Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Draia Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

RAHMANE Fadila

Thème

Existence et unicité d'un système thermoélastique à double porosité

Soutenue publiquement le 22/06/2022, devant le jury composé de :

M. SLAMA Abdeldjlil	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Président
M. KEEDI Ahmed	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Rapporteur
M. BOUAZIZ Said	Maître assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

Année universitaire : 2021/2022

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أحمد دراية- أدرار
المكتبة المركزية
مصلحة البحث البيبليوغرافي

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University Ahmed Draia of Adrar
The central library

جامعة احمد دراية - أدرار

شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذ(ة): قدي أحمد

المشرف مذكرة الماستر الموسومة بـــ : Existence et Unicité d'un système thermoélastique à double porosité

من إنجاز الطالب(ة): رحان فضيلة

و الطالب(ة): ——

كلية : العلوم و التكنولوجيا

القسم : رياضيات و اعلام آلي

التخصص: رياضيات

تاريخ تقييم / مناقشة: 22 جوان 2022 م

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقييم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.

وبإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والاليكترونية (PDF).

- امضاء المشرف:

ادرار في : 06 JUIL. 2022

مساعد رئيس القسم:

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
جامعة أدرار كلية العلوم والتكنولوجيا

مساعد رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي
مكلف بالتدريس والتعليم في التدرج
مازوزي حاج

ملاحظة :لاتقبل أي شهادة بدون التوقيع والمصادقة.

Dédicace

Tout d'abord, je tiens à remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donnée la santé, la volanté, le courage et la patience pour mener à terminer ma formation et pouvoir réaliser ce travail de recherche.

À l'âme de mon pěre qui m'enseigne comment apprendre à tenir un stylo et à écrire des mots sans regret.

À ma chére maman qui m'a motivée et encouragée pandant tout ce temps. Merci pour votre soutien et votre amour.

À mes six fréres et ma seule soeur qui m'ont encouragé tout au long de cette année pour réaliser ce travail, aux enfants de mes frères, à tout la famille.

Au soldat invisible : Rahmane. K.

À l'ami de la vie, compagnon de route, ma chère et loyale soeur : Senoussi. A.

À Granules de mon âme, mes chères amis : Ghazaoui. N, Yousfate. Y, Kerroumi. K, Mebarki. F, Ben hessan. Z, Mebarki. F.

À ma Collègue qui étaient du soutien : Brkaoui. A, Mediani. M.

À des professeurs qui m'ont appris tout au long de ma carrière universitaire .

Je remercie à toutes les personnes qui ont conribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Enfin, aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et à tous ceux qui m'aiment.

FADILA

REMERCIEMENTS

A Dieu le tout puissant, qui nous a toujours soutenu dans notre parcours scolaire et dans toute notre vie, à lui soit la gloire.

A mon cher maître et l'encadreur Mr. KEDDI Ahmed, qui s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qui il a bien voulu me consacrer avec sa patience, ses motivations et les informations complémentaires, ses conseils, et qui sans ce de dernier, ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie également, Mr. SLAMA Abdeldjlil et Mr. BOUAZIZ Said, pour avoir aimablement accepté de faire partie de me jury de ce mémoire.

Je porte à exprimer sincères remerciement à tous les enseignants qui m'ont formé durant toute notre carrière.

Notations générales

$D(A)$	Domaine de L'opérateur A.
$H^1,\ H_0^1, \ldots$	Espaces de Sobolev.
$C_0^\infty(I)$	L'ensemble des fonctions indéfiniment différentiable sur I et à support compact.
$f^{(k)}$	La dérivée k-ième faible.
∂I	La frontier de I.
$\lvert I \rvert$	Languer de I.
$\operatorname{Im}(.)$	La partie imaginaire.
$\operatorname{Re}(.)$	La partie réele.
∂	L'opérateur de différentielle partielle.
$(L^p)'$	Espace dual de L^p.
p'	L'exposant conjugé de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
$p.p.$	Presque partout.
u_{tt}	La dérivée partielle de u par rapport à t de L'ordre 2.
u_{xx}	La dérivée partielle de u par rapport à x de L'ordre 2.
E	Espace de Banach.
E''	Le dual du dual de E.
$\langle ., . \rangle$	Crochet de dualité.
$(., .)$	Le produit scalaire.

Table des matières

Introduction

Les matériaux élastiques à double porosité font l'objet d'étude de nombreux travaux. Ces matériaux présentent de différentes situations réelles que l'on retrouve en géophysique, génie civil et biomécanique $[1]-[5]$.

Les premiéres contributions dans ce sens sont dues à Barenblatt et al. $[1]-[6]$, mais, depuis, d'autres articles et livres ont été consacrés à décrire les progrés théoriques de cette théorie $[2]-[4],[7]-[14]$. Les équations de base de cette théorie peuvent être obtenues grâce aux développements proposés dans $[15]-[19]$.

Ces équations sont données par :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \Upsilon_x, \\ k_1\varphi_{tt} = \sigma_x + \delta, \\ k_2\psi_{tt} = \tau_x + \vartheta, \end{cases} \tag{1}$$

avec l'équation de la chaleur

$$\rho\eta_t = q_x, \tag{2}$$

et les équations constitutives

$$\begin{cases} \Upsilon = \mu u_x + b\varphi + d\psi - \beta\theta, \\ \sigma = \alpha\varphi_x + b_1\psi_x, \\ \tau = b_1\varphi_x + \gamma\psi_x, \\ \delta = -bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta - \varepsilon_1\varphi_t - \varepsilon_2\psi_t, \\ \vartheta = -du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta - \varepsilon_3\varphi_t - \varepsilon_4\psi_t, \\ \rho\eta = \beta u_x + \gamma_1\varphi + \gamma_2\psi + c\theta, \\ q = k\theta_x. \end{cases} \tag{3}$$

Ici u représente le déplacement, φ et ψ sont les fractions volumiques de chaque structure poreuse, θ est la différence de température par rapport à la température de référece, ρ est la masse volumique, k_1 et k_2 sont les coefficients d'inertie de chaque structure poreuse, Υ est la contrainte, σ et τ sont les contraintes équilibrées de chaque structure poreuse, δ et ϑ sont les forces corporelles équilibrées de chaque structure poreuse, η est l'entropie, q est le flux de chaleur et $\mu, b, d, \beta, \alpha, b_1, \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_3, \varepsilon_4, k$ et c sont des constantes constitutives du matériau.

Il est prescrit par les principes de base que la masse volumique, les coefficients d'inertie et la capacité thermique sont positives c'est-à-dire

$$\rho > 0, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad c > 0. \tag{4}$$

L'énergie mécanique interne du systéme est donnée par :

$$\begin{aligned} E = {} & \mu \left|u_x\right|^2 + 2bu_x\phi + 2du_x\psi + \alpha\left|\phi_x\right|^2 + \gamma\left|\psi_x\right|^2 + 2b_1\phi_x\psi_x \\ & + \alpha_1\left|\phi\right|^2 + \alpha_2\left|\psi\right|^2 + 2\alpha_3\phi\psi. \end{aligned} \tag{5}$$

Pour garantir que l'énergie mécanique interne est positive, la matrice

$$\begin{pmatrix} \mu & b & d & 0 & 0 \\ b & \alpha_1 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ d & \alpha_3 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & \gamma \end{pmatrix} \tag{6}$$

doit être définie positive. C'est-à-dire

$$\mu > 0, \quad \alpha > 0, \quad \mu\alpha_1 > b^2, \quad \mu\alpha_1\alpha_2 + 2bd\alpha_3 - d^2\alpha_1 - b^2\alpha_2 - \alpha_3^2 > 0, \quad \alpha\gamma > b_1^2. \tag{7}$$

On en déduit aussi que

$$\mu\alpha_2 > d^2, \quad \alpha_1\alpha_2 > \alpha_3^2. \tag{8}$$

La dissipation mécanique du système est donnée par

$$D_1 = \varepsilon_1 \left|\phi_t\right|^2 + \varepsilon_4 \left|\psi_t\right|^2 + 2\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right) \phi_t \psi_t. \tag{9}$$

Dans notre étude mathématique, il joue également un role important, l'expression

$$D_2 = k \left|\theta_x\right|^2, \tag{10}$$

et, en général,

$$D^* = D_1 + D_2.$$

Si on veut que D^* pour étre positif, il faut imposer que

$$k > 0, \ \varepsilon_1\varepsilon_4 > \frac{1}{4}\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)^2, \quad \varepsilon_1 > 0. \tag{11}$$

Si l'on substitue les équations constitutives (3) aux équations d'évolution (1) et à l'équation de la chaleur (2), on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x + d\psi_x - \beta\theta_x, \\ k_1\varphi_{tt} = \alpha\varphi_{xx} + b_1\psi_{xx} - bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta - \varepsilon_1\varphi_t - \varepsilon_2\psi_t, \\ k_2\psi_{tt} = b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} - du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta - \varepsilon_3\varphi_t - \varepsilon_4\psi_t, \\ c\theta_t = k\theta_{xx} - \beta u_{tx} - \gamma_1\varphi_t - \gamma_2\psi_t, \end{cases} \tag{12}$$

dans $(0,\pi) \times (0,+\infty)$, où $t \in (0,+\infty)$, $x \in (0,\pi)$.

