to F$ un opérateur n-linéaire borné sur E. Alors, on a*

$$\begin{aligned}\|T\| &= \inf\left\{C : \|T(x_1, \ldots, x_n)| \leq C\,\|x_1, \ldots, x_n\|, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in E^n\right\}\\ &= \sup_{\|x_1,\ldots,x_n\| \leq 1} \|T(x_1, \ldots, x_n)\,\|\end{aligned}$$

Preuve

Soit $K = \{C : \|T(x_1, \ldots, x_n)\,\| \leq C\,\|x_1, \ldots, x_n\|\,, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in E^n\}$. C'est claire que $\|T\| \in K$ donc $\inf K \leq \|T\|$. Inversement, pour chaque $C \in K$, on a

$$\frac{\|T(x_1, \ldots, x_n)\|}{\|x_1, \ldots, x_n\|} \leq C$$

chaque fois que $\|x_1, \ldots, x_n\| \neq 0$, de sorte que $\|T\| \leq C$. Mais puisque ceci est vrai pour tout $C \in K$, on obtient $\|T\| \leq \inf K$. Donc $\|T\| = \inf K$. Ensuite, si $\|x_1, \ldots, x_n\| \leq 1$ alors

$$\|T(x_1, \ldots, x_n)\,\| \leq \|T\|\,\|x_1, \ldots, x_n\| \leq \|T\|.$$

Cela implique que

$$\sup_{\|x_1,\ldots,x_n\| \leq 1} \|T(x_1, \ldots, x_n)\,\| \leq \|T\|.$$

A l'inverse, on a

$$\|T\| = \sup_{\|x_1,\ldots,x_n\| = 1} \|T(x_1, \ldots, x_n)\,\| \leq \sup_{\|x_1,\ldots,x_n\| \leq 1} \|T(x_1, \ldots, x_n)\,\|.$$

Donc

$$\|T\| = \sup_{\|x_1,\ldots,x_n\| \leq 1} \|T(x_1, \ldots, x_n)\,\|.$$

Exemple 3.1.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la n-norme euclidienne. Compte tenu du base canonique $\{e_1,...,e_n\}$, définissons $T : E \to \mathbb{R}$ par $T(x_1,...,x_n) = det(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, où $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$, pour $i = 1,...,n$ et $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$. Alors T est borné et $\|T\| = 1$.

Proposition 3.2. *[7] Soit $(E,\|.,...,.\|)$ un espace vectoriel n-normé et $(F,\|.\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $T : E^n \to F$ un opérateur n-linéaire sur E. Alors T est borné si et seulement si pout tout $(x_1,\ldots,x_n)$,$(y_1,\ldots,y_n) \in E^n$, il existe $C > 0$ tel que,*

$$\begin{aligned} \|T(x_1,x_2,\ldots,x_n) - T(y_1,y_2,\ldots,y_n)\| \leq & C\,(\|x_1 - y_1, x_2,\ldots,x_n\| + \|y_1, x_2 - y_2,\ldots,x_n\| \\ & + \ldots + \|y_1,y_2,\ldots,x_{n-1} - y_{n-1}, x_n\| \\ & + \|y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},x_n - y_n\|) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Preuve

Supposons que (3.2) soit vérifié. Prenons $(y_1,\ldots,y_n) = (0,\ldots,0)$, alors le résultat suit.

Inversement si T est borné, alors en utilisant la n-linéarité et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} &\|T(x_1,\ldots,x_n) - T(y_1,\ldots,y_n)\| \\ &= \|T(x_1 - y_1, x_2,\ldots,x_n) + T(y_1, x_2 - y_2,\ldots,x_n) + \ldots + T(y_1,y_2,\ldots,x_n - y_n)\| \\ &\leq \|T(x_1 - y_1, x_2,\ldots,x_n)\| + \|T(y_1, x_2 - y_2,\ldots,x_n)\| + \ldots + \|T(y_1,y_2,\ldots,x_n - y_n)\| \\ &\leq C\,(\|x_1 - y_1, x_2,\ldots,x_n\| + \|y_1, x_2 - y_2,\ldots,x_n\| + \ldots + \|y_1,y_2,\ldots,x_n - y_n\|)\,. \end{aligned}$$

D'où le résultat.. $\square$

Proposition 3.3. *[7] Soit $(E,\|.,...,.\|)$ un espace vectoriel n-normé et $(F,\|.\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $T : E^n \to F$ un opérateur n-linéaire borné sur E. Alors*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{C : \|T(x_1,\ldots,x_n)\| \leq C\,\|x_1,\ldots,x_n\|\,, (x_1,\ldots,x_n) \in E^n\} \\ &= \sup_{\|x_1,\ldots,x_n\|\leq 1} \|T(x_1,\ldots,x_n)\| \\ &= \inf\{C : (3.2)\ \text{ est vérifiée }\} \end{aligned}$$

