Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Univérsité Ahmed Draia Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité : Analyse Fonctionnelle et Applications

présenté par

BALLAOUI Aicha

Thème

Applications Harmoniques et Bi-harmoniques sur une Variété Riemannienne .

Soutenue publiquement le 19/06/2022, devant les jury composé de

Président :	Mr.RAHMANE Mebrouk	MCA. à l'université d'ADRAR
Examinateurs :	Mr.FATMI Larbi	MCB . à l'université d'ADRAR
Encadreur :	Mr. MAZOUZI Hadj	MCB . à l'université d'ADRAR

Année Universitaire :2021-2022.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أحمد دراية- أدرار
المكتبة المركزية
مصلحة البحث الببليوغرافي

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University Ahmed Draia of Adrar
The central library

جامعة أحمد دراية - أدرار

شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذ(ة) : مازوزي حاج

المشرف مذكرة الماستر الموسومة بـــ: Applications Harmoniques et Bi-harmoniques sur une variété Riemannienne

من إنجاز الطالب(ة): بلاوي عائشة

و الطالب(ة):

كلية : العلوم والتكنولوجيا

القسم : رياضيات وإعلام آلي

التخصص: التحليل الدالي وتطبيقاته

تاريخ تقييم / مناقشة: 2022/06/19م

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقييم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.

وبإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والاليكترونية (PDF).

- امضاء المشرف:

مازوزي حاج

06 JUIL. 2022

ادرار في :

مساعد رئيس القسم:

مساعد رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي
مكلف بالتدريس والتعليم في التدرج
مازوزي حاج

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
جامعة أدرار كلية العلوم والتكنولوجيا

ملاحظة :لاتقبل أي شهادة بدون التوقيع والمصادقة.

Dédicace

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce travail à :

— Mes chers mère Fatna et père Abdallah , qui m'ont encouragé tout le long de mes études et qui ne m'ont jamais laissé tomber dans toutes les circonstances.

— Mon frére bien-aimé Mohamed et ma chére soeur oum alkhir et Toutes Mes chers sœurs Zohra ,Fatiha , Nacira et leurs maris .

— les jeunes enfants de mes sœurs que j'aime beaucoup .

— Mon oncle , sa femme et ses enfonts .

— Mes tantes et leurs maris et enfants .

— Toute ma famille

— Mes collégues qui m'ont soutenu et surtout Barkaoui Amal .

— Mes meilleurs amis.

— Tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation et toute la promotion mathématiques 2022 .

— Tous ceux qui ont marqué ma carriére .

Merci pour tout.....

AICHA.

Remerciements

— Avant tout, mes purs remerciement ,je les exprime à **ALLAH** tout puissant .

— Merci à tous ceux qui m'ont sontenu et tous ceux qui ont été crédités de mon succés .

— Je vifs remerciement vont également à mon encadreur **Mr.MAZOUZI Hadj** qui m'a guidé durant ce travail et qui ses conseils et remarque étaient trés utile pour réaliser ce memoire.

— Je suis également trés reconnaissante aux professeurs **Mr. RAHMANE Mebrouk et Mr.FATMI Larbi** qui ont en la peine de corriger, et **Mr.MAMOUNI Touhami** qui nous a soutenus dans le programme de Latex ; et tous mes professeurs au cours de ma carriére universitaire .

— J'adresse mes remerciements a tous mes collégues a toutes mes aimes qui m'ont encouragé pour la réalisation de ce travail .

Table des matières

Introduction **8**

1 Variété Différentiable **10**

1.1 Notion de variété différentiable 11

1.1.1 Variété topologique 11

1.1.2 Atlas sur une variété 11

1.1.3 Variété différentiable 12

1.2 Notion d'espace tangente en un point de variété 15

1.2.1 Courbe tracée sur une variété 15

1.2.2 Espace tangent et Espace cotangent 17

1.2.3 Fibré tangent et Fibré cotangent 18

1.2.4 Champ de vecteurs 18

1.2.5 Dérivation et champs de vecteurs 18

1.2.6 Application différentiable sur une variété différentiable 19

1.2.7 Application tangente linéaire 20

1.2.8 Pull back et push forward de ϕ 20

1.3 Variété Riemannienne 20

1.3.1 La métrique Riemannienne 20

1.3.2 Variété Riemannienne 21

1.3.3 Connexion sur une variété différentiable 23

1.3.4 Torsion et courbure 25

1.3.5 Notion de connexion Riemannienne 26
1.3.6 Commentaire 26
1.3.7 Courbure de variété Riemannienne 29
1.3.8 Courbure de Ricci et courbure Scalaire 31

2 Applications harmoniques **33**
2.1 Applications harmoniques 33
2.2 Premiére variation d'énergie 35
2.3 Exemples d'applications harmoniques 36
2.4 Tenseur énergie impulsion 41
2.5 Problémes d' Existence 45

3 Applications bi-harmoniques **46**
3.1 Applications bi-harmoniques 46
3.2 Premiére variation de bi-énergie 47
3.3 La dexiéme variation de l' énergie 50
3.4 Exemples d' applications bi-harmoniquees 52
3.5 Tenseur biénergie impulsion 53

Conclusion **56**

bibliographie **58**

Résumé

Dans ce mémoire , on va introduire la notion d'appllication harmonique entre deux variétés Riemanniennes $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ qui est une solution d'équation dérivèe (Laplacien) et donnant quelques propriétés principale .
Par suite , on va introduire aussi la notion d'application bi-harmonique qui une prolongement d' application harmonique et on a toute application harmonique est une application bi-harmonique (la reciproque est fausse)

Abstract

In this thesis , we will introduce the notion of harmonic map between two Riemanian manifold $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ which is a solution of derived equation (la placien) and givin some main propeties , consequently we will also introduce the notion of bi-harmonic map which an extension of harmonic map and we have any harmonic map is a bi-harmonic map (the converse is false).

ملخص

في هذه المذكرة ، سوف نقدم مفهوم التطبيق التوافقي بين اثنين من مشعب ريماني وهو حل المعادلة المشتقة (لابلاسيان) و إعطاء بعض الخصائص الرئيسية .

نتيجة لذلك ، سنقدم أيضا مفهوم التطبيق التوافقي الثنائي الذي يمثل امتدادا للتطبيق التوافقي ،كما أنه لدينا أي تطبيق توافقي هو تطبيق توافقي ثنائي (العكس خاطئ).

Introduction

Les initiateurs de la théorie des fonctions harmoniques James Eells et Joseph H. Sampson ont montré en 1964 que dans un contexte géométrique adéquat une application régulière quelconque pouvait être déformée par homotopie en une application harmonique .Les applications harmoniques sont l'étude du flot de la chaleur par elles-mêmes et à titre d'inspiration font partie des sujets les plus étudiés dans le domaine de l'analyse géométrique

En géométrie différentielle, une application régulière $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ définie d'une variété Riemannienne dans une autre est dite harmonique lorsqu'elle est solution d'une certaine équation aux dérivées partielles généralisant l'équation de Laplace. L'équation des applications harmoniques est en général introduite pour résoudre un problème variationnel ; il s'agit de l'équation d'Euler-Lagrange associée à la recherche des points critiques de l'énergie de Dirichlet des applications entre les deux variétés. Par suite, la recherche des applications harmoniques englobe à la fois celle des géodésiques et celle des fonctions numériques qui sont harmoniques sur un ouvert de l'espace euclidien.

Ce travail comprend des resultats des applications harmonique et bi-harmonique sur la variété Reimannienne et donne certaines des principales propriétés
Ce memoire est divisée en trois chapitres.
Le premier chapitre on va étudier la variété différentiable, on parle de la variété topologique et rappelle la définition de cartes ,atlas.

Et on étudie la courbe,espace tangent et espase cotongent et ses bases ,champs de vecteur sous le titre notion de l'espace tangent en un point de variété. On présente aussi

la variété Riemannienne qui est une variété muni d'une métrique Riemannienne , on étudie les notions de la connexion , tenseurs , courbures ... .
Le deuxiéme chapitre comprenait l'étude des applications harmoniques et la discussion de la premiére variation d'énergie et quelques exemples ainsi que la tenseur énergie impulsion.
Dans le troisiéme chapitre on définit l'application bi-harmonique qui est le prolongement d'application harmonique , on donne la définition à la description de leurs propriétés fondamontales (la premiére variation de bi-énergie , du deuxiéme variation d'énergie et la tenseur bi-énergie impulsion) et on donne quelques exemples.

Chapitre 1

Variété Différentiable

Dans ce chapitre on va étudier la variété différentiable, on parle de la variété topologique et rappelle la définition de cartes ,atlas.

Et on étudie la courbe,espace tangent et espase cotongent et ses bases ,champs de vecteur sous le titre notion de l'espace tangent en un point de variété. On présente aussi la variété Riemannienne qui est une variété muni d'une métrique Riemannienne , on étudie les notions de la connexion , tenseurs , courbures ...

1.1 Notion de variété différentiable

1.1.1 Variété topologique

Définition 1.1. Soit M un ensemble non vide , M est dit une **variété topologique** de dimension n et de classe C^k , $k \geq 1$ si

— M est un espace topologique séparé.

— Pour tout $P \in M$ il existe un ouvert U de M contenant P et un homéomorphisme définie par $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$; de classe C^k.
Le couple (U,φ) est dit carte sur M.

Exemple 1.1. $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique (car $\mathbb{R}^n$ est un espace topologique séparé et on prend $U = \mathbb{R}^n$, $\varphi = Id_{\mathbb{R}^n}$)

Remarque 1.1. Deux cartes (U,φ) et (W,ψ) sur M sont compatibles (équivalentes) si

— $U \cap W \neq \varnothing$.

— $\psi \circ \varphi^{-1} : \psi(U \cap W) \longrightarrow \varphi(U \cap W)$ est difféomorphisme.