Avec le système (12), on considère les conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann

$$u(x,t) = \varphi_x(x,t) = \psi_x(x,t) = \theta_x(x,t) = 0, \quad \text{pour } x = 0,\pi \text{ et } t \in (0,+\infty), \tag{13}$$

et les conditions initiales

$$\begin{array}{l} u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \phi_0(x), \\ \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x,0) = \xi_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad \text{pour } x \in (0,\pi). \end{array} \tag{14}$$

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité du systéme (12) qui modélise les déformations d'un matériau thermoélastique à double porosité où la conductivité thermique est donnée par la loi de Fourier aggissant sur l'équation de déplacement.

Ce travail est composé d'une introduction et de deux chapitres :

○ Le premier chapitre consiste en un support théorique de l'ètude, il comporte quatre sections :

1. La première section contient un reppele sur les espaces de Soboleve dans le cas unidimensionnel.

2. La deuxieme section sur les séries de Fourier.

3. La troisième section présente un reppel sur les opérateurs dissipatifs et le théorème de Lumer-Phillips.

4. La quatrième section donne quelques inégalités utiles.

○ Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité du systéme (12).

Chapitre 1

Le cadre théorique et conceptuel

Dans ce chapitre, on présentera quelques définitions et théorèmes fondamentales sur les espaces L^p, les espaces de Sobolev, les séries de Fourier, les opérateurs dissipatifs et le théorème de Lumer-Phillips et que nous utiliserons dans le deuxieme chapitre.

1.1 Espaces de Sobolev dans le cas unidimensionnel

Dans toute la suite $I =]a, b[$ est un intervalle dans $\mathbb{R}$ (borné ou non) et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

1.1.1 Espaces de Lebeague $L^p(I)$

Définition 1.1.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on définit les espaces*

$$L^p(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{R}; f \textit{ mesurable et } \int_I |f(x)|^p \, dx < \infty \right\} \textit{ pour } 1 \leq p < \infty,$$

et

$$L^{\infty}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } I\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_I |f(x)|^p \, dx\right]^{1/p}.$$

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; \ |f(x)| \leq C \ p.p. \ sur \ I\}.$$

Remarque 1.1.1 *Les élements de L^p pour $1 \leq p \leq \infty$ sont des fonctions de classe d'équivalance de la rolation :*

$$f \ \mathcal{R} \ g \Leftrightarrow f = g \ p.p.$$

Proposition 1.1.1 (*Inégalité de Hölder*) [20]. *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $f \in L^p(I)$ et $g \in L^{p'}(I)$ on a $fg \in L^1(I)$ et*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}. \tag{1.1}$$

Preuve. La conclusion est évidente si $p = 1$ et si $p = \infty$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \qquad \forall a \geq 0, \qquad \forall b \geq 0; \tag{1.2}$$

la démonstration de (1.2) est évidente : la fonction log étant concave sur $]0, \infty[$ on a

$$\log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log ab.$$

Donc

$$|f(x)| \, |g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \quad \text{p.p. } x \in I.$$

Il en résulte que $fg \in L^1$ et que

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{p'} \|g\|_{L^{p'}}^{p'}, \tag{1.3}$$

Remplaçant dans (1.3) f par λf $(\lambda > 0)$ il vient

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda p'} \|g\|_{L^{p'}}^{p'}. \tag{1.4}$$

On choisit

$$\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^{p'}}^{p'/p},$$

(de maniére à minimiser le membre de droite dans (1.4)) . On obtient alors (1.1) . ■

Proposition 1.1.2 (*Inégalité de Minkawski*) . *Soit* $1 \leq p < \infty$. *Pour* f, g *mesurables*

$$\|f + g\|_{L^p(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} + \|g\|_{L^p(I)}.$$

Preuve. Les cas $p = 1$ ou $p = \infty$ sont faciles. Supposons maintenant que $1 < p < \infty$. Comme l'inégalite est triviale si $\|f + g\|_{L^p} = 0$, on peut supposer que $\|f + g\|_{L^p} \neq 0$. Alors

$$\int_I |f + g|^p \, dx \leq \int_I |f + g|^{p-1} |f| \, dx + \int_I |f + g|^{p-1} |g| \, dx.$$

En appliquant sucessivement l'inégalité de Hölder à $|f + g|^{p-1}$ avec l'exposant p' et f avec l'exposant p, puis g avec l'exposant p, on obtient

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq \|f + g\|_{L^p}^{p-1} \left(\|f\|_{L^P} + \|g\|_{L^p} \right),$$

ce qui prouve l'inégalité voulue. ■

Remarque 1.1.2 *Si* $f \in L^{\infty}$ *on a*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^{\infty}} \;\; p.p. \; sur \; I.$$

Les deux derniéres propositions donnent le théorème suivant :

Théorème 1.1.1 *[20]* $L^{P}(I)$ *est un espace vectoriel normé muni de la norme* $\| \;\; \|_{L^{p}}$, *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

Quelques résultats d'intégration qu'il faut absolument connaître :

Théorème 1.1.2 *[20].* (*Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi*)
Soit (f_n) *une suite croissante des fonctions de* $L^{p}(I)$ *telle que*

$$\sup_n \int f_n < \infty.$$

Alors $(f_n(x))$ *converge p.p. sur* I *vers une limite finie notée* $f(x)$; *de plus*

$$f \in L^{p}(I) \quad et \quad \|f_n - f\|_{L^{p}} \to 0.$$

Théorème 1.1.3 *[20].*(*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*)
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* $L^{p}(I)$ *qui converge presque partout vers une fonction* f, *s'il existe une fonction* $g \in L^{p}(I)$ *telle que pour tout* n,

$$|f_n(x)| \leq g(x) \;\; p.p. \; sur \; I.$$

Alors $f \in L^{p}(I)$ *et*

$$\|f_n - f\|_{L^{p}} \to 0.$$

La complétude des espaces de Lebesgue est donnée par la théorème suivant :

Théorème 1.1.4 *(Fischer-Riesz)* [20]. *$L^P(I)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Preuve. 1) Supposons d'bord que $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Ètant donné un entier $k \geq 1$ il existe N_K tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \text{pour} \quad m,\, n \geq \mathrm{N}_K.$$

Danc il existe E_k négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \ \ \forall x \in I \backslash \mathrm{E}_k,\ \forall m,\, n \geq \mathrm{N}_K. \tag{1.5}$$

Enfin, posant $\mathrm{E} = \bigcup\limits_k \mathrm{E}_k$ (E est négligeable), on voit que pour tout $x \in I \backslash \mathrm{E}$ la suite $f_n(x)$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$). Soit $f_n(x) \to f(x)$ pour $x \in I \backslash \mathrm{E}$. passant à la limite dans (1.5) quand $m \to \infty$ on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \ \ \forall x \in I \backslash \mathrm{E}_k,\ \forall n \geq \mathrm{N}_K.$$

Donc

$$f \in L^\infty et\, \|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \forall n \geq \mathrm{N}_K.$$

Par conséquent

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} \to 0.$$

2) Supposons maintent que $1 \leq p < \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p.Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L^p.