Définition 3.3. [7] Soit $(E,\|.,...,.\|)$ un espace vectoriel n-normé et $(F,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Un opérateur n-linéaire $T : E^n \to F$ est dit continu au point $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \|T(x_1,...,x_n) - T(y_1,...,y_n)\| < \varepsilon,$$

lorsque

$$\|x_1 - y_1, x_2, ..., x_n\| < \delta, ..., \|y_1, y_2, ..., x_{n-1} - y_{n-1}, x_n\| < \delta \text{ et } \|y_1, y_2, ..., y_{n-1}, x_n - y_n\| < \delta,$$

ou

$$\|x_1 - y_1, y_2, ..., y_n\| < \delta, ..., \|x_1, x_2, ..., x_{n-1} - y_{n-1}, y_n\| < \delta \text{ et } \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n - y_n\| < \delta,$$

où $(y_1, ..., y_n) \in E^n$.

T est continu sur E^n s'il est continu en tout point $(x_1, ..., x_n) \in E^n$.

Théorème 3.4. *[7] Soit $T : E^n \to F$ un opérateur n-linéaire. Les propositions suivantes sont équivalents :*

1. *T est continue.*
2. *T est continue au $(0, \ldots, 0) \in E^n$.*
3. *T est borné.*

Preuve

1\. $\Rightarrow$ 2. est trivial.

2\. $\Rightarrow$ 3. Supposons que T soit continue en $(0, \ldots, 0) \in E^n$. Alors par définition, il existe $\delta > 0$ tel que $\|T(u_1, \ldots, u_n)\| < 1$ si $(u_1, \ldots, u_n) < \delta$. Maintenant, laisse $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Considérons d'abord le cas où $\|x_1, \ldots, x_n\| = 0$. Par la continuité en $(0, \ldots, 0) \in E^n$), notons qu'il existe $\delta_k > 0$ tel que $\|T(x_1, \ldots, x_n)\| < \dfrac{1}{k}$ chaque fois que $\|x_1, \ldots, x_n\| < \delta_k$. Alors puisque $\|x_1, \ldots, x_n\| = 0 < \delta_k$, on a $\|Tt(x_1, \ldots, x_n)\| = 0$, soit $T \equiv 0$. Ensuite, si $\|x_1, \ldots, x_n\| \neq 0$, alors soit $u_i = (\frac{\delta}{4\|x_1, ..., x_n\|})^{1/n} x_i$, pour $i = 1, ..., n$. Notez que $\|u_1, \ldots, u_n\| = \delta/4 < \delta$. Puis

$$\|T(u_1, \ldots, u_n)\| = \frac{\delta}{4\|x_1, \ldots, x_n\|} \|T(x_1, \ldots, x_n)\|$$

Donc

$$\|T(x_1, \ldots, x_n)\| = \frac{4}{\delta} \|x_1, \ldots, x_n\| \|T(u_1, \ldots, u_n)\| \leq \frac{4}{\delta} \|x_1, \ldots, x_n\|$$

Donc T est borné.

3. $\Rightarrow$ 1. Puisque T est borné, par la proposition 3.2.

$$\|T(x_1,\ldots,x_n)-T(y_1,\ldots,y_n)\|\leq\|T\|\left(\|x_1-y_1,x_2\ldots,x_n\|+\|y_1,x_2-y_2,\ldots,x_n\|+\ldots+\|y_1,y_2,\ldots,x_n-y_n\|\right) \tag{3.3}$$

Soit $\varepsilon>0$. Soit $\delta=\frac{\varepsilon}{1+n\|T\|}$. Si chacun des termes entre parenthèses sur le second membre de (3.3) est inférieur à δ, alors $\|T(x_1,\ldots,x_n)-T(y_1,\ldots,y_n)\|<\varepsilon$, montrant que T est continue. □

Désignons par $\mathcal{L}(E^n,F)$ l'ensemble de tous les opérateurs n-linéaires bornés de E^n dans F. On a le résultat suivant.

Théorème 3.5. *[7] L'application $\|\cdot\|$ donnée par la formule (3.1) définit une norme et l'ensemble $\mathcal{L}(E^n,F)$ muni de cette norme forme un espace vectoriel normé.*

Preuve Il faut montrer que $\|.\|$ défini dans (3.1) est une norme.