1.1.2 Atlas sur une variété

Définition 1.2. Un atlas $\mathcal{A}$ sur M de dimension n et de classe C^k $(k \geq 1)$ est une famille de cartes notée $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$,telque

1. Les ouverts U_i recouvrent M c'est à dire $M = \underset{i\in I}{\cup} U_i, \forall i \in I$.
2. Tout les cartes de $\mathcal{A}$ sont compatibles deux à deux

Exemple 1.2. Soit $\mathbb{R}$ une variété topologique ;soient $U =]-\infty,0[$, $W =]-1,+\infty[$ on définit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & U & \longrightarrow & \varphi(U) \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) = \ln(-x) \end{array}$$

et $\psi : \begin{array}{ccl} W & \longrightarrow & \psi(W) \\ x & \longmapsto & \psi(x) = x \end{array}$

-On a $U \cap W \neq \varnothing$ car $\dfrac{-1}{2} \in U$ et $\dfrac{-1}{2} \in W$ et $U \cup W = \mathbb{R}$

φ et ψ sont continues et φ^{-1} ,ψ^{-1} sont aussi continues .Ils sont bijectives donc φ et ψ sont des homéomorphismes.

$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \ln(-x)$ est bijective et de classe C^1 et $(\varphi \circ \psi^{-1})^{-1} = e^{-x}$ est de classe C^1 donc $\varphi \circ \psi^{-1}$ est difféomorphisme alors la famille $\{(]-\infty,0[, \ln(-x)), (]-1,+\infty[,x)\}$ est un atlas sur $\mathbb{R}$.

1.1.3 Variété différentiable

Définition 1.3. Soit M une variété topologique de dimension n et de classe C^k $(k \geq 1)$ on dit que M est une **variété différentiable** de classe C^k $(k \geq 1)$si

il existe un atlas $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ de M telque pour tout i, j telque $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ l'application

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe C^k.

Remarque 1.2.

1. Dans toute la suite ,les variétés différentiables seront prises de classe C^∞ et toutes les cartes seront prises de classe C^∞.
2. La stucture de variété différentiable de classe C^k de dimension n est la donnée d'un couple $(M,\mathcal{A})$ où M est une variété topologique et $\mathcal{A}$ est un atlas.

Système de coordonnées Soit (U,φ) une carte de la variété différentiable M pour $p \in U$,$\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \ldots\ldots, x^n(p))$, on appelle le coordonnées de p dans la carte (U,φ) et $(x^1,x^2,\ldots\ldots,x^n)$ sont les applications coordonnées.

Exemple 1.3. $S^2 = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$ est une variété différentiable de dimension 2 et de classe C^∞.

En effet :$\exists$ $U_1 = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$,$U_2 = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ deux ouverts de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, puisque leurs complémentaires sont fermés .

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^2 \\ M_1 & \longmapsto & \varphi_1(M_1) = M' \end{array}$$

Avec $M_1 = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $M^{'} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $N = (0,0,1) \in S^2$,

$\overrightarrow{NM_1} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z-1 \end{pmatrix}$, $M^{'} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{NM^{'}} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{NM_1} // \overrightarrow{NM^{'}} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \overrightarrow{NM_1} = \overrightarrow{NM^{'}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda X = \xi_1 \\ \lambda Y = \xi_2 \\ \lambda (Z-1) = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{1}{1-Z}$$

donc $\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{X}{1-Z} \\ \xi_2 = \dfrac{Y}{1-Z} \end{cases}$

alors $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} & \longmapsto & \left(\dfrac{X}{1-Z}, \dfrac{Y}{1-Z}\right) \end{array}$ avec $1 - Z \neq 0$

1. φ_1 est continue sur U_1 car ses composantes sont continues sur U_1
2. φ_1 est surjective par construction car $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \varphi_1(U_1)$

-En effet φ_1 est injective par définition : Soient $(X,Y,Z), \left(X^{'},Y^{'},Z^{'}\right) \in U_1$

$$\varphi_1(X,Y,Z) = \varphi_1\left(X^{'},Y^{'},Z^{'}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{X}{1-Z} = \dfrac{X^{'}}{1-Z^{'}} \\ \dfrac{Y}{1-Z} = \dfrac{Y^{'}}{1-Z^{'}} \end{cases} \quad (1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{X^2}{(1-Z)^2} = \dfrac{X^{'^2}}{(1-Z^{'})^2} \\ \dfrac{Y^2}{(1-Z)^2} = \dfrac{Y^{'^2}}{(1-Z^{'})^2} \end{cases} \quad (2)$$

$(2) \Longrightarrow$

$$\frac{X^2+Y^2}{(1-Z)^2} = \frac{X^{'^2}+Y^{'^2}}{(1-Z^{'})^2} \Leftrightarrow \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} = \frac{1-Z^{'^2}}{(1-Z^{'})^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(1-Z)(1+Z)}{(1-Z)^2} = \frac{\left(1-Z'\right)\left(1+Z'\right)}{(1-Z')^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1+Z}{1-Z} = \frac{1+Z'}{1-Z'} \Rightarrow (1+Z)\left(1-Z'\right) = (1-Z)\left(1+Z'\right)$$

$$\Rightarrow Z = Z'.$$

On remplace ce résultat dans (1), on obtient $\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \end{cases}$ En effet $(X,Y,Z) = (X',Y',Z')$ donc φ_1 est injective sur U_1. ainsi φ_1 est bijective . $\varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow U_1$;
$\overrightarrow{NM_1} = \mu\overrightarrow{NM'}$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z-1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \mu\xi_1 \\ Y = \mu\xi_2 \\ Z = -\mu+1 \end{cases} \Rightarrow \mu = 1-Z.$$

On a $X^2+Y^2+Z^2 = 1$ c'est à dire $Z \neq 1$ donc $\mu \neq 0$.

$\mu^2\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right) + (1-\mu)^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = \dfrac{2}{\xi_1^2+\xi_2^2+1}$ donc

$$\begin{array}{llll} \varphi_1^{-1}: & \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U_1 \\ & (\xi_1,\xi_2) & \longmapsto & \left(\dfrac{2\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2+1}, \dfrac{2\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2+1}, \dfrac{\xi_1^2+\xi_2^2-1}{\xi_1^2+\xi_2^2+1}\right) \end{array}$$

φ_1^{-1} est continue ,donc φ_1 est un homéomorphisme sur U_1. De mème maniére pour φ_2 , avec $\overrightarrow{SM}_1 // \overrightarrow{SM'}$ telle que $S = (0,0,-1)$

$$\begin{array}{llll} \varphi_2: & U_2 & \longrightarrow & \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} & \longmapsto & \varphi_2(X,Y,Z) = \left(\dfrac{X}{Z+1}, \dfrac{Y}{Z+1}\right) \end{array}$$

avec $Z+1 \neq 0$

$$\begin{array}{llll} \varphi_2^{-1}: & \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U_2 \\ & (\xi_1,\xi_2) & \longmapsto & \left(\dfrac{2\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2+1}, \dfrac{2\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2+1}, \dfrac{1-\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2+1}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}: & \varphi_2\left(U_1\cap U_2\right) & \longrightarrow & \varphi_1\left(U_1\cap U_2\right) \\
& (\xi_1,\xi_2) & \longmapsto & \varphi_1\circ\varphi_2^{-1}\left(\xi_1,\xi_2\right) = \varphi_1\left(\dfrac{2\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2+1},\dfrac{2\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2+1},\dfrac{1-\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_1^2+\xi_2^2+1}\right) \\
& & & = \left(\dfrac{\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2},\dfrac{\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\right)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}: & \varphi_1\left(U_1\cap U_2\right) & \longrightarrow & \varphi_2\left(U_1\cap U_2\right) \\
& (\xi_1,\xi_2) & \longmapsto & \varphi_2\circ\varphi_1^{-1}\left(\xi_1,\xi_2\right) = \varphi_2\left(\dfrac{2\xi_1}{\xi_1^2+\xi_2^2+1},\dfrac{2\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2+1},\dfrac{\xi_1^2+\xi_2^2-1}{\xi_1^2+\xi_2^2+1}\right) \\
& & & = (-\xi_1,-\xi_2)
\end{array}$$

$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$, $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$ sont de classe C^∞ car leurs composantes sont de classe C^∞.

Alors S^2 est dite une varieté différentiable de dimension 2 et de classe C^∞.

$\cdot$ $\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$ est un atlas sur S^2.

Remarque 1.3. On peut généraliser pour
$S^n=\left\{(x_1,.....,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}/\ x_1^2+.....+x_{n+1}^2=1\right\}$ est une variété différentiable de dimension n et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.2 Notion d'espace tangente en un point de variété

1.2.1 Courbe tracée sur une variété

Définition 1.4. Une **courbe** tracée sur une variété différentiable M de dimension n et de classe C^k ($k\geq 1$ ou C^∞) est l'application γ de classe C^k ($k\geq 1$ *ou* C^∞).avec

$$\begin{array}{llll}
\gamma: & I\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & M \qquad (\text{avec } 0\in I). \\
& t & \longmapsto & \gamma(t)
\end{array}$$

On note par

$\mathfrak{C}(M,\gamma)=\{\text{courbe tracé sur } M,\gamma \text{ passant par } P, \text{ tel que } \gamma(0)=P\}$.