On extrait une sous-suite (f_{n_k}) telle que

$$\left\|f_{n_{k-1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1,$$

[on procéde comme suit : il existe n_1 tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2},$$

pour m, $n \geq n_1$; on prend ensuit $n_2 \geq n_1$ tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2},$$

pour m, $n \geq n_2$, ets.]. On va montrer que f_{n_k} converge dans L^p. Pour simplifier les notations on écrit f_k au lieu de f_{n_k}, de sorte que l'on a

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1.$$

Posant

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|,$$

il vient

$$\|g_n\|_{L^p} \leq 1.$$

On déduit du théorème de convergence monotone que p.p. sur I, $g_n(x)$ converge vers une limite finie notée $g(x)$ avec $g \in L^p$. D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \ \dots \ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Il en résulte que p.p. sur I, $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. On a p.p. sur I

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

Il en résulte que $f \in L^p$. Enfin $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$; en effet on a $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ p.p. et

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x),$$

majorante intégrable. On conclut grâce au théorème de Lebesgue. ■

Remarque 1.1.3 *L'espace $L^2(I)$ muni du produit scalaire*

$$(f,g) = \int_I fg dx,\ \ f,g \in L^2(I),$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.1.5 (*Densité*) [*20*] *L'espace $C_c^\infty(I)$ est dense dans $L^p(I)$, pour tout $1 \leq p < \infty$, i.e. pour tout $u \in L^p(I)$ il existe une suite $(u_n)_n$ de $C_c^\infty(I)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^p(I)$, et pour tout $\varepsilon > 0$ alors*

$$\|u_n - u\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Remarque 1.1.4 *[26]. Le théorème ci-dessus n'est pas vrai si $p = \infty$. En effet, si $u_n \in C_c^\infty(I)$ converge vers une fonction u dans $L^\infty(I)$, alors u est continue. En effet,*

$$\|u_n - u\|_{L^\infty} < \varepsilon,$$

et donc u_n converge uniformément vers u, ce qui nous assure la continuité de u.

Ainsi une fonction dans L^∞ discontinue sur un ensemble de musure non nul ne posséde aucune suite $u_n \in C_c^\infty(I)$ convergente vers u dans L^∞.

Définition 1.1.2 ([*26*]). (*Dual d'un espace de Banach*)

Soit E un espace de Banach. On désigne par E' l'espace dual de E. Plus explicitement,

$$E' = \{f : E \to \mathbb{R},\ f \text{ est une forme linéaire et continue}\}.$$

E' est muni de la norme duale :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in E \\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}.$$

Définition 1.1.3 (*Espace Séparable*) *On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Définition 1.1.4 ([26]) . (*Espace Réflexif*)

Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'', où E'' est le dual du dual de E.

On dit que E est reflexif si J est surjective, c'est-à-dire

$$J(E) = E''.$$

Proposition 1.1.3 *[26]*

1) $L^p(I)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.

2) $L^p(I)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.

Proposition 1.1.4 *[26]. Soit N un espace vectoriel normé et soit $F \subset N$ un sous-espace vectoriel tel que $\overline{F} \neq N$. Alors il existe $f \in N'$, $f \neq 0$ tel que*

$$\langle f, x\rangle = 0 \quad \forall x \in F.$$

Théorème 1.1.6 (*Le Dualité*) [26]. *Soit $1 < p < \infty$ et soit $\nu \in (L^p(I))'$. Alors $\exists! u \in L^{p'}(I)$ tel que*

$$\langle \nu, f\rangle = \int_I uf, f \in L^p(I).$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}(I)} = \|\nu\|_{(L^p(I))'}.$$

Preuve. On définit l'opérateur linéaire $T : L^{p'} \to (L^p)'$ par

$$\langle Tu, f \rangle = \int uf \quad \forall f \in L^p.$$

On procéde ensuite en deux parties :

1. Montrons que

$$\|Tu\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^{p'}}, \forall u \in L^{p'}.$$

Soit $u \in L^{p'}$ fixé. L'application $f \in L^p \longmapsto \int uf$ est une forme linéaire continue sur L^p. On a, par l'inégalité de Hölder,

$$|\langle Tu, f \rangle| \leq \|u\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}.$$

Par la norme duale, on obtient

$$\|Tu\|_{(L^p)'} = \sup_{\substack{f \in L^p \\ f \neq 0}} \frac{|\langle Tu, f \rangle|}{\|f\|_{L^p}} \leq \|u\|_{L^{p'}}. \tag{1.6}$$

Posons ensuite

$$f_0(x) = |u(x)|^{p'-2} u(x).$$

On a

$$\|f_0\|_{L^p} = \|u\|_{Lp'}^{p'-1} \leq \infty, \text{ donc } f_0 \in L^p.$$

De plus,

$$|\langle Tu, f_0 \rangle| = \|u\|_{L^{p'}}^{p'}.$$

Par conséquent,

$$\|Tu\|_{(L^p)'} \geq \frac{|\langle Tu, f_0 \rangle|}{\|f_0\|_{L^p}} = \|u\|_{L^{p'}}. \tag{1.7}$$

En comparant (1.6) et (1.7) , on a bien l'égalité souhaitée. Il en résulte que l'opérateur T ainsi défini est une isométrie, donc en particulier injectif.

2. Il nous reste par conséquent à prouver que T est surjectif. On définit le sous-espace $E = T\left(L^{p'}\right)$. Comme E est fermé, il reste à montrer que E est dense dans $(L^p)'$. Or, comme L^p est reflexif pour tout $1 < p < \infty$, alors $(L^p)'' = L^p$.

Soit $h \in (L^p)''$ ($= L^p$ car L^p est reflexif $\forall\ 1 < p < \infty$) tel que $|\langle Tu, h\rangle| = 0$ pour tout $u \in L^{p'}$; vérifions que $h = 0$. On obtiendra ainsi que E est dense dans $(L^p)'$ par la proposition 1.1.3. On a

$$\int uh = \langle Tu, h\rangle = 0 \quad \forall u \in L^{p'}.$$

En prenant

$$u = |h|^{p-2}\, h, \text{ on a } u \in L^{p'} \text{ et } \|h\|_{L^p} = 0,$$

donc $h = 0$ par la positivité de la norme $\|\ \ \|_{L^p}$.

On conclut ainsi que T est surjective, ce qui termine la preuve. ■

Exemple 1.1.1 $\left(\textit{d'élément de } (L^\infty)' \textit{ qui n'est pas dans } L^\infty\right)$

Supposons que $0 \in I$. *Soit* $\varphi_0 : C_c(I) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\varphi_0(f) = f(0).$$

Soit φ *la fonction qui prolonge cette fonction en une forme linéaire et continue sur* L^∞.

Alors, il n'existe pas de fonction $u \in L^1$ *telle que*

$$\langle \varphi, f\rangle = \int uf, f \in L^\infty.$$

En effet si une telle fonction u existait on aurait

$$\int uf = 0, \quad \forall f \in C_c\left(I \backslash \{0\}\right) \qquad (car\ f(0) = 0),$$

on obtiendrait $u = 0$ p.p. sur $I \backslash \{0\}$, et donc $u = 0$ p.p. sur I. Par conséquent

$$\langle \varphi, f \rangle = 0, f \in L^{\infty}.$$

Ce qui est contraire à

$$\langle \varphi, f \rangle = f(0).$$

Définition 1.1.5 *Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$, une fonction $f \in L^p(I)$ admet une dérivée faible (au sens des distributions) dans $L^p(I)$ s'il existe $g \in L^p(I)$ telle que pour toute $\chi \in C_c^{\infty}(I)$, on ait*

$$\int_I f(x)\,\chi'(x)\,dx = -\int_I g(x)\,\chi(x)\,dx.$$

Alors, $h = f^{(k)}$ est la dérivée kième faible de f si

$$\int_I f(x)\,\chi^{(k)}(x)\,dx = (-1)^{(k)} \int_I h(x)\,\chi(x)\,dx.$$

1.1.2 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Soit $I =]a;b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.1.6 *L'espace de Sobolev, noté $W^{1,p}(I)$, est constitué des fonctions de $L^p(I)$ dont la dérivées au sens des distributions, s'identifie à une fonction de*

$L^p(I)$ *.La définition précédente s'écrit donc comme ceci*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I),\ \exists g \in L^p(I) \ \text{ tel que } \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dx,\ \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Pour $p = 2$*, il est d'usage de remplacer la notation* $W^{1,p}(I)$ *par* $H^1(I)$*.*

Proposition 1.1.5 *1. L'espace* $W^{1,p}(I)$ *muni de la norme définie par*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

est un espace de Banach.

2. L'espace $H^1(I)$*, muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2},$$

est un espace de Hilbert.