Il est claire de la définition de $\|.\|$ que $\|\alpha T\|=|\alpha|\|T\|$. Aussi,

$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\| &\leq \sup_{\|x_1,\ldots,x_n\|\neq 0}\frac{\|T_1(x_1,\ldots,x_n)\|+\|T_2(x_1,\ldots,x_n)\|}{\|x_1,\ldots,x_n\|}\\ &\leq \sup_{\|x_1,\ldots,x_n\|\neq 0}\frac{\|T_1(x_1,\ldots,x_n)\|}{\|x_1,\ldots,x_n\|}+\sup_{\|x_1,\ldots,x_n\|\neq 0}\frac{\|T_2(x_1,\ldots,x_n)\|}{\|x_1,\ldots,x_n\|}\\ &= \|T_1\|+\|T_2\|\end{aligned}$$

Enfin, $\|T\|=0$ implique $T(x_1,\ldots,x_n)=0$ si $\|x_1,\ldots,x_n\|=0$. Si $\|x_1,\ldots,x_n\|=0$, puis $x_1,\ldots,x_n$ sont linéairement dépendants, donc $T(x_1,\ldots,x_n)=0$ par le constat suivant la proposition 3.2. Donc $T\equiv 0$. Donc, $\|.\|$ est une norme. □

Théorème 3.6. *[7] Si $(F,\|.\|)$ est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}(E^n,F),\|.\|)$ est un espace de Banach.*

Preuve

Soit $(T_k)_k$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E^n,F)$. Soit $\varepsilon>0$. Alors il existe $N>0$ tel que $\|T_p-T_q\|\leq\varepsilon/2$ pour tout $p,q>N$. Par définition, on a

$$\|T_p(x_1,\ldots,x_n)-T_q(x_1,\ldots,x_n)\|\leq\|T_p-T_q\|\,\|x_1,\ldots,x_n\| \tag{3.4}$$

Donc, pour $p, q > N$, on a

$$\|T_p(x_1,\ldots,x_n) - T_q(x_1,\ldots,x_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_1,\ldots,x_n\| \tag{3.5}$$

En utilisant (3.4), puisque $(T_k)_k$ est suite de Cauchy et F est un espace de Banach, on peut définir $T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x)$. Alors, il existe$M > N$ tel que

$$\|T_M(x_1,\ldots,x_n) - T(x_1,\ldots,x_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_1,\ldots,x_n\| \tag{3.6}$$

En utilisant (3.5) et (3.6), pour tout $k > M$,

$$\begin{aligned}\|T_k(x_1,\ldots,x_n) - T(x_1,\ldots,x_n)\| &\leq \|T_k(x_1,\ldots,x_n) - T_M(x_1,\ldots,x_n)\| \\ &\quad + \|T_M(x_1,\ldots,x_n) - T(x_1,\ldots,x_n)\| \\ &\leq \varepsilon\|x_1,\ldots,x_n\|\end{aligned}$$

Cela implique $\|T_k - T\| < \varepsilon$, i,e., $T_k \to T$ comme requis. Il est facile de vérifier que $T \in \mathcal{L}(E^n,F)$, donc l'énoncé est prouvé. □

Dans le cas où E et F sont deux espaces vectoriels n-normés, on a les notions et résulatats suivants.

Définition 3.4. [7] Soients $(E,\|.,\ldots,.\|_E)$ et $(F,\|.,\ldots,.\|_F)$ deux espaces n-normés. Un opérateur $T : (E,\|.,\ldots,.\|_E) \to (F,\|.,\ldots,.\|_F)$ est dit n-borné de type 1 si

$$\exists C > 0,\ \forall (x_1,\ldots,x_n) \in E^n,\ \ \|T(x_1),\ldots,T(x_n)\|_F < C\|x_1,\ldots,x_n\|_E\,.$$

Notation.

Ettant donné T un opérateur n-borné de type 1, on pose

$$\|T\| := \sup_{\|x_1,\ldots,x_n\|\neq 0} \frac{\|T(x_1),\ldots,T(x_n)\|_F}{\|x_1,\ldots,x_n\|_E}$$

Exemple 3.2. Soit $T : (E,\|.,\ldots,.\|_E) \to (F,\|.,\ldots,.\|_F)$ une dilatation, i,e.,

$$\begin{array}{rccc} T: & (E,\|\cdot,\ldots,\cdot\|_E) & \longrightarrow & (F,\|\cdot,\ldots,\cdot\|_F) \\ & x=(x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \lambda x=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) \end{array},\ \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

alors, en appliquant l'axiome (iv) de la n-norme, $\exists c > 0$ tel que

$$\|T(x_1),...,T(x_n)\|_F = \|\lambda x_1,...,\lambda x_n\|_F = |\lambda|^n \|x_1,...,x_n\|_F \leq c\,|\lambda|^n \|x_1,...,x_n\|_E\,,$$

ce qui entraîne qu'il existe $C = c\,|\lambda|^n > 0$ tel que

$$\|T(x_1),...,T(x_n)\|_F \leq C\,\|x_1,...,x_n\|_E\,.$$

D'où T est un opérateur n-borné de type 1.