On va définir une relation $\mathcal{R}$ tel que

$\forall\gamma_1,\gamma_2\in\mathfrak{C}(M,\gamma):\gamma_1\mathcal{R}\gamma_2\Leftrightarrow\exists(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ tel que $\dfrac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma_1)_{/t=0}=\dfrac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma_2)_{/t=0}$

Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

En effet

i)Soit $\gamma \in \mathfrak{C}(M,\gamma)$, $\forall (U,\varphi) \in \mathcal{A}$ on a $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{/t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_{/t=0}$ alors $\gamma \mathcal{R} \gamma$ en effet $\mathcal{R}$ est réfléxive.

ii) Soient $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathfrak{C}(M,\gamma)$ $\gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2 \Leftrightarrow \exists (U,\varphi) \in \mathcal{A}$ tel que $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{/t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{/t=0}$

comme l'égalité est symétrique dans $\mathbb{R}^n$,alors $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{/t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{/t=0}$ donc ,$\gamma_2 \mathcal{R} \gamma_1 \Rightarrow \mathcal{R}$ est symétrique.

iii) Soient $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3 \in \mathfrak{C}(M,\gamma)$,on a $\gamma_1 \mathcal{R} \gamma_2$ et $\gamma_2 \mathcal{R} \gamma_3 \Leftrightarrow \exists (U,\varphi), (V,\psi) \in \mathcal{A}$ tel que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{/t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{/t=0} \\ \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)_{/t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_3)_{/t=0} \end{cases}$$

On considére que $U \cap V \neq \varnothing$:
$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{/t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma_1)_{/t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma_2)_{/t=0}$
On utilise $D(f \circ g)(x) = (Df(g(x)))\, Dg(x)$
alors $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{/t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma_2)_{/t=0}$ on pose $f = \varphi \circ \psi^{-1}$ et $g = \psi \circ \gamma_2$
donc $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{/t=0} = (D(\varphi \circ \psi^{-1}))(\psi \circ \gamma_2)_{/t=0}\left[\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)_{/t=0}\right]$
On a

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)_{/t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_3)_{/t=0}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{/t=0} &= \left(D\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\right)(\psi \circ \gamma_2)_{/t=0}\left[\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_3)_{/t=0}\right] \\ &= \left(D\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\right)(\psi \circ \gamma_3 + k)_{/t=0}\left[\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_3)_{/t=0}\right] \quad (k \quad constante) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma_3\right)_{/t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_3)_{/t=0} \Rightarrow \gamma_1 \mathcal{R} \gamma_3 \end{aligned}$$

Enfin $\mathcal{R}$ est transitive alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

1.2.2 Espace tangent et Espace cotangent

Définition 1.5. Un espace tangent à M en p est l'ensemble des classes d' équivalences des courbes tangentes en p pour la relation $\mathcal{R}$ .On note $\overline{\gamma}$ ou $[\gamma]$ pour les classes d'équivalence et l'espace tangent en $p = \gamma(0)$ par T_pM

L'espace cotangent T_pM est un espase vectoriel alors il est possible de considérer son dual ,notons T_p^*M ,c'est l'espace cotangent,l'ensemble des applications linéaires continues définient par $f \in T_p^*M$ c'est à dire $f : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est lui méme un espace vectoriel,de méme dimension de T_pM.

Une base de l'espace tangent et Une base de l'espace cotangent

L'espace tangent de M au point p noté T_pM muni d'une base

$$e_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Et tous les vecteurs dans cette espace s'écrivent toujours dans cette base

$$w = w^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Exemple 1.4. tous les formes de la géométrie Riemannienne s'écrivent dans cette base.

L'espace cotangent de M au point p noté T_p^*M est un espace dual de T_pM c'est-à-dire est l'ensemble des formes linéaires et continués sur T_pM, l'espace cotangent muni de la base suivante

$$e^\beta = dx^\beta$$

Avec $\langle e^\beta, e_\alpha \rangle = \delta_\alpha^\beta$ vérifiant bien la relation d'ortho-normalisation

Et tous les vecteurs dans cette espace s'écrivent toujours dans cette base

$$w = w_\beta dx^\beta$$

Exemple 1.5. tous les formes des formes différentielles s'écrivent dans cette base

1.2.3 Fibré tangent et Fibré cotangent

Définition 1.6. On appelle fibré tangent TM sur une variété différentiable M de dimension m l'union disjointe des espaces tangents T_pM aux points p

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

On appelle fibré cotangent T^*M sur une variété différentiable M de dimension m l'union disjointe des espaces cotangents T_p^*M

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

1.2.4 Champ de vecteurs

Définition 1.7. Une **champ de vecteurs** sur M est une application différentiable définie par :

$$\begin{array}{rccl} X: & M & \longrightarrow & T_pM \\ & p & \longmapsto & X(p) = X_p \end{array}$$

tel que $X(p) \in T_pM$ où X_p est le vecteur tangent de M en p .On note l'ensemble des champs de vecteurs par $\mathfrak{X}(M)$.

1.2.5 Dérivation et champs de vecteurs

On considére l'ensemble

$$C^\infty(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^\infty\}.$$

Soit l'application $D : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ vérifie la relation :

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

Tout champs vecteurs définit un dérivation sur $C^\infty(M)$ par la relation :

$$(Xf)(p) = X(p)f$$

S'écrit par :

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Donc nous identifions $\mathfrak{X}(M)$ aux dérivations de $C^\infty(M)$.

1.2.6 Application différentiable sur une variété différentiable

Définition 1.8. Soient $(M,\mathcal{A})$,$(N,\mathcal{B})$ deux variétés différentiables de dimension n,m respectivement.Une application $f : M \longrightarrow N$ est différentiable de classe C^r si pour tout $p \in M$,il exist une carte $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ autour de p,de classe C^r,et une carte $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ de classe C^r,telles que $f(U) \subset V$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit de classe C^r.

Exemple 1.6. Soient $(S^2,\mathcal{A})$,$(S^2,\mathcal{B})$ deux variétés différentiables de dimension 2 sur $\mathbb{R}^3$ et l'application f :

$$\begin{array}{rcl} S^2 & \longrightarrow & S^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x,y,z) \end{array}$$

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Soit $(U_1,\varphi_1) \in \mathcal{A}$ de S^2,on prend $U_1 = S^2/\{(0,0,1)\}$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 & \longrightarrow & \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \varphi_1(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right) \end{array}$$

φ_1 est de classe C^∞ sur U_1 alors (U_1,φ_1) de classe C^∞ .

Soit $(U_2,\varphi_2) \in \mathcal{B}$,on prend $U_2 = S^2/\{(0,0,-1)\}$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 & \longrightarrow & \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \varphi_2(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}\right) \end{array}$$

φ_2 est de classe C^∞ sur U_2 alors (U_2,φ_2) de classe C^∞ et $f(U_1) \subset U_2$.

En effet $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(x,y) &= \varphi_2 \circ f\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) \text{ (exemple de variété)} \\ &= \varphi_2\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) \\ &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ est de classe C^∞ alors f est différentiable de classe C^∞.

Proposition 1.1. *Soient f et g deux fonctions de classe C^r telle que*

$f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow K$ Alors $g \circ f$ est de classe C^r.

Preuve Soient $f : M \longrightarrow N$ de classe C^r c'est-à-dire il existe (U,φ) de M et (V,ψ) de N sont de classe C^r telle que $f(U) \subset V$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^r, et $g : N \longrightarrow K$

de classe C^r c'est- à-dire il existe (U_1,ϕ) de N et (V_1,w) de K sont de classe C^r telle que $g\,(U_1) \subset V_1$ et $w \circ g \circ \phi^{-1}$ est de classe C^r.

En effet $g \circ f : M \longrightarrow K$ on suppose que $f\,(U) = U_1 \subset V$ et $\psi = \phi\ \forall p \in N$ $\Rightarrow g \circ f\,(U) \subset V_1$.

$w \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = w \circ g \circ \phi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ comme $w \circ g \circ \phi^{-1}$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sont de classe C^r alors $w \circ g \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de C^r donc $g \circ f$ est de classe C^r. □

1.2.7 Application tangente linéaire

Définition 1.9. Soient M et N deux variété , $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable **, l'application tangente linéaire** de f en $p \in M$ est :

$$\begin{array}{rccl} df : & T_pM & \longrightarrow & T_{f(p)}N \\ & x & \longmapsto & df\,(x) = d_x f = \dfrac{d}{dt}\,(f \circ \gamma)\,(0) \end{array}$$

où γ est une courbe passant par p.et $\gamma^{'}\,(0) = x$

1.2.8 Pull back et push forward de ϕ

soit ϕ une application d'une variété M vers une variété N, avec l'inverse ϕ^{-1} , pour les éléments $x \in N$ et $y \in M$ et deux champs $X \in \mathfrak{X}(N)$ et $Y \in \mathfrak{X}(M)$
on définit Le pull back de ϕ est $\phi^* : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$ tel que $(\phi^* X)(y) = d\phi_y^{-1}(X_{\phi_y})$
Le push forward de ϕ est $\phi_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$ tel que $(\phi_* Y)(x) = d\phi_y^{-1}(X_y)$

Propriétés 1.1. Soit ϕ une application entre deux variétés différentiables, et f une application $\phi^* f = f \circ \phi$

1.3 Variété Riemannienne

1.3.1 La métrique Riemannienne

Définition 1.10. Une **métrique Riemannienne** g sur une variété différentiable M est la donnée d'application $g :$

$$\begin{array}{rccl} & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & C^\infty\,(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & g\,(X,Y) \end{array}$$

$C^{\infty}(M)$ −bilinéaire tel que

1. g application symétrique c'est-à-dire $g(X,Y) = g(Y,X) \ \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.
2. g est définie positive c'est-à-dire $g(X,X) \geq 0 \ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.
3. g non dégénérée c'est-à-dire $g(X,X) = 0 \Longrightarrow X = 0_{\mathfrak{X}(M)}$.

Commentaire Soit $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ $(U,x^1,.....,x^n)$ système de coordonées de X et $\left(U,\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ le repère de l'espace tangent et dx^i la base de l'espace dual.

1. On note $g_{ij} = g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)$ la matrice associée à g , comme g est symétrique
$$g_{ij} = g_{ji} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$
2. g définie positive c'est-à-dire $\det(g_{ij}) > 0$.
3. g est non dégénérée c'est-à-dire $\det(g_{ij}) \neq 0$.