Corollaire 1.1.1 (*Intégration par parties*) [20]*. Soient*

$$u, v \in W^{1,p}(I) \quad \text{avec } 1 \leq p \leq +\infty.$$

Alors

$$uv \in W^{1,p}(I),$$

et

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

De plus on a la formule d'intégration par parties

$$\int_x^y u'v dx = u(y)v(y) - u(x)v(x) - \int_x^y uv' dx, \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

1.1.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Définition 1.1.7 *Étant donnés un entier $m \geq 2$ et réel $1 \leq p < +\infty$. On définit par recurrence les espaces de Sobolev*

$$W^{0,p}(I) = L^p(I)\,,\ W^{m,p}(I) = \left\{f \in W^{m-1,p}(I)\,,\ f' \in W^{m-1,p}(I)\right\}.$$

Exemple 1.1.2 *[26]. Soit $I = \left]-1,+1\right[$. La fonction*

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(|x| + x\right),$$

appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et que

$$f' = H(x) = \begin{cases} 1 \ si \ 0 < x < 1, \\ 0 \ si \ -1 < x < 0. \end{cases}$$

En effet, il est facile de voir que f est continue et bornée sur I. Elle appartient donc à $L^p(I)$ pour tout

$$1 \leq p \leq \infty.$$

Montrons que sa dérivée au sens des distributions vaut à H : On a, pour tout $g \in C_c^1(I)$,

$$-\int_I fg' = -\int_{-1}^{0} fg' - \int_0^1 fg' = -\int_0^1 xg'.$$

Grâce à l'intégration par parties, on a

$$-\int_I fg' = -\left[xg\right]_0^1 + \int_0^1 g = \int_0^1 g = \int_I Hg.$$

Ainsi, $f' = H$. Or H est bornée sur I, et donc $H \in L^p(I)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Ainsi, $f \in W^{1,p}(I)$. Notons que H n'appartient pas à $W^{1,p}(I)$ pour $1 \leq p \leq \infty$, car *sinon on peut montrer que $H' = 0$ p.p. sur I. Par conséquent on aurait*

$$-\int_I Hg' = -\int_0^1 g' = g(0) - g(1) = g(0) = 0 \qquad \forall g \in C_c^1(I),$$

ce qui est clairement absurde.

Proposition 1.1.6 *L'espace $W^{m,p}(I)$ muni de la norme*

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \|f\|_{L^P} + \sum_{k=1}^{m} \left\|f^{(k)}\right\|_{L^p},$$

est un espace de Banach.

L'espace $H^m(I) = W^{m,2}(I)$ muni du produit scalaire

$$(f,g)_{H^m} = (f,g)_{L^2} + \sum_{k=1}^{m} \left(f^{(k)}, g^{(k)}\right)_{L^2},$$

est un espace de Hilbert.

1.1.4 Espace de Sobolev $W_0^{m,p}(I)$

Définition 1.1.8 *Étant donnés $1 \leq p \leq +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$. On désigne par $W_0^{m,p}(I)$ la fermeture de $C_c^m(I)$ dans $W^{m,p}(I)$. On note $H_0^m = W_0^{m,2}(I)$.*

Théorème 1.1.7 *[23].L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{I})$ est dense dans $H^m(I)$.*

Proposition 1.1.7 (*Inégalité de Poincaré*) [26]. *Soit I borné de $\mathbb{R}$. Alors, il existe une constante $C_p > 0$ (dépendant de $|I|$) telle que pour tout $f \in W_0^{1,p}(I)$*

$$\|f\|_{W^{1,p}(I)} \leq C_p \|f'\|_{L^p}.$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(I)$ la quantité $\|f'\|_{L^p}$ définie une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(I)$.

Preuve. Pour $f \in W_0^{1,p}(I)$ on a

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| = \left| \int_a^x f'(t)\, dt \right| \leq \|f'\|_{L^1}.$$

Donc

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \|f'\|_{L^1}.$$

De plus, grâce à l'inégalité de Hölder (Proposition 1.1.1)

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f'\|_{L^1} (|I|)^{\frac{1}{p}} \leq \|f'\|_{L^p} (|I|)^{\frac{1}{p'}} (|I|)^{\frac{1}{p}} = \|f'\|_{L^p} (|I|).$$

Finalment

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p} \leq [1 + |I|] \|f'\|_{L^p}, \quad \text{tel que} \quad C_p = [1 + |I|]$$

■

Remarque 1.1.5 *On a la caracterisation suivante de $H_0^m(I)$*

$$H_0^m(I) = \left\{ f \in H^m(I),\ f = f' = ... = f^{(m-1)} = 0 \ sur\ \partial I \right\}.$$

Il convient de bien distinguer

$$H_0^2(I) = \left\{ f \in H^2(I),\ f = f' = 0 \ sur\ \partial I \right\},$$

et

$$H^2(I) \cap H_0^1(I) = \left\{ f \in H^2(I),\ f = 0 \ sur\ \partial I \right\}.$$

Théorème 1.1.8 *Soit* $f \in W^{m,p}(I)$. *Alors*

$$f \in W_0^{m,p}(I),$$

si et seulement si

$$\forall k \in \{1, ..., m-1\}\ f^{(k)}(x) = 0 \text{ pour } x \in \partial I.$$

1.1.5 Les injéctions de Sobolev

Théorème 1.1.9 *[26]. Il existe une constante* C *(dépendant seulement de* $|I| \leq \infty$*) telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(I) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

autrement dit $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ *avec l'injection continue pour tout* $1 \leq p \leq \infty$. *De plus, lorsque* I *est borné on a*

1) L'injection $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ *est compact pour* $1 < p \leq \infty$.

2) L'injection $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ *est compact pour* $1 \leq q < \infty$.

1.2 Séries de Fourier

1.2.1 Séries trigonométriques

Définition 1.2.1 *Une fonction* f *défnie sur un ensemble* $D_f \in \mathbb{R}$ *est dite périodique de période* $T \in \mathbb{R}^*$ *(ou* T*-périodique) si pour tout* $x \in D_f$, *on a*

$x + T \in D$ *et* $f(x+T) = f(x)$.

Définition 1.2.2 *On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions* *de la forme*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(nwx\right)+b_n\sin\left(nwx\right)\right],$$

avec $x\in\mathbb{R}$, $w>0$, a_n, $b_n\in\mathbb{R}$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. *Les nombers* a_0, a_n, b_n, $n\in\mathbb{N}^*$ *sont appelées coeffcients de Fourier de cette série.*

Exemple 1.2.1 *Soit* f *la fonction périodique* $(T=2\pi)$ *définie par :*

$$f\left(x\right)=x \text{ pour } -\pi\leq x\leq\pi.$$

La série de Fourier associée à f *converge t-elle vers* f *?*

Solution 1.2.1 *On ala série associée à* f *est*

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(nwx\right)+b_n\sin\left(nwx\right)\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin\left(nx\right).$$

Vérification des condition de Dirichlet :

-La fonction f *est continue sur* $]-\pi,\pi[$ *et elle n'est pas continue en* $-\pi$ *et en* π *avec* $\lim\limits_{x\rightarrow-\pi^-}f\left(x\right)=\pi$ *et* $\lim\limits_{x\rightarrow-\pi^+}f\left(x\right)=-\pi$ $($*nombre fini de points de non discontinuité*$)$;

-La fonction f *est dérivable sur* $]-\pi,\pi[$ *et elle n'est pas dérivable en* $-\pi$ *et en* π, *car* f *n'est pas continue en ces points* $($*nombre fini de points de non dérivabilité*$)$.

Ainsi, les conditions de Dirichlet sont vérifiées et donc ;

$$f\left(x\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin\left(nx\right),\quad \text{pour tout}\quad x\in\left]-\pi,\pi\right[.$$

Celle égalité a lieu partout sauf aux points de discontinuité. En de tels points, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et droite, c'est-à-dire 0.

1.2.2 Série de Fourier de fonctions 2π-périodiques.

Définition 1.2.3 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$. On suppose que $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)|\, dt$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique notée

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

avec

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad et \quad b_n = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \; n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 1.2.1 *1. Si la fonction f est paire*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \;\; et \; b_n = 0, n \in \mathbb{N}.$$

2. Si la fonction f est impaire

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \;\; et \; a_n = 0, n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.2.1 *(Dirichlet) [22] [20] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet) :*

◦En tout point x_0, les limites de f à droite et à gauche en x_0 existent et les discontinuité de f sont en nomre fini dans tout intervalle fini.

◦f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right]=\begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x, \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x. \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ où la fonction f est continue. Les notation $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droit et à gauche de f au point x.