Exemple 3.3. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions dérivables sur $[0,1]$ muni de la 2-norme définie par

$$\|f,g\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)\,g'(t) - g(t)\,f'(t)|\,,\ \forall f,g \in E.$$

Considérons l'opérateur T défini par

$$\begin{array}{cccc} T: & (E,\|\cdot,\cdot\|) & \longrightarrow & (E,\|\cdot,\cdot\|) \\ & f & \longmapsto & tf \end{array}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|T(f),T(g)\| &= \|tf(t),tg(t)\| = \sup_{t\in[0,1]} |tf(t)(g(t)+tg'(t)) - tg(t)(f(t)+tf'(t))| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left|tf(t)\,g(t) + t^2 f(t)\,g'(t) - tg(t)\,f(t) - t^2 g(t)\,f'(t)\right| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \left(t^2\,|f(t)\,g'(t) - g(t)\,f'(t)|\right) \\
&= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)\,g'(t) - g(t)\,f'(t)| \\
&= \|f,g\|\,.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que T est un opérateur 2-borné de type 1.

Définition 3.5. [7] Soit $T : (E,\|.,\ldots,.\|_E) \to (F,\|.,\ldots,.\|_F)$ un opérateur. On dit que T est n-continu de type 1 au point $x \in E$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall (x_1,...,x_n) \in E^n, \|T(x_1) - T(x), T(x_2) - T(x),...,T(x_n) - T(x)\|_F < \varepsilon,$$

lorsque

$$\|x_1 - x,,x_2 - x,...,x_n - x\|_E < \delta.$$

T est dit n-continu de type 1 sur E, s'il est n-continu de type 1 en tout point $x \in E$.

Théorème 3.7. *[7] Soit $T : (E,\|.,\ldots,.\|_E) \to (F,\|.,\ldots,.\|_F)$ un opérateur linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalents :*

1. *T est n-continue de type 1.*
2. *T est n-continue de type 1 en $0 \in E$.*
3. *T est n-borné de type 1.*

Preuve

1. $\Rightarrow$ 2. est trivial.

2. $\Rightarrow$ 3. : Supposons que T soit n-continue de type 1 au $0 \in E$. Alors par définition, il existe $\delta > 0$ tel que $\|T(u_1,\ldots,u_n)\|_F < 1$ si $\|u_1,\ldots,u_n\|_E < \delta$. Maintenant, soit $x_1,\ldots,x_n \in E$. Si $\|x_1,\ldots,x_n\|_E = 0$. Alors $x_1,\ldots,x_n$ sont linéairement dépendants. Par linéarité de T, $T(x_1),\ldots T(x_1)$ sont aussi linéairement dépendants, donc $\|T(x_1),\ldots T(x_1)\|_F = 0$. Ensuite, si $\|x_1,\ldots,x_n\|_E \neq 0$, alors soit $u_i = (\frac{\delta}{4\|x_1,\ldots,x_n\|_E})^{1/n} x_i$, pour $i = 1,...,n$. Notez que $\|u_1,\ldots,u_n\|_E = \delta/4 < \delta$. Puis

$$\|T(u_1,\ldots,u_n)\|_F = \frac{\delta}{4\|x_1,\ldots,x_n\|_E}\|T(x_1,\ldots,x_n)\|_F$$

Donc

$$\|T(x_1,\ldots,x_n)\|_F = \frac{4}{\delta}\|x_1,\ldots,x_n\|_E\|T(u_1,\ldots,u_n)\|_F \leq \frac{4}{\delta}\|x_1,\ldots,x_n\|_E$$

Donc T est n-borné de type 1.