1.3.2 Variété Riemannienne

Définition 1.11. Une **variété Riemannienne** est le couple (M,g) tel que M est une variété différentiable et g est une métrique Riemannienne.

Exemple 1.7. $g = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} dx_i \otimes dx_j = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$.

la matrice associe à g est $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,ou

$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$,$\forall\ i,j = 1,2,3.$

1. g est bilinéaire. car soient $X_1,X_2,Y_1,Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$,$f,h \in C^{\infty}(M)$

$$\begin{aligned} g(fX_1 + hX_2,Y) &= dx(fX_1 + hX_2)dx(Y) + dy(fX_1 + hX_2)dy(Y) \\ &\quad + dz(fX + hX_1)\,dz(Y) \\ &= fdx(X_1)\,dx(Y) + hdx(X_2)\,dx(Y) + fdy(X_1)dy(Y) \\ &\quad + hdy(X_2)dy(Y) + fdz(X_1)dz(Y) + hdz(X_2)dz(Y) \\ &= fg(X_1,Y) + hg(X_2,Y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(X,fY_1+hY_2\right) &= (dx)^2\left(X,fY_1+hY_2\right)+(dy)^2\left(X,fY_1+hY_2\right) \\ &\quad +(dz)^2\left(X,fY_1+hY_2\right) \\ &= fg\left(X,Y_1\right)+hg\left(X,Y_2\right). \end{aligned}$$

2. $\det\left(g_{ij}\right)=1\neq 0$ alors g non dégénérée .
3. $g_{12}=g_{21}=0$ et $g_{13}=g_{31}=0$ et$g_{23}=g_{32}=0$ alors g est symétrique .
4. $\det(g_{ij})>o$ car $1>0$ alors g est définie positive .

   alors g est une métrique riemannienne

Exemple 1.8. :$g=x^2\left(dx\right)^2+x\left(dy\right)^2+\left(dz\right)^2$ est -elle métrique Riemannienne, la matrice associe à g est $g_{ij}=g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)$

Soient (U,x^1,x^2,x^3) systéme de coordonneés locales.
$\left(U,\dfrac{\partial}{\partial x^1},\dfrac{\partial}{\partial x^2},\dfrac{\partial}{\partial x^3}\right)$ repére locale .
(U,dx^1,dx^2,dx^3) corepére locale.
$g_{ij}=g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)$ donc $g_{11}=x^2$,$g_{12}=0$,$g_{22}=x$,$g_{23}=0$,$g_{13}=0$,
$g_{21}=0$,$g_{33}=1;g_{31}=0;g_{32}=0$

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. g est bilinéaire puisque : Soient $X_1,X_2,Y_1,Y_2\in\mathfrak{X}(M)$,$f,h\in C^\infty\left(M\right)$.

$$\begin{aligned} g\left(fX_1+hX_2,Y\right) &= x^2(dx)^2\left(fX_1+hX_2,Y\right)+x(dy)^2\left(fX_1+hX_2,Y\right) \\ &\quad +(dz)^2\left(fX_1+hX_2,Y\right) \\ &= x^2dx(fX_1+hX_2)dx\left(Y\right)+xdy(fX_1+hX_2)dx(Y) \\ &\quad +dz\left(fX+hX_1\right)dz\left(Y\right) \\ &= \begin{aligned} &fx^2dx\left(X_1\right)dx\left(Y\right)+hx^2dx\left(X_2\right)dx\left(Y\right)+fxdy(X_1)dy(Y) \\ &\quad +hxdy(X_2)dy(Y)+dz(X_1)dz(Y)+hdz(X_2)dz(Y) \end{aligned} \\ &= fg\left(X_1,Y\right)+hg\left(X_2,Y\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\left(X,fY_1+hY_2\right) &= x^2(dx)^2\left(X,fY_1+hY_2\right)+x(dy)^2\left(X,fY_1+hY_2\right) \\ &\quad +(dz)^2\left(X,fY_1+hY_2\right) \\ &= fg\left(X,Y_1\right)+hg\left(X,Y_2\right) \end{aligned}$$

2. $\det(g_{ij}) = x^3$, $(x^3 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 0)$ donc g est non dégénérée .
3. On a $g_{12} = g_{21} = 0$ et $g_{13} = g_{31} = 0$ et $g_{23} = g_{32} = 0$ (la matrice (g_{ij})) alors g est symétrique .
4. $\det(g_{ij}) = x^3 > 0$ si $x > 0$ donc g est définie positive si $x > 0$.

   alors g est une métrique Riemannienne si et seulement si $x > 0$.

Définition 1.12. Pour tout $p \in M$ l'espace vectoriel est définit par

$$T_p^{(s,r)}M = \underbrace{T_pM \otimes \ldots \otimes T_pM}_{s\ fois} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \ldots \otimes T_p^*M}_{r\ fois}$$

où T_p^*M est l'espace dual de T_pM.

$T \in T_p^{(s,r)}M$ est un **tenseur** de type (s,r) au dessus de p

1.3.3 Connexion sur une variété différentiable

Définition 1.13. Une **connexion linéaire** est une application notée

$$\begin{array}{rccc} \nabla : & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla(X,Y) \end{array}$$

telle que pour tout $X,X_1,Y,Y_1 \in \mathfrak{X}(M)$, et f une application différentiable sur M

1. Linéaire par rapport à X i,e :$\nabla_{X+X_1}Y = \nabla_X Y + \nabla_{X_1}Y$.
2. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$: linéarité sur le premier argument.
3. Linéaire par rapport à Y $\nabla_X(Y + Y_1) = \nabla_X Y + \nabla_X Y_1$.
4. $\nabla_X f(Y) = f\nabla_X Y + (X \cdot f)(Y)$.

Notation $\nabla_X f = X(f) = \partial_X(f)$. □

Trouvons l'expresion en coordonnée locale de $\nabla_X Y$

Soit $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ $\forall X \in \mathfrak{X}(M) : X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y \in \mathfrak{X}(M), Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_i X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \qquad \text{d'aprés (2) } (X^i \in C^\infty(M)) \end{aligned}$$

$$= \sum_i X^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_j Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

On utilise la notation suivante $\nabla_X f = X(f) = \partial_X(f)$.

On obtient $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \sum_j Y^j = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sum_j Y^j\right) = \partial_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \sum_j Y^j = \partial_i \sum_j Y^j$ notons $\partial_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \partial_i$.

$$\nabla_X Y = \sum_i X^i \left(\partial_i \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_j Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

On prend $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$

Alors $\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^{n} X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Γ_{ij}^k est appele symbole de Christoffel.

C**rochet de Lie** Soient $X; Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Le crochet de Lie est antisymétrique en X et Y.

L'expresion locale de crochet de Lie est : $[X,Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$.

L'identité de jacobi $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

En effet soient $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned}
[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] &= [X,YZ-ZY] + [Y,ZX-XZ] + [Z,XY-YX] \\
&= (X(YZ-ZY) - (YZ-ZY)X) + Y(ZX-XZ) \\
&\quad - (ZX-XZ)Y + (Z(XY-YX) - (XY-YX)Z) \\
&= XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ \\
&\quad - ZXY + XZY + ZXY - ZYX - XYZ + YXZ \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{On a } \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] &= \Big(\frac{\partial f \circ \varphi_i^{-1}}{\partial u_i} \circ \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f \circ \varphi_j^{-1}}{\partial u^j} \circ \varphi_j \right) \\
&\quad - \frac{\partial f \circ \varphi_i^{-1}}{\partial u^i} \circ \varphi_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f \circ \varphi_j^{-1}}{\partial u^j} \circ \varphi_j \right) \Big) \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= 0
\end{aligned}$$

1.3.4 Torsion et courbure

Définition 1.14. La **torsion** d'une connexion est le tenseur de type (1,2) défini par l'expréssion

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

Remarque 1.4. T est $C^\infty(M)$ −bilinéaire .

L'expresion locale de T

$$\begin{aligned} T: \ \mathfrak{X}(M)\,\mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) &\longmapsto T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

$(X,Y) \in \mathfrak{X}(M)\,\mathfrak{X}(M) \Longrightarrow X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$T(X,Y) = \sum_{i,j} (X^i Y^j - Y^i X^j) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Définition 1.15. La **courbure** est un tenseur de type (1,3) défini par :

$$R(X,Y)Z = \left(\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right) Z$$

Remarque 1.5. : $T(X,Y) = -T(Y,X)$.

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z.$$

$R(X,Y)Z = R\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}$;tall que $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}; Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j};$

$Z = Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}$

$$= X^i Y^j Z^k \left[R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}\right]^l \frac{\partial}{\partial x^l}$$

On note $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_i$ et $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ et

$$\begin{aligned} R^l_{ijk} &= \left[R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}\right]^l \\ &= \left[\nabla_i\left(\nabla_j\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) - \nabla_j\left(\nabla_i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]} \frac{\partial}{\partial x^k}\right]^l \\ &= \left[\nabla_i\left(\Gamma^m_{jk} \frac{\partial}{\partial x^m}\right) - \nabla_j\left(\Gamma^m_{ik} \frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right]^l \quad \text{car } \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \end{aligned}$$

$$= \left[\left(\nabla_i\left(\Gamma^m_{jk}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^k_{im}\frac{\partial}{\partial x^k} - \left(\nabla_j\left(\Gamma^m_{ik}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^m} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^k_{jm}\frac{\partial}{\partial x^k}\right]^l$$
$$= \left[\partial_i\left(\Gamma^l_{jk}\right) + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \partial_j\left(\Gamma^l_{ik}\right) - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right]$$

Alors $R^l_{ijk} = \left[\partial_i\left(\Gamma^l_{jk}\right) + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \partial_j\left(\Gamma^l_{ik}\right) - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right]$

1.3.5 Notion de connexion Riemannienne

Soit (M,g) une variété riemannienne

Définition 1.16. On appelle connexion Riemannienne sur M et note ∇ la connexion associé à la métrique Riemannienne g toute connexion linéaire ∇ sur M vérifiant les conditions suivantes

1. On dit que la connexion ∇ est symétrique si le tenseur de torsion est nul $T = 0$. C'est-à-dire $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
2. Soit X et Y deux champs de vecteurs sur une variété M, si $\nabla_X Y = 0$, on dit que les deux champs X et Y sont courbement parallèle .