Théorème 1.2.2 *(Egalité de Parseval) [22] [21]*

Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période 2π, aolrs on a

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx.$$

1.3 Les opérateurs dissipatifs et le théorème de Lumer-Phillips

1.3.1 Opérateurs dissipatifs

Définition 1.3.1 *[20]. Soit $\mathcal{A}:\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que $\mathcal{A}$ est dissipatif si*

$$(\mathcal{A}v,v)\leq 0 \qquad \forall v\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

$\mathcal{A}$ est maximal si $\operatorname{Im}(I-\mathcal{A})=\mathcal{H}$ i.e

$$\forall f\in\mathcal{H},\quad \exists u\in\mathcal{D}(\mathcal{A})\quad \textit{tel que}\quad u-\mathcal{A}u=f.$$

On dit que $\mathcal{A}$ est monotone si $-\mathcal{A}$ est dissipatif i.e $(\mathcal{A}u,u)\geq 0$ pour tout $u\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Définition 1.3.2 *Un opérateur linéaire non borné A dans E est dit m-dissipatif si A est dissipatif et*

$$\forall f \in E, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A) \text{ tel que } \lambda x - Ax = f.$$

Théorème 1.3.1 *Soit E est un espace de Banach, si A est m-dissipatif alors, pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - A$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1} f$ appartient à $D(A)$, pourtout $f \in E$ et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur E vérifiant*

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Proposition 1.3.1 *[20]. Si $\mathcal{A}$ est un opérateur m-dissipatif alors*

1) $\mathcal{D}(\mathcal{A})$est dense dans $\mathcal{A}$.

2) $\mathcal{A}$ est fermé.

3) $\forall \lambda > 0$, $(I - \lambda\mathcal{A})$ est bijectif de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}$, $(I - \lambda\mathcal{A})^{-1}$ est un opérateur borné et

$$\left\| (I - \lambda\mathcal{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1.$$

Preuve.

a) Soit $f \in \mathcal{H}$ tel que $(f,\ v) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Vérifions que $f = 0$. En effet, il existe $v_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que

$$v_0 + \mathcal{A}v_0 = f.$$

On a

$$0 = (f,\ v_0) = |v_0|^2 + (\mathcal{A}v_0,\ v_0) \geq |v_0|^2.$$

Donc $v_0 = 0$ et par suite $f = 0$.

b) Notons d'abord que pour tout $f \in \mathcal{H}$ il existe $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ unique tel que $u + \mathcal{A}u = f$.

En effet si $\overline{u}$ désigne une autre solution alors on a

$$(u - \overline{u}) + \mathcal{A}\,(u - \overline{u}) = 0.$$

Prenant le produit scalaire avec $(u - \overline{u})$ et appliquant la dissipatif de $\mathcal{A}$ on voit que $u - \overline{u} = 0$.

D'autre part on a

$$|u|^2 + (\mathcal{A}u,\ u) = (f,\ u)$$

et par suite $|u| \leq |f|$.

L'opérateur $f \longmapsto u$ noté $(I - \mathcal{A})^{-1}$ est donc un opérateur linéaire borné de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et

$$\left\|(I + \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1.$$

Montrons que $\mathcal{A}$ est fermé.

Soit (u_n) une suite telle que $u_n \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A})$ pour tout n, $u_n \to u$ et $\mathcal{A}u_n \to f$. Il faut vérifier que $u \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A})$ et que $\mathcal{A}u = f$.

On a

$$u_n + \mathcal{A}u_n \to u + f,$$

et donc

$$u_n = (I - \mathcal{A})^{-1}\,(u_n + \mathcal{A}u_n) \to (I + \mathcal{A})^{-1}\,(u + f)\,.$$

Par conséquent

$$u = (I - \mathcal{A})^{-1}\,(u + f) \ \text{ i.e. } u \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}) \ \text{ et } u + \mathcal{A}u = u + f.$$

c) Supposons que pour un certain $\lambda_0 > 0$ on ait $\mathbf{R}(I + \lambda_0\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. On va montrer que pour tout

$$\lambda > \frac{\lambda_0}{2} \text{ on a } \mathbf{R}\left(I + \lambda \mathcal{A}\right) = \mathcal{H}.$$

Commençons par noter − exactement comme en **b** −, que pour tout $f \in \mathcal{H}$ il existe $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ unique tel que $u + \lambda_0 \mathcal{A} u = f$; l'opérateur $f \longmapsto u$ est noté $(I + \lambda_0 \mathcal{A})^{-1}$ et l'on a

$$\left\| (I + \lambda_0 \mathcal{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1.$$

On cherche à résoudre l'équation

$$u + \lambda \mathcal{A} u = f \quad \text{ avec } \quad \lambda > 0. \tag{1.8}$$

On écrit (1.8) sous la forme

$$u + \lambda_0 \mathcal{A} u = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

ou encore

$$u = (I + \lambda_0 \mathcal{A})^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \right]. \tag{1.9}$$

On voit alors que si

$$\left| 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right| < 1 \text{ i.e. } \lambda > \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

alors (1.9) admet une solution grâce au théorème de point fixe de Banach.

Concluons. Si $\mathcal{A}$ est m-dissipatif alors $I + \mathcal{A}$ est surjectif. D'aprés ce qui précède $I + \lambda \mathcal{A}$ est surjectif pour

$$\lambda > \frac{1}{2}$$

donc aussi pour

$$\lambda > \frac{1}{4}, \text{ etc.}$$

Par récurrence on voit que $I + \lambda\mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. ■

Remarque 1.3.1 *Si $\mathcal{A}$ est m-dissipatif, alors $\lambda\mathcal{A}$ est aussi m-dissipatif pour tout $\lambda > 0$. Par contre si A et B sont deux opérateurs m-dissipatif alors $A + B$ défini sur $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ n'est par nécessairement m-dissipatif.*

Exemples d'opérateurs m-dissipatifs :

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$

L'opérateur de la chaleur dans $L^2(I)$ On pose $X = L^2(I)$, $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = H^2(I) \cap H_0^1(I)$ et $\mathcal{A}_1 u = u''$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$. L'opérateur $(\mathcal{A}_1, \mathcal{D}(\mathcal{A}_1))$ est m-dissipatif dans $L^2(I)$.

L'opérateur de la chaleur dans $L^P(I)$ On pose $X = L^p(I)$, avec $1 < p < \infty$, $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2) = W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I)$ et $\mathcal{A}_2 u = u''$ pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$. L'opérateur $(\mathcal{A}_2, \mathcal{D}(\mathcal{A}_2))$ est m-dissipatif dans $L^p(I)$.

1.3.2 Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 1.3.2 (*Lumer-Phillips*) [24]. *Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal dissipative dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ il existe une fonction*

$$u \in C^1([0, \ +\infty[\,; \mathcal{H}) \cap C([0, \ +\infty[\,; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \mathcal{A}u \quad sur \ [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}. \tag{1.10}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \qquad et \qquad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |\mathcal{A}u(t)| \leq |\mathcal{A}u_0| \qquad \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.3.2 *L'intérêt principal du théorème 1.3.1 réside dans le fait que pour résoudre le problème d'évolution* (1.10) *on se ramène à vérifier que $\mathcal{A}$ est maximal dissipative, c'est-à-dire, à étudier l'equation stationnaire*

$$u - \lambda \mathcal{A}u = f.$$

1.4 Quelques inégalités utiles

Les inégalités suivantes ont une grande importance.

Proposition 1.4.1 *Soient (a_n), (b_n) des réels. Alors*

$$\left(\sum a_n b_n\right)^2 \leq \left(\sum a_n^2\right)\left(\sum b_n^2\right)$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs a_n, b_n sont colinéaires, c'est à dire quel existe un nombre réel k tel que

$$a_n = kb_n, \forall n.$$

Cas particulier **:** *si $b_n = 1$, alors*

$$\left(\sum a_n\right)^2 \leq n \sum a_n^2. \tag{1.11}$$

Preuve. On pose

$$A = \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} b_i^2\right) \text{ et } B = \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

$$\begin{aligned} A - B &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 - 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_i a_j b_i b_j \\ &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \left(a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i a_j b_i b_j\right) \\ &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. ∎

Théorème 1.4.1 (*Inégalité de Young*) [20]. *Soient p et q deux réel tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} b^q.$$

Si

$$p = q = 2,$$

on a

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

Lemme 1.4.1 (*Inégalité de Cauchy Schwarz*). *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni* *d'un produit scalaire* $(.,.)$, *alors*

$$\forall f, g \in \mathcal{H} : |(f,\ g)| \leq (f,\ f)^{\frac{1}{2}} (g,\ g)^{\frac{1}{2}} .$$