3. $\Rightarrow$ 1. : Puisque T est n-borné de type 1,

$$\|T(x_1-x),\ldots,T(x_n-x)\|_F \leq \|T\|\,\|x_1-x,\ldots,x_n-x\|_E$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\|T\|}$, alors

$$\|T(x_1-x),\ldots,T(x_n-x)\|_F < \varepsilon,$$

pour $\|x_1-x,\ldots,x_n-x\|_E < \delta$. Donc que T est n-continue de type 1. $\square$

Théorème 3.8. *[8] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace vectoriel réel avec $dim(E) \geq n$ et E' le dual de E. Alors, l'application*

$$\begin{array}{rccl} \|.,\ldots,\cdot\| : & (E')^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f_1,\ldots,f_n) & \longmapsto & \|f_1,\ldots,f_n\| = abs \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}, \end{array}$$

où $x_1,\ldots,x_n \in E$ sont n vecteurs linéairement indépendants fixes, définie une n-norme sur E'.

Preuve

(i) C'est claire que $\|f_1,\ldots,f_n\| \geq 0$, $\forall f_1,\ldots,f_n \in E'$.

(ii)

$$\begin{aligned} & f_1,f_2,\ldots,f_n \quad \text{sont linéairement dépendants} \\ & \Leftrightarrow \text{colonnes de la matrice}(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n} \quad \text{sont linéairement dépendantes} \\ & \Leftrightarrow det(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n} = 0 \\ & \Leftrightarrow abs \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \|f_1,\ldots,f_n\| = 0. \end{aligned}$$

(iii) Par les propriétés du déterminant et la définition de l'absolu (abs), $\|f_1,\ldots,f_n\|$ reste invariant sous les permutations de $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

(iv) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|\alpha f_1, \ldots, f_n\| &= abs \begin{vmatrix} \alpha f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \\
&= |\alpha| abs \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \\
&= |\alpha| \, \|f_1, \ldots, f_n\|
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
\|f_0 + f_1, \ldots, f_n\| &= abs \begin{vmatrix} f_0 + f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0 + f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \\
&= abs \left(\begin{vmatrix} f_0(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \right) \\
&\leq abs \begin{vmatrix} f_0(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} + abs \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \\
&= \|f_0, \ldots, f_n\| + \|f_1, \ldots, f_n\| .
\end{aligned}$$

Il achève la preuve. $\square$

3.2 Théorème du point fixe

Ce paragraphe est consacrée à une application au théorème du point fixe dans les espaces vectoriels n-normés. Dans toute la suite, $\mathcal{A} := \{a_1,...,a_n\}$ désigne une famille de n vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel n-normé $(E, \|\cdot,...,\cdot\|)$. Considérons les notions suivantes.

Définition 3.6. [6] Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel n-normé $(E, \|\cdot,...,\cdot\|)$ converge vers un élément $x \in E$ par rapport à la famille $\mathcal{A}$ et on note

$$x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\mathcal{A}} x,$$

si

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x,a_{i_2},...,a_{i_n}\| = 0 \text{ pour chaque } i_j \in \{1,...,n\}\,,\ 2 \leq j \leq n.$$

Définition 3.7. [6] Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel n-normé $(E, \|\cdot,...,\cdot\|)$ est appelée suite de Cauchy par rapport à la famille $\mathcal{A}$, si

$$\lim_{p\to+\infty, q\to+\infty} \|x_p - x_q,a_{i_2},...,a_{i_n}\| = 0 \text{ pour chaque } i_j \in \{1,...,n\}\,,\ 2 \leq j \leq n.$$

Définition 3.8. [6] On dit q'un espace vectoriel n-normé $(E, \|\cdot,...,\cdot\|)$ est complet par rapport à la famille $\mathcal{A}$, si toute suite de Cauchy de E est convergente par rapport à la famille $\mathcal{A}$.

Définition 3.9. [6] Soit $B \subseteq E$ un ensemble non vide. On dit alors que B est fermé si pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans B qui converge dans E, sa limite est dans B.

Définition 3.10. [6] Soit $(E; \|.,...,.\|)$ un espace n-normé. Un opérateur $T : E \to E$ est dit opérateur de contraction par rapport à $\mathcal{A}$, il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\|T(x) - T(x'), a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \leq k \|x - x', a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \tag{3.7}$$

pour tout $x,x' \in E$ et $i_j \in \{1,...,n\}\,,\ 2 \leq j \leq n$.

Définition 3.11. [6] Soient $(E; \|.,...,.\|)$ un espace n-normé et B un sous-ensemble non vide de E. Alors B est dit borné par rapport à $\mathcal{A}$ s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|b, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \leq M$$

pour chaque $b \in B$ et $i_j \in \{1,...,n\}\,,\ 2 \leq j \leq n$.