1.3.6 Commentaire

1. On $T\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k} = 0.$

En effet ,car $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}$

et

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right] \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\text{ car } \left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0) \\
&= \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k} \quad (\text{on a } \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}) \\
&= (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = 0 \Rightarrow (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) = 0$ car $\frac{\partial}{\partial x^k} \neq 0.$

Donc la connexion ∇ est de torsion T nulle cela signifie $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

2. $\nabla_X g = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.

Ona $\quad X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z) \ldots\ldots(1)$

$$Y(g(X,Z)) = g(\nabla_Y X,Z) + g(X,\nabla_Y Z) \ldots\ldots(2)$$

$$Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X,Y) + g(X,\nabla_Z Y) \ldots\ldots(3)$$

$$\begin{aligned}(1)-(2)+(3) &= g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z) - g(\nabla_Y X,Z) - g(X,\nabla_Y Z) + g(\nabla_Z X,Y) \\ &\quad + g(X,\nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X,Z) + g(X,\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) + 2g(Y,\nabla_Z X) \\ &\quad + g(Y,\nabla_X Z - \nabla_Z X)\end{aligned}$$

car $2g(Y,\nabla_Z X) + g(Y,\nabla_X Z - \nabla_Z X) = g(Y,\nabla_X Z) + g(\nabla_Z X,Y)$,et g symétrique .

En effet

$(1)-(2)+(3) = g([X,Y],Z) + g(X,[Z,Y]) + 2g(Y,\nabla_Z X) + g(Y,[X,Z])$

par suite

$$2g(\nabla_Z X,Y) = Xg(Y,Z) - Yg(X,Z) + Zg(X,Y) - g([X,Y],Z) - g(X,[Z,Y]) - g(Y,[X,Z]).$$

Alors

$$\begin{aligned}g(\nabla_Z X,Y) &= \frac{1}{2}(Xg(Y,Z) - Yg(X,Z) + Zg(X,Y) - g([X,Y],Z) - g(X,[Z,Y]) \\ &\quad - g(Y,[X,Z])), \qquad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)\end{aligned}$$

Expresion des symboles de Christoffel associées à la connexion Riemannienne ∇

On a $\quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$

alors

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2} g\left(\Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \Gamma_{ij}^l g\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \Gamma_{ij}^l g_{lk}.$$

D'autre part , on a

$$\begin{aligned}g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2} \Big(&\frac{\partial}{\partial x^j}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) - g\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right], \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &- g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right]\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right]\right)\Big)\end{aligned}$$

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ki}-\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ji}+\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk}).$$

car $(-g\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right],\frac{\partial}{\partial x^i}\right)-g\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\left[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^k}\right]\right)-g\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\left[\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^i}\right]\right)=0\ )$

donc $\Gamma^l_{ij}g_{lk}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ki}-\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ji}+\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk}))$

$\Longrightarrow \Gamma^l_{ij}=\frac{1}{2}g^{-1}_{lk}(\frac{\partial}{\partial x^j}g_{ki}-\frac{\partial}{\partial x^k}g_{ji}+\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jk}).$

On pose $\frac{\partial}{\partial x^i}=\partial_i$,par suite les symbole de Christoffel devient :

$$\boxed{\Gamma^l_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}g^{lk}(\partial_j g_{ki}-\partial_k g_{ji}+\partial_i g_{jk}).}$$

avec $g^{lk}g_{ki}=\delta_{li}=\begin{cases}1 & \text{si } l=i\\ 0 & \text{si } l\neq i\end{cases}$ la notation g^{lk} est la matrice inverse de g_{lk} c'est-à-dire $g^{lk}=[g_{lk}]^{-1}$

Exemple 1.9. Trouver les symboles de Christoffel de $g=\sin^2\varphi\,(d\theta)^2+(d\varphi)^2$

La matrice associe à g est $(g_{ij})=\begin{pmatrix}\sin^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow(g^{ij})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\varphi} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Alors $\Gamma^l_{ij}=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}g^{lk}(\partial_j g_{ki}-\partial_k g_{ji}+\partial_i g_{jk}).$

$\partial_1=\frac{\partial}{\partial\theta},\partial_2=\frac{\partial}{\partial\varphi}$

$l=1$

$\Gamma^1_{11}=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}g^{1k}(\partial_1 g_{k1}-\partial_k g_{11}+\partial_1 g_{1k})=\frac{1}{2\sin^2\varphi}\partial_1\sin^2\varphi.$

$\boxed{\Gamma^1_{11}=0}$

$\Gamma^1_{12}=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}g^{1k}(\partial_2 g_{k1}-\partial_k g_{21}+\partial_1 g_{2k})=\frac{1}{2\sin^2\varphi}\partial_2\sin^2\varphi.$

$\boxed{\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}(\cot\varphi)}$

$\boxed{\Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}(\cot\varphi)}$.

$\Gamma^1_{22}=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}g^{1k}(\partial_2 g_{k2}-\partial_k g_{22}+\partial_2 g_{2k})=\frac{1}{2}\frac{1}{2\sin^2\varphi}(2\partial_2(0)-\partial_1(1))=-\frac{1}{2\sin^2\varphi}\partial_1(1).$

$\boxed{\Gamma^1_{22}=0.}$

$l=2$

$\Gamma^2_{11}=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}g^{2k}(\partial_1 g_{k1}-\partial_k g_{11}+\partial_1 g_{1k})=\frac{1}{2}\partial_2\sin^2\varphi.$

$\boxed{\Gamma_{11}^{2} = -\cos\varphi\sin\varphi}$.
$\Gamma_{12}^{2} = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}g^{2k}(\partial_2 g_{k1} - \partial_k g_{21} + \partial_1 g_{2k}) = \frac{1}{2}\partial_1(1)$.
$\boxed{\Gamma_{12}^{2} = 0.}$
$\boxed{\Gamma_{21}^{2} = 0.}$
$\Gamma_{22}^{2} = \sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}g^{2k}(\partial_2 g_{k2} - \partial_k g_{22} + \partial_2 g_{2k}) = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{22}) = \frac{1}{2}\partial_2(1)$.
$\boxed{\Gamma_{22}^{2} = 0.}$
$\Gamma_{22}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \Gamma_{22}^{1} = \Gamma_{11}^{1} = 0.$

1.3.7 Courbure de variété Riemannienne

C'est une notion fondamentale en géométrie Riemannienne.

Définition 1.17. Soit (M,g) une variété riemannienne,∇ sa connexion .Son tenseur de courbure de type (1,3) , avec $\forall\, p \in M$ et (U,φ) est une carte de M au voisinage de p,noté R a les propriétés suivantes

1. R est antisymitrique par rapport aux deux premières variables , c'est-à-dire
$$R(X,Y) = -R(Y,X).$$
2. $R(X,Y)$ est antisymétrique par rapport à g , c'est-à-dire
$$g(R(X,Y)Z,U) = -g(R(X,Y)U,Z).$$
3. R vérifie l'identité de Bianchi algébrique
$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$
4. $$g(R(X,Y)Z,U) = g(R(Z,U)X,Y)$$
5. R vérifie l'identité de Bianchi différentielle :
$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0$$
où

$$R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$
$$R\,(X,Y,Z) = R\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}, Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = X^i Y^j Z^k \left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right)^l \frac{\partial}{\partial x^l}$$

Remarque 1.6. On note par $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_i$ et $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$

$$\begin{aligned}
R^l_{ijk} &= \left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right)^l \\
&= \left(\nabla_i\left(\nabla_j\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) - \nabla_j\left(\nabla_i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]} \frac{\partial}{\partial x^k}\right)^l \\
R^l_{ijk} &= \partial_i\left(\Gamma^l_{jk}\right) - \partial_j\left(\Gamma^l_{ij}\right) + \sum_{m=1}^{n} (\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}).
\end{aligned}$$