Chapitre 2

L'existence et l'unicité d'un systéme thermoélastique à double porosité

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité des problémes $(12)-(14)$. A partir les équations $(12)_2$, $(12)_3$ et $(12)_4$, on trouve le systéme des équations diffirentielles linéaires d'ordre 1 suivant

$$\begin{cases} k_1\partial_{tt}\int_0^\pi \varphi dx = -\alpha_1\int_0^\pi \varphi dx - \alpha_3\int_0^\pi \psi dx + \gamma_1\int_0^\pi \theta dx - \varepsilon_1\partial_t\int_0^\pi \varphi dx - \varepsilon_2\partial_t\int_0^\pi \psi dx, \\ k_2\partial_{tt}\int_0^\pi \psi dx = -\alpha_3\int_0^\pi \varphi dx - \alpha_2\int_0^\pi \psi dx + \gamma_2\int_0^\pi \theta dx - \varepsilon_3\partial_t\int_0^\pi \varphi dx - \varepsilon_4\partial_t\int_0^\pi \psi dx, \\ c\partial_t\int_0^\pi \theta dx = -\gamma_1\partial_t\int_0^\pi \varphi dx - \gamma_2\partial_t\int_0^\pi \psi dx, \end{cases}$$

ce systéme peut s'écrit sous la forme

$$Y_t = MY,\ Y_0 = \left(\int_0^\pi \varphi_0 dx,\ \int_0^\pi \phi_0 dx,\ \int_0^\pi \psi_0 dx,\ \int_0^\pi \xi_0 dx,\ \int_0^\pi \theta_0 dx\right), \tag{2.1}$$

où

$$Y = \left(\int_0^\pi \varphi dx,\ \int_0^\pi \varphi_t dx,\ \int_0^\pi \psi dx,\ \int_0^\pi \psi_t dx,\ \int_0^\pi \theta dx\right),$$

et

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{k_1} & -\frac{\varepsilon_1}{k_1} & -\frac{\alpha_3}{k_1} & -\frac{\varepsilon_2}{k_1} & \frac{\gamma_1}{k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha_3}{k_2} & -\frac{\varepsilon_3}{k_2} & -\frac{\alpha_2}{k_2} & -\frac{\varepsilon_4}{k_2} & \frac{\gamma_2}{k_2} \\ 0 & -\frac{\gamma_1}{c} & 0 & -\frac{\gamma_2}{c} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Alors, la solution de (2.1) est donne par

$$Y=e^{Mt}Y_0.$$

On sait que pour le problème déterminé par $(12)-(14)$, on peut toujours prendre des solutions où φ, ψ et θ sont des constants, pour cela, on suppose que $Y_0=0_{\mathbb{R}^5}$ c'est- â -dire

$$\int_0^\pi \varphi_0 dx=\int_0^\pi \phi_0 dx=\int_0^\pi \psi_0 dx=\int_0^\pi \xi_0 dx=\int_0^\pi \theta_0 dx=0, \tag{2.3}$$

de sorte que, $Y=0$ c'est- â -dire

$$\int_0^\pi \varphi dx=\int_0^\pi \varphi_t dx=\int_0^\pi \psi dx=\int_0^\pi \psi_t dx=\int_0^\pi \theta dx=0,\ t\in(0,+\infty). \tag{2.4}$$

Maintenant, on définit l'espace de Hilbert suivant

$$\begin{gathered}\mathcal{H}=\{(u,\upsilon,\varphi,\phi,\psi,\xi,\theta)\in H^1\times L^2\times H^1\times L^2\times H^1\times L^2\times L^2: \\ \int_0^\pi \varphi(x)\,dx=\int_0^\pi \phi(x)\,dx=\int_0^\pi \psi(x)\,dx=\int_0^\pi \xi(x)\,dx=\int_0^\pi \theta(x)\,dx=0\}\end{gathered} \tag{2.5}$$

muni du produit scalaire défini comme suit

$$\begin{aligned}(U,U^*)_{\mathcal{H}} :=& \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\mu u_x\overline{u_x^*} + \rho\upsilon\overline{\upsilon^*} + bu_x\overline{\varphi^*} + b\overline{u_x^*}\varphi + du_x\overline{\psi^*}\right)dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(d\overline{u_x^*}\psi + \alpha\varphi_x\overline{\varphi_x^*} + \gamma\psi_x\overline{\psi_x^*} + b_1\varphi_x\overline{\psi_x^*} + b_1\overline{\varphi_x^*}\psi_x\right)dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(k_1\phi\overline{\phi_x^*} + k_2\xi\overline{\xi^*} + \alpha_1\varphi\overline{\varphi^*} + \alpha_2\psi\overline{\psi^*} + \alpha_3\varphi\overline{\psi^*} + \alpha_3\overline{\varphi^*}\psi + c\theta\overline{\theta^*}\right)dx,\end{aligned} \tag{2.6}$$

pour tout

$$U = (u,\upsilon,\varphi,\phi,\psi,\xi,\theta)^T, U^* = (u^*,\upsilon^*,\varphi^*,\phi^*,\psi^*,\xi^*,\theta^*) \in \mathcal{H}.$$

En posant $\upsilon = u_t$, $\phi = \varphi_t$, $\xi = \psi_t$, notre problème s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U, \\ U(0) = U_0 = (u_0,\upsilon_0,\varphi_0,\phi_0,\psi_0,\xi_0,\theta_0), \end{cases} \tag{2.7}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est défini par

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \upsilon \\ \frac{1}{\rho}\left(\mu u_{xx} + b\varphi_x + d\psi_x - \beta\theta_x\right) \\ \phi \\ \frac{1}{k_1}\left(\alpha\varphi_{xx} + b_1\psi_{xx} - bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta - \varepsilon_1\phi - \varepsilon_2\xi\right) \\ \xi \\ \frac{1}{k_2}\left(b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} - du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta - \varepsilon_3\phi - \varepsilon_4\xi\right) \\ \frac{1}{c}\left(k\theta_{xx} - \beta\upsilon_x - \gamma_1\phi - \gamma_2\xi\right) \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (le domaine de définition de $\mathcal{A}$) est l'ensemble des $U \in \mathcal{H}$ tels que $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$.

Alors

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\left\{U\in\mathcal{H}:\upsilon,\ \phi,\ \xi\in H^{1};\ \varphi,\ \psi\in H^{2};\ \mu u_{xx}-\beta\theta_{x}\in L^{2};\ \theta_{xx}\in L^{2};\right.$$
$$\left.\alpha\varphi_{x}+b_{1}\psi_{x}-bu=b_{1}\varphi_{x}+\gamma\psi_{x}-du=k\theta_{x}-\beta\upsilon=0,\ x\in(0,\pi)\right\}. \tag{2.9}$$

Il est clair que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est un sous-espace de $\mathcal{H}$.

Théorème 2.0.2 *Pour* $U_0\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$*, il existe une unique solution*

$$U\in C^{1}([0,\infty),\mathcal{H})\cap C^{0}([0,\infty),\mathcal{D}(\mathcal{A})),$$

au problème (2.7).

Pour demontrer ce théorème, on aura besoin de deux lemmes suivants

Lemme 2.0.2 *L'opérateur* $\mathcal{A}$ *est dissipatif. Autrement dit, pour tout*

$$U\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \operatorname{Re}(\mathcal{A}U,U)\leq 0.$$

En utilisant le produit scalaire, pour tout $U\in\mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned}
2(\mathcal{A}U,U)_{\mathcal{H}}=\ &\mu\int_0^\pi \upsilon_x\overline{u_x}dx+\int_0^\pi(\mu u_{xx}+b\varphi_x+d\psi_x-\beta\theta_x)\overline{\upsilon}dx\\
&+b\int_0^\pi\upsilon_x\overline{\varphi}dx+b\int_0^\pi\overline{u_x}\phi dx+d\int_0^\pi\upsilon_x\overline{\psi}dx+d\int_0^\pi\overline{u_x}\xi dx\\
&+\alpha\int_0^\pi\phi_x\overline{\varphi_x}dx+\gamma\int_0^\pi\xi_x\overline{\psi_x}dx+b_1\int_0^\pi\phi_x\overline{\psi_x}dx+b_1\int_0^\pi\overline{\varphi_x}\xi_x dx\\
&+\int_0^\pi(\alpha\varphi_{xx}+b_1\psi_{xx}-bu_x-\alpha_1\varphi-\alpha_3\psi+\gamma_1\theta-\varepsilon_1\phi-\varepsilon_2\xi)\overline{\phi}dx\\
&+\int_0^\pi(b_1\varphi_{xx}+\gamma\psi_{xx}-du_x-\alpha_3\varphi-\alpha_2\psi+\gamma_2\theta-\varepsilon_3\phi-\varepsilon_4\xi)\overline{\xi}dx\\
&+\alpha_1\int_0^\pi\phi\overline{\varphi}dx+\alpha_2\int_0^\pi\xi\overline{\psi}dx+\alpha_3\int_0^\pi\phi\overline{\psi}dx+\alpha_3\int_0^\pi\overline{\varphi}\xi dx\\
&+\int_0^\pi(k\theta_{xx}-\beta\upsilon_x-\gamma_1\phi-\gamma_2\xi)\overline{\theta}dx.
\end{aligned}$$