On a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.1. *[6] Soit $b \in E$. Si $\|b,a_{i_2},...,a_{i_n}\| = 0$ pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \le j \le n$, alors $b = 0$.*

Preuve

Si $\|b, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| = 0$ pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \le j \le n$, alors $b \in vect\{a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\}$ pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \le j \le n$. Ce qui signifie que $b = 0$. □

Le théorème du point fixe pour les opérateurs de contraction sur un sous-ensemble fermé et borné par rapport à une famille $\mathcal{A}$ de n vecteurs linéairement indépendants d'un espace de n-Banach E, est donné par le résultat suivant.

Théorème 3.9. *[6] Soit $(E; \|.,...,.\|)$ un espace n-normé complet et $B \subset E$ un ensemble non vide, fermé et borné par rapport à $\mathcal{A}$. Si $T : B \to B$ est un opérateur de contraction par rapport à $\mathcal{A}$, alors T a un unique point fixe dans B.*

Preuve Soit x_0 un élément quelconque de B. On construit d'abord une suite itérative $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ où

$$x_m = T^m(x_0), \text{ pour } m = 0,1,2,\dots$$

Montrons que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par rapport à $\mathcal{A}$. Puisque T est contractif, il existe $k \in]0;1[$ tel que pour deux termes consécutifs quelconques dans $\{x_m\}$, on a

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_{m+1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| &= \|T(x_{m-1}) - T(x_m), a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\
&\le k \|x_{m-1} - x_m, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\
&= k \|T(x_{m-2}) - T(x_{m-1}), a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\
&\le k^2 \|x_{m-2} - x_{m-1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\
&\vdots \\
&\le k^m \|x_0 - x_1, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\|
\end{aligned}$$

pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \le j \le n$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire et la formule de la somme d'une progression géométrique, on obtient pour $m > l$:

$$\begin{aligned}\|x_m - x_l, a_{i_2}, \quad \dots, a_{i_n}\| &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - \dots + x_{l+1} - x_l, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\ &\leq \|x_m - x_{m-1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| + \\ &\dots + \|x_{l+1} - x_l, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\ &\leq k^{m-1} \|x_0 - x_1, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| + k^{m-2} \|x_0 - x_1, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| + \\ &\dots + k^l \|x_0 - x_1, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\ &= \left(k^{m-1} + k^{m-2} + \dots + k^l\right) \|x_0 - x_1, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\ &< \quad \frac{k^l}{1-k} \|x_0 - x_1, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\|\end{aligned}$$

pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$. Parce que $k \in]0; 1[$ et $\|x_0 - x_1, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\|$ est borné, nous pouvons rendre le côté droit de l'inégalité ci-dessus aussi petit que nous le souhaitons, en prenant l suffisamment grand. Puisque cela vaut pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$, la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy par rapport à $\mathcal{A}$. Comme E est un espace n-normé complet et B est fermé, il existe $x \in B$ tel que $x_m \underset{m\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{A}}} x$.

Montrons que x est un point fixe de T, i,e., $T(x) = x$. En utilisant l'inégalité triangulaire et la condition contractuelle (3.7) nous avons

$$\begin{aligned}\|T(x) - x, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| &\leq \|T(x) - x_m, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| + \|x_m - x, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\ &\leq k \|x - x_{m-1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| + \|x_m - x, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\|\end{aligned}$$

pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$. En prenant un m suffisamment grand, la somme en la deuxième ligne peut être rendue plus petite que toute valeur préaffectée $\varepsilon > 0$, car $x_m \underset{m\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{A}}} x$. Nous concluons que $\|T(x) - x, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| = 0$ pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$. En appliquat le Lemme 3.2.1, on obtient $T(x) = x$.

Montrons maintenant que ce poit fixe est unique. Soit en effet, $x' \in B$ un autre point fixe de T, i.e., $T(x') = x'$, alors

$$\begin{aligned}\|x - x', a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| &= \|T(x) - T(x'), a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| \\ &\leq k \|x - x', a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\|\end{aligned}$$

pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$. Puisque $k \in]0; 1[$, on a $\|x - x', a_{i_2}, \dots, a_{i_n}\| = 0$ pour chaque $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$. D'après le lemme 3.2.1, nous concluons que $x = x'$.□

Afin d'énoncer et de prouver une version généralisée du théorème du point fixe en utilisant le φ-opérateur de contraction, nous avons besoin de rappeler les notions et résultats suivants.

Définition 3.12. Une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant :

1. φ est croissante, i.e., $t_1 \leq t_2$ implique $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$,
2. $(\varphi^n(t))_n$ ... 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$ pour tout $t \geq 0$, où $\varphi^n := \underbrace{\varphi \circ ... \circ \varphi}_{n \text{ composition}}$.

s'appelle une fonction de comparaison.