Exemple 1.10. Méme exemple précidente (3.1.13) $g = \sin^2\varphi\,(d\theta)^2 + (d\varphi)^2$

on va calculer R^l_{ijk} avec $i,j,k,l,m = 1,2$.
On pose $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}$ et $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$.
$R^1_{111}, R^1_{112}, R^1_{121} = -R^1_{211}, R^1_{122} = -R^1_{212}, R^1_{212}, R^1_{221}, R^1_{222}$.
$R^2_{111}, R^2_{112}, R^2_{121} = -R^2_{211}, R^2_{122} = -R^2_{212}, R^2_{212}, R^2_{221}, R^2_{222}$.
Pour $l = 1$

$$R^1_{111} = \partial_1\left(\Gamma^1_{11}\right) - \partial_1\left(\Gamma^1_{11}\right) + \sum_{m=1}^{2} (\Gamma^1_{1m}\Gamma^m_{11} - \Gamma^1_{1m}\Gamma^m_{11}) = 0. \Longrightarrow \boxed{R^1_{111} = 0}$$

$$R^1_{112} = \partial_1\left(\Gamma^1_{12}\right) - \partial_1\left(\Gamma^1_{11}\right) + \sum_{m=1}^{2} (\Gamma^1_{1m}\Gamma^m_{12} - \Gamma^1_{1m}\Gamma^m_{12}) = \partial_1\left(\frac{1}{2}(\cot\varphi)\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{R^1_{112} = 0}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{121} &= \partial_1\left(\Gamma^1_{21}\right) - \partial_2\left(\Gamma^1_{12}\right) + \sum_{m=1}^{2} (\Gamma^1_{1m}\Gamma^m_{21} - \Gamma^1_{2m}\Gamma^m_{11}) \\
&= \partial_1\left(\frac{1}{2}(\cot\varphi)\right) - \partial_2\left(\frac{1}{2}(\cot\varphi)\right) \Longrightarrow \boxed{R^1_{121} = \frac{1}{2\sin^2\varphi}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{122} &= \partial_1\left(\Gamma^1_{22}\right) - \partial_2\left(\Gamma^1_{12}\right) + \sum_{m=1}^{2} (\Gamma^1_{1m}\Gamma^m_{22} - \Gamma^1_{2m}\Gamma^m_{12}) \\
&= \frac{1}{2\sin^2\varphi} - \left(\frac{1}{2}(\cot\varphi)\right)^2 \\
&= \frac{2-\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi} \Longrightarrow \boxed{R^1_{122} = \frac{2-\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi}}
\end{aligned}$$

$$R^1_{211} = -R^1_{121} = 0 \Longrightarrow \boxed{R^1_{211} = -\frac{1}{2\sin^2\varphi}}$$

$$R^1_{212} = -R^1_{122}$$

$$= \frac{-2+\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi} \Longrightarrow \boxed{R^1_{212} = \frac{-2+\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi}}$$

$$R^1_{221} = \partial_2\left(\Gamma^1_{21}\right) - \partial_2\left(\Gamma^1_{22}\right) + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma^1_{2m}\Gamma^m_{21} - \Gamma^1_{2m}\Gamma^m_{21}\right) = \partial_2\left(\frac{1}{2}(\cot\varphi)\right) = -\frac{1}{2\sin^2\varphi}$$

$$\Longrightarrow \boxed{R^1_{221} = -\frac{1}{2\sin^2\varphi}}$$

$$R^1_{222} = \partial_2\left(\Gamma^1_{22}\right) - \partial_2\left(\Gamma^1_{22}\right) + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma^1_{2m}\Gamma^m_{22} - \Gamma^1_{2m}\Gamma^m_{22}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{R^1_{222} = 0}$$

Pour $l = 2$

$$R^2_{111} = \partial_1\left(\Gamma^2_{11}\right) - \partial_1\left(\Gamma^2_{11}\right) + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma^2_{1m}\Gamma^m_{11} - \Gamma^2_{1m}\Gamma^m_{11}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{R^2_{111} = 0}$$

$$R^2_{112} = \partial_1\left(\Gamma^2_{11}\right) - \partial_1\left(\Gamma^2_{11}\right) + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma^2_{1m}\Gamma^m_{12} - \Gamma^2_{1m}\Gamma^m_{12}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{R^2_{112} = 0}$$

$$R^2_{121} = \partial_1\left(\Gamma^2_{21}\right) - \partial_2\left(\Gamma^2_{12}\right) + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma^2_{1m}\Gamma^m_{21} - \Gamma^2_{2m}\Gamma^m_{11}\right)$$

$$= -\cos\varphi\sin\varphi\frac{1}{2}(\cot\varphi)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos^2\varphi. \Longrightarrow \boxed{R^2_{121} = -\frac{1}{2}\cos^2\varphi.}$$

$$R^2_{211} = -R^2_{121} = \frac{1}{2}\cos^2\varphi. \Longrightarrow \boxed{R^2_{211} = \frac{1}{2}\cos^2\varphi.}$$

$$R^2_{122} = \partial_1\left(\Gamma^2_{22}\right) - \partial_2\left(\Gamma^2_{12}\right) + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma^2_{1m}\Gamma^m_{22} - \Gamma^2_{2m}\Gamma^m_{12}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{R^2_{122} = 0}$$

$$R^2_{212} = -R^2_{122} = 0 \Longrightarrow \boxed{R^2_{212} = 0}$$

$$R^2_{221} = \partial_2\left(\Gamma^2_{21}\right) - \partial_2\left(\Gamma^2_{22}\right) + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma^2_{2m}\Gamma^m_{21} - \Gamma^2_{2m}\Gamma^m_{21}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{R^2_{221} = 0}$$

$$R^2_{222} = \partial_2\left(\Gamma^2_{22}\right) - \partial_2\left(\Gamma^2_{22}\right) + \sum_{m=1}^{2}\left(\Gamma^2_{2m}\Gamma^m_{22} - \Gamma^2_{2m}\Gamma^m_{22}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{R^2_{222} = 0}$$

1.3.8 Courbure de Ricci et courbure Scalaire

Courbure (ou tenseur)de Ricci et courbure Scalaire.

Définition 1.18. Etant donné (M,g) variété Riemannienne et ∇ sa connexion .on définit la **courbure de Ricci** ou tenseur de Ricci par $R_{ij} = R^k_{kij}$

Et on définit la **courbure Scalaire** S de (M,g) par $S = g^{ij}R_{ij}$ telle que (g^{ij}) l'inverse de la matrice (g_{ij}) associé à g.

Exemple 1.11. Méme exemple (3.1.13) $\left(g = \sin^2\varphi\,(d\theta)^2 + (d\varphi)^2\right)$

Les composantes de courbure de Ricci :

$R_{ij} = R^k_{kij}$

$R_{11} = \sum_{k=1}^{2} R^k_{k11} = R^1_{111} + R^2_{211} = \frac{1}{2}\cos^2\varphi. \Longrightarrow \boxed{R_{11} = \frac{1}{2}\cos^2\varphi.}$

$R_{12} = \sum_{k=1}^{2} R^k_{k12} = R^1_{112} + R^2_{212} = 0 \Longrightarrow \boxed{R_{12} = 0}$

$R_{21} = \sum_{k=1}^{2} R^k_{k21} = R^1_{121} + R^2_{221} = 0 \Longrightarrow \boxed{R_{21} = 0}$

$R_{22} = \sum_{k=1}^{2} R^k_{k22} = R^1_{122} + R^2_{222} = \frac{2-\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi} \Longrightarrow \boxed{R_{22} = \frac{2-\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi}}$

Les composantes de coubure Scalaire :

$$S = \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} R_{ij} = g^{11}R_{11} + g^{21}R_{21} + g^{12}R_{12} + g^{22}R_{22}$$

$$= g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} = \frac{\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi} + \frac{2-\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi}.$$

$$\boxed{S = \frac{2+\cos^2\varphi}{4\sin^2\varphi}}$$

Chapitre 2

Applications harmoniques

Ce chapitre comprenait l'étude des applications harmoniques et la discussion de la premiére variation d'énergie et quelques exemples ainsi que la tenseur énergie impulsion.

2.1 Applications harmoniques

Définition 2.1.
Soient $(M^m,g),(N^n,h)$ deux variétés Riemanniennes, D un domaine compact de M, et $\varphi : (M^m,g) \to (N^n,h)$ de classe C^∞. On définit l'énergie de φ sur D par

$$E(\varphi,D) = \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2 v^g$$

Où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d\varphi$ définie par
$|d\varphi|^2 = \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i),d\varphi(e_i)) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} h(d\varphi(\partial_i),d\varphi(\partial_j))$
($\{e_i\}_{i=1}^m$ étant une base orthonormée locale sur (M^m,g), et $\{\partial_i\}_{i=1}^m$ est une base locale des champs de vecteurs associée à une carte (U,φ) de M^m). Où v^g est l'element de volume associé à g définit par $v^g = \sqrt{det(g_{ij})}dx^1 \wedge dx^2 \wedge .... \wedge dx^n$

Exemple 2.1. Soit l'application (transformation de Kelvin)

$$\begin{aligned}\varphi :&\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|^l}\end{aligned}$$

On calcule la norme de Hilbert-Schmidt de $d\varphi$

$$\begin{aligned}|d\varphi|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{ij}(h_{\alpha\beta}\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i})^2 \qquad (g_{ij}=\delta_{ij} \quad \text{et} \quad h_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta})\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(\frac{\partial}{\partial x_i}(x_\alpha\|x\|^{-l}))^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_i}\|x\|^{-l} - l\frac{x_i}{\|x\|}\|x\|^{-l-1}x_\alpha)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(\delta_{i\alpha}\|x\|^{-l} - lx_\alpha\|x\|^{-l-2}x_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}[\delta_{i\alpha}\|x\|^{-2l} + l^2x_\alpha^2\|x\|^{-2l-4}x_i^2 - 2\delta_{i\alpha}l\|x\|^{-2l-2}x_\alpha x_i]\\ &= \sum_{i=1}^{n}[\|x\|^{-2l} + l^2\|x\|^{-2l-4}x_i^4 - 2l\|x\|^{-2l-2}x_i^2]\\ &= n\|x\|^{-2l} + l^2\|x\|^{-2l} - 2l\|x\|^{-2l}\\ &= (n+l^2-2l)\|x\|^{-2l}.\end{aligned}$$

Exemple 2.2. (On calcule v^g)

On considére la sphére S^2 muni de la métrique $g = d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2$, alors

$$v^g = \sqrt{det(g_{ij})}d\theta\bigwedge d\varphi = |sin\theta|d\theta\bigwedge d\varphi$$

Définition 2.2.

Soient M et N deux variétés différentiables. Une variation à support dans un domaine compact $D \subset M$ d'une application φ : $(M,g) \to (N,h)$ de classe C^∞ est une famille d'applications $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)} \subset C^\infty(M,N)$ telles que $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_t = \varphi$ sur M \ int(D) (où int(D) est l'intérieur de D).