Grâce à la formule d'integration par partie, on trouve après la simplication

$$\begin{aligned}
2\left(\mathcal{A}U,U\right)_{\mathcal{H}} &= 2i\mu\int_0^\pi \operatorname{Im}\left(\upsilon_x\overline{u_x}\right)dx+2ib\int_0^\pi \operatorname{Im}\left(\upsilon_x\overline{\varphi}\right)dx+2id\int_0^\pi \operatorname{Im}\left(\upsilon_x\overline{\psi}\right)dx \\
&+2i\beta\int_0^\pi \operatorname{Im}\left(\overline{\upsilon_x}\theta\right)dx+2ib\int_0^\pi \operatorname{Im}(\overline{u_x}\phi)dx \\
&+2id\int_0^\pi \operatorname{Im}(\overline{u_x}\xi)dx+2i\alpha\int_0^\pi \operatorname{Im}(\phi_x\overline{\varphi_x})dx \\
&+2i\gamma\int_0^\pi \operatorname{Im}(\xi_x\overline{\psi_x})dx+2ib_1\int_0^\pi \operatorname{Im}(\phi_x\overline{\psi_x})dx \\
&+2ib_1\int_0^\pi \operatorname{Im}(\overline{\varphi_x}\xi_x)dx+2i\alpha_1\int_0^\pi \operatorname{Im}(\phi\overline{\varphi})dx \\
&+2i\alpha_3\int_0^\pi \operatorname{Im}(\phi\overline{\psi})dx+2i\gamma_1\int_0^\pi \operatorname{Im}(\theta\overline{\phi})dx \\
&+2i\alpha_3\int_0^\pi \operatorname{Im}(\overline{\varphi}\xi)dx+2i\alpha_2\int_0^\pi \operatorname{Im}(\xi\overline{\psi})dx \\
&+2i\gamma_2\int_0^\pi \operatorname{Im}(\theta\overline{\xi})dx-\varepsilon_4\int_0^\pi \left|\xi\right|^2dx \\
&-\varepsilon_1\int_0^\pi \phi\overline{\phi}dx-\varepsilon_3\int_0^\pi \phi\overline{\xi}dx-\varepsilon_2\int_0^\pi \xi\overline{\phi}dx-k\int_0^\pi \theta_x\overline{\theta_x}dx. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

En passant à la partie reèl, on voit que

$$\operatorname{Re}\left(\mathcal{A}U,U\right)_{\mathcal{H}}=\left(-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\varepsilon_4\left|\xi\right|^2+\varepsilon_1\left|\phi\right|^2+\left(\varepsilon_3+\varepsilon_2\right)\operatorname{Re}\left(\phi\overline{\xi}\right)\right)dx-\frac{1}{2}\int_0^\pi k\left|\theta_x\right|^2dx\right)\leq 0. \qquad (2.11)$$

Compte tenu des hypothèses (11), le lemme est démontré.

Lemme 2.0.3 *L'opérateur $\mathcal{A}$ est surjectif.*

Preuve. On doit preuver que, pour chaque

$$\mathcal{F}=\left(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7\right)\in\mathcal{H},$$

il existe

$$U=\left(u,\upsilon,\varphi,\phi,\psi,\xi,\theta\right)^T\in\mathcal{D}\left(\mathcal{A}\right),$$

tel que $\mathcal{A}U = \mathcal{F}$; ceci s'écrit comme suite

$$\begin{cases} f_1 = \upsilon \\ \rho f_2 = \mu u_{xx} + b\varphi_x + d\psi_x - \beta\theta_x \\ f_3 = \phi \\ k_1 f_4 = \alpha\varphi_{xx} + b_1\psi_{xx} - bu_x - \alpha_1\varphi - \alpha_3\psi + \gamma_1\theta - \varepsilon_1\phi - \varepsilon_2\xi \\ f_5 = \xi \\ k_2 f_6 = b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} - du_x - \alpha_3\varphi - \alpha_2\psi + \gamma_2\theta - \varepsilon_3\phi - \varepsilon_4\xi \\ cf_7 = k\theta_{xx} - \beta\upsilon_x - \gamma_1\phi - \gamma_2\xi \end{cases} \tag{2.12}$$

en substituant l'equations $(2.12)_1$, $(2.12)_3$, $(2.12)_5$ aux équations $(2.12)_7$, $(2.12)_4$, $(2.12)_6$ respectivement, on obtient

$$\begin{cases} \upsilon = f_1 \\ \mu u_{xx} + b\varphi_x + d\psi_x = \rho f_2 + \beta\theta_x \\ \phi = f_3 \\ k_1 f_4 + bu_x + \alpha_1\varphi + \alpha_3\psi - \gamma_1\theta + \varepsilon_1 f_3 + \varepsilon_2 f_5 = \alpha\varphi_{xx} + b_1\psi_{xx} \\ \xi = f_5 \\ k_2 f_6 + du_x + \alpha_3\varphi + \alpha_2\psi - \gamma_2\theta + \varepsilon_3 f_3 + \varepsilon_4 f_5 = b_1\varphi_{xx} + \gamma\psi_{xx} \\ k\theta_{xx} = cf_7 + \beta f_{1x} + \gamma_1 f_3 + \gamma_2 f_5. \end{cases} \tag{2.13}$$

On va résoudre le système(2.13) en utilisant les séries de Fourier. Donc, on considère

$$f_i = \sum f_n^i \sin nx \text{ pour } i = 1,2 \text{ et } \ f_i = \sum f_n^i \cos nx \text{ pour } i = 3,...,7 \tag{2.14}$$

avec

$$\sum n^2 (f_n^i)^2 < \infty, \text{ pour } i = 1,3,5 \text{ et } \sum (f_n^i)^2 < \infty, \text{ pour } i = 2,4,6,7. \tag{2.15}$$

On veut trouver

$$u = \sum u_n \sin nx,\ \ \upsilon = \sum \upsilon_n \sin nx,\ \ \varphi = \sum \varphi_n \cos nx,\ \ \phi = \sum \phi_n \cos nx, \tag{2.16}$$
$$\psi = \sum \psi_n \cos nx,\ \ \xi = \sum \xi_n \cos nx,\ \ \theta = \sum \theta_n \cos nx.$$

Des première, troisième et cinquième équations du système (2.12), il s'ensuit que

$$\upsilon_n = f_n^1, \varphi_n = f_n^3 \text{ et } \xi_n = f_n^5,\ \ \upsilon, \varphi, \xi \in H^1.$$

Et d'où, de la septième équation de (2.12), il est clair que

$$\theta_n = -\frac{1}{kn^2}\left(cf_n^7 + \beta n f_n^1 + \gamma_1 f_n^3 + \gamma_2 f_n^5\right). \tag{2.17}$$

Alors

$$\sum n^2\theta_n^2 = \sum \frac{1}{k^2}\left(cf_n^7 + \beta n f_n^1 + \gamma_1 f_n^3 + \gamma_2 f_n^5\right)^2, \tag{2.18}$$

en utilisant l'inégalité 1.11, on trouve que

$$\sum n^2\theta_n^2 \leq \frac{4c^2}{k^2}\sum\left(f_n^7\right)^2 - \frac{4\beta^2}{k^2}\sum n^2\left(f_n^1\right)^2 - \frac{4\gamma_1^2}{k^2}\sum\left(f_n^3\right)^2 - \frac{4\gamma_2^2}{k^2}\sum\left(f_n^5\right)^2 \tag{2.19}$$

compte tenu de cette inégalité et des conditions sur f_n^i, on voit que

$$\sum n^2\theta_n^2 < \infty$$

ceci signifié que $\theta_{xx} \in L^2$.