Exemple 3.4. Voici quelques exemples des fonctions de comparaison :

1. $\varphi(t) = kt, t \in \mathbb{R}^+, k \in [0,1[$
2. $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}, t \in \mathbb{R}^+$
3. $\varphi(t) = \frac{1}{2}t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $\varphi(t) = t - \frac{1}{2}$ pour $t > 1$

La définition suivante généralise la notion classique d'opérateur de contraction.

Définition 3.13. [6] Soit E un espace n-normé et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction de comparaison. Un opérateur $T : E \to E$ est appelé φ-opérateur de comparaison par rapport à la famille $\mathcal{A}$ si

$$\|T(x) - T(x'), a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \leq \varphi\left(\|x - x', a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right) \tag{3.8}$$

pour tout $x,x' \in E$ et $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$.

Le lemme suivant est nécessaire.

Lemme 3.2.2. *[6] Si φ est une fonction de comparaison, alors $\varphi(t) < t$ pour tout $t > 0$.*

Preuve Supposons que le contraire soit vrai, $\varphi(t) \geq t$, où $\varphi(t) = t + \psi_1$ pour certaine $\psi_1 > 0$. En appliquant la propriété de croissance monotone de φ aux t et $\varphi(t)$, on obtient

$$\varphi^2(t) = \varphi(\varphi(t)) \geq \varphi(t).$$

Donc, il existe une certaine $\psi_2 > 0$ telle que

$$\varphi^2(t) = t + \psi_1(t) + \psi_2(t).$$

En raisonnant par récurrence, on peut montrer que la condition de monotonie est vérifiée, i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{n+1}(t) \geq \varphi^{n}(t)$ et donc $\varphi^{n}(t) \geq t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce qui contredit le fait que $(\varphi^n(t))_n$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$. □

Le théorème suivant est une généralisation du théorème du point fixe dans le contexte des espaces vectoriels n-normés, où l'application de contraction est remplacée par **le** φ-opérateur de contraction dans un ensemble fermé et borné par rapport à $\mathcal{A}$.

Théorème 3.10. *[6] Soit $(E;\|.,\ldots,.\|)$ un espace de n-Banach et $B \subset E$ un ensemble non vide, fermé et borné par rapport à la famille $\mathcal{A}$. Si $T : B \to B$ est un φ-opérateur de contraction par rapport à $\mathcal{A}$, alors T a un unique point fixe dans B.*

Preuve Comme dans la preuve du théorème 3.9, à partir d'un élément x_0 de B, on construit une suite itérative $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, où

$$x_m = T^m(x_0), \text{ pour } m = 0,1,2,\ldots$$

Nous montrons que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par rapport à $\mathcal{A}$. Puisque T est contractif, il existe $k \in]0;1[$ tel que pour deux termes consécutifs quelconques de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}\|x_m - x_{m+1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| &= \|T(x_{m-1}) - T(x_m), a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \\ &\leq \varphi\left(\|x_{m-1} - x_m, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right) \\ &= \varphi\left(\|T(x_{m-2}) - T(x_{m-1}), a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right) \\ &\leq \varphi^2\left(\|x_{m-2} - x_{m-1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\right)\| \\ &\vdots \\ &\leq \varphi^m\left(\|x_0 - x_1, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right)\end{aligned}$$

pour tout $i_j \in \{1,\ldots,n\}$, $2 \leq j \leq n$. Remarquons que $\varphi(t) < t$ pour chaque $t > 0$. Par définition 3.13 de la monotonie, on a

$$\left\|T^{m+1}(x) - T^m(x), a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\right\| \leq \varphi^m\left(\|x_0 - x_1, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right)$$

pour chaque pour tout $i_j \in \{1,\ldots,n\}$, $2 \leq j \leq n$. Pour $m > l$ et en appliquant l'inégalité triangulaire sur $\|x_m - x_l, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_l, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - \ldots + x_{l+1} - x_l, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \\
&\leq \|x_m - x_{m-1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| + \\
&\quad \ldots + \|x_{l+1} - x_l, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \\
&\leq \varphi^{m-1}\left(\|x_0 - x_1, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right) + \varphi^{m-2}\left(\|x_0 - x_1, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right) + \\
&\quad \ldots + \varphi^{l}\left(\|x_0 - x_1, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