Définition 2.3. Une application $\varphi : (M^m,g) \to (N^n,h)$ de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes est dite harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle d'énergie $E(\varphi; D)$, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)|_{t=0} = 0$$

2.2 Premiére variation d'énergie

Proposition 2.1. *Soient $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ une application différentiable et φ_t une variation de φ à support inclue dans D. Alors*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t,D)|_{t=0} = -\int_D h(v,\tau(\varphi))v_g$$

où $v(x) = \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)|_{t=0}$ et $\tau(\varphi) = tr_g \bigtriangledown d\varphi$ est le champ de tension de l'application φ.

Preuve Soient $\{e_i\}$ une base orthonormée sur M et $\{\frac{d}{dt}\}$ base sur $(-\epsilon,\epsilon)$ alors $\{(e_i,0),(0,\frac{d}{dt})\}$ est une base local orthonormée pour la métrique diagonale sur la variété produit $M\times(-\epsilon,\epsilon)$, et on a le crochet de Lie $[(e_i,0),(0,\frac{d}{dt})] = 0$, pour tout $i = 1,.....,m$. on a $d\phi(e_i,0) = d\varphi(e_i)$ et $d\phi(0,\frac{d}{dt}) = v$.En effet ,remarquons que $d\phi(e_i,0) : M\times(-\epsilon,\epsilon) \to TN$

$$\begin{aligned} d\phi(e_i,0)_{(x,0)} &= d_x\phi_0(e_i|_x) + d_0\phi_x(0) \quad \text{(formule de leibniz)} \\ &= d_x\phi_0(e_i|_x) \\ &= d_x\varphi(e_i|_x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\phi(0,\frac{d}{dt})_{(x,0)} &= d_x\phi_0(0) + d_0\phi_x(\frac{d}{dt}|_{t=0}) \\ &= d\phi_x(\frac{d}{dt})|_{t=0} \\ &= v(x) \end{aligned}$$

avec $\phi_0(x) = \phi(x,0)$ et $\phi_x(t) = \phi(x,t)$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi_t,D)|_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\varphi_t(e_i),d\varphi_t(e_i))v_g|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\phi(e_i,0),d\phi(e_i,0))v_g|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_D \frac{\partial}{\partial t}h(d\phi(e_i,0),d\phi(e_i,0))|_{t=0}v_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0),d\phi(e_i,0))|_{t=0}v_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt}),d\phi(e_i,0))|_{t=0}v_g \\
&= \int_D h(\nabla^{N}_{d\varphi(e_i)}v,d\varphi(e_i))v_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\varphi}_{(e_i)}v,d\varphi(e_i))v_g
\end{aligned}$$

soit $w(*) = h(v,d\varphi(*))$1-forme sur M, alors

$$\begin{aligned}
divw &= (\nabla_{e_i}w)e_i \\
&= e_i(w(e_i)) - w(\nabla_{e_i}e_i) \\
&= e_i(h(v,d\varphi(e_i))) - h(v,d\varphi(\nabla_{e_i}e_i)) \\
&= h(\nabla^{\varphi}_{(e_i)}v,d\varphi(e_i)) + h(v,\tau(\varphi))
\end{aligned}$$

et comme $\int_D divwv_g = 0$ on obtient $\frac{d}{dt}E(\varphi_t,D)|_{t=0} = -\int_D h(v,\tau(\varphi))v_g$ □

Théorème 2.2. *Une application différentiable , $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ est harmonique si et seulement si $\tau(\varphi) = traceg\nabla\varphi = 0$*

Remarque 2.1. Le champ de tension d'une application $\varphi \in C^{\infty}(M,N)$ entre deux variétés Riemanniennes est donné (localement) par

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi) &= g^{ij}(\nabla d\varphi)(\partial_i,\partial_j) \\
&= g^{ij}(\frac{\partial^2\varphi^{\gamma}}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial x^j}{}^{N}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\varphi - \frac{\partial\varphi^{\gamma}}{\partial x^k}{}^{M}\Gamma^{k}_{ij})\frac{\partial}{\partial y^{\gamma}}\circ\varphi.
\end{aligned}$$

2.3 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 2.3. soit

$$\begin{aligned}
f : &\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\
&(x,y) \longmapsto f(x,y) = e^x \sin y
\end{aligned}$$

on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x \sin y$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \sin y$
donc

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y) &= e^x \sin y - e^x \sin y \quad (\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc f est une fonction harmonique

Exemple 2.4. soient p et q deux fonctions

$$\begin{aligned} p :& U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto p(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q :& U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto q(x,y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (x,y) \longmapsto f(x,y) = p(x,y) + iq(x,y) \end{aligned}$$

f est holomorphe $\Leftrightarrow$ f est harmonique $\Leftrightarrow$ p,q sont harmoniques ($\Delta p = \Delta q = 0$)
(sachaut que f est holomorphe si $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 q}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 q}{\partial x \partial y}$)

Exemple 2.5. Soient (M,g) et (N,h)deux variétés riemanniennes, pour$y \in N$ fixe, toute application constante $\phi : M \to N, \phi(x) = y$ est harmonique car la densité de la fonction ϕ est null. c'est-à-dire pour tout $x \in M, e(\phi)(x) = \frac{1}{2}|d_x\phi|^2 = 0$

Exemple 2.6. L'application identité$Id_M : (M,g) \to (M,g), x \to x$ est totalement géodésique (c'est-à-dire $\nabla Id_M = 0$). Donc Id_M est harmonique.

Exemple 2.7. On pose$(N,h) = (\mathbb{R}^k, \langle .,. \rangle_{\mathbb{R}^k})_{k=1,..,n}$ et notons par $\phi = (\phi_1,...,\phi_n)$, l'application $\phi \in C^\infty(M,\mathbb{R}^k)$. Alors : $\phi : (M,g) \to (\mathbb{R}^k, \langle .,. \rangle_{\mathbb{R}^k})_{k=1,..,n}$ est harmonique si et seulement si $(\triangle\ \phi_i)_{i=1,..,k} = 0$ c'est à dire si et seulement si chaque ϕ_i est harmonique, $\forall i = 1,...,k$.

Exemple 2.8. Posons$M = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Alors l'application $\gamma : [a,b] \to N$est une courbe sur N et on a $\tau(\phi) = 0$ si et seulement si

$$\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} +^N \Gamma^\alpha_{\beta\xi} \circ \gamma \frac{d\gamma^\beta}{dt}\frac{d\gamma^\xi}{dt} = 0$$

Donc, γ est harmonique si et seulement si γest géodésique .
(Sachant qu'une courbe géodisique est la plus courte courbe tracée sur la variété c'est-à-dire $\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} +^N \Gamma^\alpha_{\beta\xi} \circ \gamma \frac{d\gamma^\beta}{dt}\frac{d\gamma^\xi}{dt} = 0$)

Exemple 2.9. Soient S une surface dans $\mathbb{R}^3$, et $\varphi : (\Omega,\langle,\rangle_{\mathbb{R}^2}) \to (\mathbb{R}_3,\langle,\rangle_{\mathbb{R}^3})$ une paramétrisation locale de S (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$) telle que

$$\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\|^2 = \|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\|^2, \langle\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y}\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$$

.
soient $N = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial y}\|}$ le champ de vecteurs unitaire normal á S ,

$$E = \|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\|^2, F = \langle\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y}\rangle_{\mathbb{R}^3}, G = \|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\|^2$$

les composantes de la premiére forme fondamentale ,

$$e = \langle N,\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2}\rangle_{\mathbb{R}^3}, f = \langle N,\frac{\partial\varphi^2}{\partial x\partial y}\rangle_{\mathbb{R}^3}, g = \langle N,\frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2}\rangle_{\mathbb{R}^3},$$

les composantes de la deuxiéme forme fondamentale , et $H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$ la courbure moyenne de S. On calcule

$$\begin{aligned}
\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x, \tau(\varphi)}\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2}\rangle_{\mathbb{R}^3} + \langle\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi^2}{\partial y^2}\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \langle\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi^2}{\partial x^2}\rangle_{\mathbb{R}^3} - \langle\frac{\partial\varphi^2}{\partial x\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial y}\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\|^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

De méme méthode , on obtient $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tau(\varphi)\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$. Par conséquent $\tau(\varphi)$ est normal à la surface S , et on a

$$H = \frac{e+g}{2E} = \frac{\langle N, \tau(\varphi)\rangle_{\mathbb{R}^3}}{2E}.$$

Donc S est minimale si et seulement si φ est harmonique .

Exemple 2.10. : soit l'application de Hopf

$$\begin{aligned} \phi :(S^3,g) &\longrightarrow (S^2,h) \\ (s,a,b) &\longmapsto (\alpha(s), \psi(a,b)) \end{aligned}$$

où $\psi(a,b) = ka + lb$ et $\alpha : [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,\pi]$ telle que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(\frac{\pi}{2}) = \pi$.
Soient $g = ds^2 + \cos^2 s da^2 + \sin^2 s db^2$ la métrique Riemannienne sur S^3, et
$h = d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\psi^2$ est une métrique Riemannienne sur S^2.
- **Trouver une base orthonormée**
soit $\{e_1,e_2,e_3\}$ est base orthonormée sur S^3 c'est-à-dire $\forall i,j \quad i \neq j$
on a $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ et $\|e_i\|= 1 \forall i = 1..3$
donc $g(e_1, e_1) = 1$ c'est-à-dire $ds(e_1) \bigotimes ds(e_1) = 1$ donc $e_1 = \frac{\partial}{\partial s}$
$g(e_2, e_2) = 1$ c'est- à-dire $\cos^2 s da(e_2) \bigotimes da(e_2) = 1$ donc $e_2 = \frac{1}{\cos s}\frac{\partial}{\partial a}$

$g(e_3, e_3) = 1$ c'est-à-dire $\sin^2 s db(e_3) \bigotimes db(e_3) = 1$ donc $e_3 = \frac{1}{\sin s}\frac{\partial}{\partial b}$
donc
$\{e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, e_2 = \dfrac{1}{\cos s}\frac{\partial}{\partial a}, e_3 = \dfrac{1}{\sin s}\frac{\partial}{\partial b}\}$ est une base orthonormée sur S^3
$\{f_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha}, f_2 = \dfrac{1}{\sin \alpha}\frac{\partial}{\partial \psi}\}$ est une base orthonormée sur S^2
$d\phi(e_1) = \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha}$
$d\phi(e_2) = \dfrac{k}{\cos s}\frac{\partial}{\partial \psi}$
$d\phi(e_3) = \dfrac{l}{\sin s}\frac{\partial}{\partial \psi}$
$\nabla_{e_1} e_1 = 0$
$\nabla_{e_2} e_2 = \tan s \frac{\partial}{\partial s}$
$\nabla_{e_3} e_3 = -\cot s \frac{\partial}{\partial s}$
$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \alpha}} \frac{\partial}{\partial \alpha} = 0$
$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} = -\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}$.