En retournant à (2.13) on obtient

$$\begin{cases} -\mu n^2 u_n - bn\varphi_n - dn\psi_n = \rho f_n^2 - \beta n\theta_n \\ bnu_n + (\alpha_1 + \alpha n^2)\varphi_n + (b_1 n^2 + \alpha_3)\psi_n = -k_1 f_n^4 \ - \varepsilon_1 f_n^3 - \varepsilon_2 f_n^5 + \gamma_1\theta_n \\ dnu_n + \left(\alpha_3 + b_1 n^2\right)\varphi_n + \left(\alpha_2 + \gamma n^2\right)\psi_n = -\varepsilon_3 f_n^3 - \varepsilon_4 f_n^5 - k_2 f_n^6 + \gamma_2\theta_n \end{cases} \tag{2.20}$$

Par conséquent

$$u_n = \frac{p_5\left(n\right)\theta_n + f_n^2 p_4\left(n\right) + f_n^3 p_3^1(n) + f_n^4 p_3^2\left(n\right) + f_n^5 p_3^3\left(n\right) + f_n^6 p_3^4\left(n\right)}{nq_5(n)},$$

$$\varphi_n = \frac{\theta_n p_4^1\left(n\right) + f_n^2 p_3^5\left(n\right) + f_n^3 p_4^2(n) + f_n^4 p_4^3\left(n\right) + f_n^5 p_4^4\left(n\right) + f_n^6 p_4^5\left(n\right)}{nq_5\left(n\right)} \tag{2.21}$$

et

$$\psi_n = \frac{\theta_n p_4^6\left(n\right) + f_n^2 p_3^6\left(n\right) + f_n^3 p_4^7(n) + f_n^4 p_4^8\left(n\right) + f_n^5 p_4^9\left(n\right) + f_n^6 p_4^{10}\left(n\right)}{nq_5(n)} \tag{2.22}$$

tels que

$$p_k^i, i = 1, ..., 10,$$

sont des polynômes de dégrée inférieur ou égale â k et

$$\begin{aligned} q_5(n) &= n^5\mu\left(b_1^2 - \alpha\gamma\right) + n^3\left(-\alpha\alpha_2\mu - \alpha_1\gamma\mu + b^2\gamma - 2bb_1 d + 2\alpha_3 b_1\mu + \alpha d^2\right) \\ &\quad + n\left(-\alpha_1\alpha_2\mu + \alpha_3^2\mu + \alpha_2 b^2 - 2\alpha_3 bd + \alpha_1 d^2\right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

On remarquons que $q_5(n)$ est un polynome de degré 5 car

$$\mu\left(b_1^2 - \alpha\gamma\right) \neq 0.$$

Comme $f^i, \theta \in L^2$ donc $\exists\ c \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n\ \ \left|f_n^i\right|^2 < c$ et $\left|\theta_n\right|^2 < c$.

Alors

$$\varphi_n \overset{+\infty}{\sim} \frac{c_1}{n^2}, \tag{2.24}$$

d'où $\varphi \in H^2$.

De la même manière, on trouve $\psi \in H^2$. Maintenant, on montre que $\mu u_{xx} - \beta\theta_x \in L^2$.

On a :

$$\mu u_{xx} - \beta\theta_x = \sum \left(-\mu n^2 u_n + \beta n\theta_n\right) = \sum \left(bn\varphi_n + dn\psi_n + \rho f_n^2\right)$$

mais

$$\varphi_n, \psi_n, f_n^2 \in L^2$$

donc

$$\mu u_{xx} - \beta\theta_x \in L^2.$$

Ceci termine la preuve. ■

Conclusion

A la lumière de cette étude, nous avons montré l'existence et l'unicité d'un système thermoélastique à double porosité avec la loi de Fourier aggissant sur l'équation de déplacement.

Le travail présenté peut être développé dans le futur en ajoutant la stabilité éxponnentielle d'un systéme thermoélastique à double porosité. Nous envisageons, par exemple, en perspective, d'appliquer le modèle d'ordre élevé à quatre variables pour le calcul de différentes formes de structures minces et épaisses en matériaux à gradient de propriétés sous la combinaison des différents types de chargement et en tenant compte des changements dans les propriétés matérielles des matériaux constitutifs dus à la température.

Bibliographie

[1] Barenblatt, G. I., Zheltov, I. P., & Kochina, I. N. (1960). Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. Journal of applied mathematics and mechanics, 24(5), 1286-1303.

[2] Berryman, James G., and Herbert F. Wang. "Elastic wave propagation and attenuation in a double-porosity dual-permeability medium." International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 37.1-2 (2000) : 63-78.

[3] Khalili, N., & Selvadurai, A. P. S. (2003). A fully coupled constitutive model for thermo-hydro-mechanical analysis in elastic media with double porosity. Geophysical Research Letters, 30(24).

[4] Straughan, B. (2013). Stability and uniqueness in double porosity elasticity. International Journal of Engineering Science, 65, 1-8.

[5] Cowin, S. C. (1999). Bone poroelasticity. Journal of biomechanics, 32(3), 217-238.

[6] Barenblatt, G. I., Zheltov, I. P., & Kochina, I. N. (1960). Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. Journal of applied mathematics and mechanics, 24(5), 1286-1303.

[7] Wilson, R. K., & Aifantis, E. C. (1982). On the theory of consolidation with double porosity. International Journal of Engineering Science, 20(9), 1009-1035.

[8] Khalili, N., & Valliappan, S. (1996). Unified theory of flow and deformation in double porous media. European Journal of Mechanics. A, Solids, 15.

[9] Masters, I., Pao, W. K., & Lewis, R. W. (2000). Coupling temperature to a double-porosity model of deformable porous media. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 49(3), 421-438.

[10] Pride, S. R., & Berryman, J. G. (2003). Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. II. Fluid transport equations. Physical Review E, 68(3), 036604.

[11] Ying Zhaoa, Ć., & Chenb, M. (2006). Fully coupled dual-porosity model for anisotropic formations. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 43, 1128-1133.

[12] Svanadze, M. (2010). Dynamical problems of the theory of elasticity for solids with double porosity. PAMM, 10(1), 309-310.

[13] Ainouz, A. (2011). Homogenized double porosity models for poro-elastic media with interfacial flow barrier. Mathematica Bohemica, 136(4), 357-365.

[14] Svanadze, M. (2012). Plane waves and boundary value problems in the theory of elasticity for solids with double porosity. Acta applicandae mathematicae, 122(1), 461-471.

[15] Ieşan, D., & Quintanilla, R. (2014). On a theory of thermoelastic materials with a double porosity structure. Journal of Thermal Stresses, 37(9), 1017-1036.

[16] Ieşan, D. (2015). Method of potentials in elastostatics of solids with double porosity. International Journal of Engineering Science, 88, 118-127.

[17] Straughan, B. (2016). Waves and uniqueness in multi-porosity elasticity. Journal of Thermal Stresses, 39(6), 704-721.

[18] Svanadze, M. (2017). Boundary value problems of steady vibrations in the theory of thermoelasticity for materials with a double porosity structure. Archives of Mechanics, 69.

[19] Ieşan, D. and Quintanilla, R. (2007). A theory of porous thermoviscoelastic mixtures. Journal of Thermal Stresses, 30(7), 693-714.

[20] Brezis, H. (1983). Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.

[21] H. Ezzahrauoi, Cours d'analyse3 Partie séries de fourier cours et exercices corrigés,université Mohammed V, faculité des sciences Rabat, Octobre 2019.

[22] Duoandikoetxea, J. and Zuazo, J. D. (2001). Fourier analysis (Vol. 29). American Mathematical Soc..

[23] Girault, V. (2005). Approximations variationnelles des EDP. Lecture notes, Master Degree, 2006.

[24] Liu, Z., & Zheng, S. (1999). Semigroups associated with dissipative systems (Vol. 398). CRC Press.

[25] Martin Jr, R. H. (1985). A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 12(2), 302-305.

[26] Rochat, J. (2009). Les espaces de Sobolev (No. STUDENT).

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité d'un système thermoélastique avec double porosité, qui modélise les déformations d'un matériau thermoélastique à double porosité où la conductivité thermique est donnée par la loi de Fourier aggissant sur l'équation de déplacement.

Abstract

The purpose of memory thesis is to study the existence and uniqueness of a thermoelastic system with double porosity, which models the deformations of a thermoelastic material at double porosity where the thermal conductivity is given by Fourier law acting on the displacement equation.

ملخص

الغرض من هذه المذكرة هو دراسة وجود ووحدانية حل نظام مرن حراري ذو مسامية مزدوجة والذي يصوغ تشوهات مادة لينة حراريا في المسامية المزدوجة حيث يتم إعطاء الموصلية الحرارية بواسطة قانون فورييه الذي يعمل على معادلة الازاحة.