□

pour tout $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$. Comme B est borné par rapport à $\mathcal{A}$, il existe une constante $M > 0$ telle que $\|x_0 - x_1, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \leq M$ pour tout x_0,$x_1 \in B$ et $\{i_2, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, n\}$. Ainsi, d'après (3.9), on a

$$\|x_m - x_l, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \leq \varphi^{m-1}(M) + \varphi^{m-2}(M) + \ldots + \varphi^{l}(M)$$

pour chaque $\{i_2, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, n\}$. Par la condition (2) de la définition 3.12, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty} \|x_m - x_l, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| &\leq \lim_{l\to\infty} \left(\varphi^{m-1}(M) + \varphi^{m-2}(M) + \ldots + \varphi^{l}(M)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pour tout $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$. Ceci prouve que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par rapport à $\mathcal{A}$. Puisque E est complet, B est fermé, et x_m est dans B, on obtient $x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{A}} x$, pour certains $x \in B$. Nous allons montrer que x est un point fixe de T. Par l'inégalité triangulaire et φ-application de contraction (3.13), on voit que

$$\begin{aligned}
\|T(x) - x, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| &\leq \|T(x) - x_m, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| + \|x_m - x, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \\
&\leq \varphi\left(\|x - x_{m-1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right) + \|x_m - x, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|
\end{aligned}$$

pour tout $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver m suffisamment grand tel que le côté droit est inférieur à ε. Ainsi $x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{A}} x$. Nous concluons que $\|T(x) - x, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| = 0$ pour tout $i_j \in \{1,...,n\}$, $2 \leq j \leq n$, et par le lemme 3.2.1 on a $T(x) = x$.

Maintenant, nous montrons que T n'a pas d'autres points fixes. Soit $x' \in B$ un autre fixe point de T, alors $T(x') = x'$. Ce qui implique

$$\begin{aligned}
\|x - x', a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| &= \|T(x) - T(x'), a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| \\
&\leq \varphi\left(\|x - x', a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\|\right)
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.2.2 on obtient $\|x - x', a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\| = 0$, pour chaque $i_j \in \{1, \ldots, n\}$, $2 \leq j \leq n$. Le lemme 3.2.1 entraîne que $x = x'$.

Conclusion et perspectives

Nous avons atteint les dernières lettres de ce mémoire, et ce fut un bon voyage dans le monde de l'analyse mathématique et en particulier dans l'analyse fonctionnelle.

Au cours ce modeste travail, nous avons rencontré de nouveaux concepts, des idées intéressantes et des résultats importants, tels que la n-norme, le n-produit scalaire, l'espace de n-Banach, l'espace n-préhilbertien, l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée, l'opérateur n-linéaire, n-borné, n-continu et l'opérateur φ-contractant, ...etc.

En perspectives, nous aspirons à l'avenir à poursuivre nos études d'une manière plus précise et approfondie de cette nouvelle théorie en introduisant, par exemple, ce nouveau concept dans l'espace de Lebesgue et en essayant d'aborder de nouvelles applications.

et en essayant d'aborder de nouveaux aspects théoriques et pratiques dans ce domaine.

Comme il est bien connu qu'aucun effort humain ne peut être parfait, sans défauts et sans lacunes, le lecteur de ce mémoire trouvera des fautes et des erreurs involontaires.

Enfin, Alhamdu li ALLAH qui nous a guidés vers cela et merci.

Références

[1] H.N.Elhage, *Topologie générale et espaces normés : Cours et exercices corrigés Ed. 2, Dunod,2018.*

[2] A.Eljai , *Eléments de topologie et espaces métriques, Presses universitaires de Perpignan, 2007.*

[3] H.Gunawan, *Inner products on n-inner product spaces. Soochow Journal of Mathematics, 28(4) : 389-398, 2002.*

[4] H.Gunawan, *On n-inner product, n-norms, and the Cauchy-Schwarz inequality. Scientiae Mathematicae Japonicae, 55, 01 2001.*

[5] H.Gunawan et M.Mashadi,, *On n-normed spaces. International journal of mathematics and mathematical sciences, 27(10) : 631-639, 2001.*

[6] H.Gunawan, O.Neswan et E.Sukaesih , *Fixed point theorems on bounded sets in an n-normed space. J. Math. Comput. Sci , 8(2) : 196-215, 2018.*

[7] A.L.Soenjaya, *On n-bounded and n-continuous operator in n-normed space. Journal of the Indonesian Mathematical Society, pages 45-56, 2012.*

[8] S.R.Meitei et M.P.Singh, *On bounded n-linear operators. J. Math. Anal , 3 : 51-58, 2015.*