$\nabla^{\phi}_{e_1} d\phi(e_1) = \alpha'' \frac{\partial}{\partial\alpha}$
$\nabla^{\phi}_{e_2} d\phi(e_2) = -\dfrac{k^2 \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2 s} \frac{\partial}{\partial\alpha}$
$\nabla^{\phi}_{e_3} d\phi(e_3) = -\dfrac{l^2 \sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2 s} \frac{\partial}{\partial\alpha}$
où $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$ .En remplaçant dans l'expression

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^{3} \{\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)\}$$

on obtient

$$\tau(\phi) = (\alpha''(s) + \alpha'(s)(\cot s - \tan s) - \sin\alpha\cos\alpha(\frac{k^2}{\cos^2 s} + \frac{l^2}{\sin^2 s}))\frac{\partial}{\partial\alpha}$$

Exemple 2.11. soit (M,g) une variété Riemannienne . Pour tout fonction $f : M \to \mathbb{R}$ et e_i une base orthonormée sur M on a

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= tr_g \nabla df \\
&= \nabla df(e_i,e_i) \\
&= \nabla^f_{e_i} df(e_i) - df(\nabla^M_{e_i} e_i) \\
&= e_i(e_i(f)) - (\nabla^M_{e_i} e_i)(f) \\
&= g(\nabla_{e_i} gradf, e_i) \\
&= div(gradf) \\
&= \Delta(f)
\end{aligned}$$

Exemple 2.12. : Soient $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique canonique $h = dy_1^2 + ... + dy_n^2$, $\varphi : (M,g) \to (\mathbb{R}^n,h), \varphi(x) = (\varphi^1(x),...,\varphi^n(x))$, une application différentiable. Le champ de tension de l'application φ est donné par

$$\tau(\varphi) = g^{ij}(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x_k}{}^M\Gamma^k_{ij})\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ \varphi$$

.

Ici ${}^{\mathbb{R}^n}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = 0$. Donc $\tau(\varphi) = (\Delta(\varphi^1),...,\Delta(\varphi^n))$. Par conséquent, l'application φ est harmonique si et seulement si les fonctions φ^α sont harmoniques.

Exemple 2.13. soit l'application :

$$\begin{aligned}\varphi :&(\mathbb{R},dx^2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2,dx^2+dy^2)\\ &x \longmapsto (x,0),\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\tau(\varphi) &= (\frac{\partial^2 x}{dx^2})\\ &= 0\end{aligned}$$

et soit l'application

$$\begin{aligned}\psi :&(\mathbb{R}^2,dx^2+dy^2) \longrightarrow (\mathbb{R},dz^2)\\ &(x,y) \longmapsto x^2-y^2,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= \Delta(\psi)\\ &= \frac{\partial^2\psi}{dx^2}+\frac{\partial^2\psi}{dy^2}\\ &= 2-2\\ &= 0,\end{aligned}$$

alors les deux applications φ et ψ sont harmoniques , mais remarquons que la composé,

$$\begin{aligned}\psi\circ\varphi : &(\mathbb{R},dx^2) \longrightarrow (\mathbb{R},dz^2)\\ &x \longmapsto x^2,\end{aligned}$$

est non harmonique car ,$\tau(\psi\circ\varphi)=2$.

2.4 Tenseur énergie impulsion

Définition 2.4.

soient (M^m,g) et (N^n,h) deux variété riemanniennes et$\phi : M^m \to N^n$ une application C^∞ , Le tenseur énergie impulsion $S(\phi)$ associé à ϕ est un tenseur de type (0,2) sur M , défini

par $S(\phi) = e(\phi)g - \phi^* h$

pour tous champs de vecteurs X,$Y \in \Gamma(TM)$, on a

$$S(\phi)(X,Y) = e(\phi)g(X,Y) - h(d\phi(X),d\phi(y))$$

où $e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2$ est la densité d'énergie de ϕ

Lemme 2.3. *soit $G = (g_{ij})_{ij}$ une matrice symétrique carré d'ordre m. Si $G^{-1} = (g^{ij})_{ij}$ désigne la matrice inverse de G, alors* $\dfrac{\partial}{\partial g_{ab}}(g^{ij}) = -g^{ia}g^{ib}$
pour tout i,$j = 1$,...m.

Preuve de l'égalité

$$G^{-1}G = (g^{ij}).(g_{ij}) = Id.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g^{ij}).(g_{ij}) &= -(g^{ij}).\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g_{ij}) \\ &= -(g^{ij}).\delta_{ab} \qquad (2.1)\end{aligned}$$

où δ_{ab} désigne la matrice $(\delta_i^a \delta_j^b)_{ij}$. De la formule (2.1) , on déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(g^{ij}) &= -(g^{ij}).\delta_{ab}(g^{ij}) \\ &= -(g^{ia}g^{bj}) \\ &= -(g^{ia}g^{jb})\end{aligned}$$

□

Lemme 2.4. *Si $G = (g_{ij})_{ij}$ une matrice symétrique carré d'ordre m,alors*
$\dfrac{\partial}{\partial g_{ab}}(det(g_{ij})) = cofacteur(g_{ab})$

Preuve Si $A_i = (g_{i1},...g_{im})^t$ désigne la iéme colone de la matrice (g_{ij}) , alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(det(g_{ij})) &= \frac{\partial}{\partial g_{ab}}(det(A_1,.....A_m)) \\ &= det(\frac{\partial}{\partial g_{ab}}A_1,....,A_m) + ... + det(A_1,....\frac{\partial}{\partial g_{ab}}A_m) \\ &= det(A_1,..,\frac{\partial}{\partial g_{ab}}A_a,..,A_m) \\ &= det(A_1,..,(A_a^b),..,A_m) \\ &= cofacteur(g_{ab})\end{aligned}$$

où $A_a^b = (0,...,1,...,0)^t$ $\square$

Lemme 2.5. *soient* (M^m,g) *une variété Riemannienne et* $(g_u)_u \in \bigotimes^2 T^*M$ *une variation réguliére de la métrique* $g(g_0 = g)$,*alors* $\delta_g = \frac{\partial}{\partial u}(g_u)|_{u=0} \in \bigotimes^2 T^*M$.
En effet , localement on a $g_u(x) = g_{ij}(u,x)dx^i \bigotimes dx^j$, *d' où*

$$(\delta_g)_{ij}(x) = \frac{\partial}{\partial u}(g_{ij}(u,x))|_{u=0}dx^i \bigotimes dx^j \in \bigotimes^2 T^*M$$

Proposition 2.6. *[4] soient* $\phi : M \to N$ *une application* C^∞ *entre deux variétés Riemannienne* (M^m,g) *et* (N^n,h).*Si* $(g_u)_u$ *est une variation* C^∞ *de la métrique* g *sur un domaine compact* M, *alors la premiére variation d' énérgie de* ϕ *respectivement à la variation* $(g_u)_u$ *est donnée par*

$$\frac{dE(\phi)}{du}|_{u=0} = \frac{1}{2}\int_M \langle S(\phi), \delta_g\rangle v_g \tag{2.2}$$

ou' lecalement $S(\phi)_{ij} = e(\phi)g_{ij} - (\phi^*h)_{ij}$ *et* $\langle S(\phi), \delta_g\rangle = g^{ia}g^{jb}S(\phi)_{ij}\delta g_{ab}$.

Preuve

$$\begin{aligned}
\frac{dE(\phi)}{du}|_{u=0} &= \int_M \frac{de(\phi)v_{g_u}}{du}|_{u=0} \\
&= \int_M (\frac{\partial e(\phi)v_{g_u}}{\partial g_{ab}})\delta g_{ab} \\
&= \int_M \frac{\partial e(\phi)}{\partial g_{ab}}\delta g_{ab}v_g + \int_M e(\phi)\frac{\partial v_g}{\partial g_{ab}}\delta g_{ab}
\end{aligned}$$

Uutilisant le lemme 2.3 , on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e(\phi)}{\partial g_{ab}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial g_{ab}}\phi^\alpha\phi^\beta h_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}g^{ia}g^{jb}\phi_i^\alpha\phi_j^\beta h_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}g^{ia}g^{jb}(\phi^*h)_{ij}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

De la formule $v_g = (det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx^1....dx^m$ et le lemme 2.4 ,on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_g}{\partial g_{ab}} &= \frac{1}{2}((det(g_{ij}))^{-}\frac{1}{2})\frac{\partial}{\partial g_{ab}}(det(g_{ij}))dx^1....dx^m \\
&= \frac{1}{2}(det(g_{ij}))^{-1} cofacteur(g_{ab})(det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx^1....dx^m \\
&= \frac{1}{2} g^{ab}(det(g_{ij}))^{\frac{1}{2}} dx^1....dx^m \\
&= \frac{1}{2} g^{ab} v_g \\
&= \frac{1}{2} g^{ia} g^{ib} g_{ij} v_g \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

□

La preuve se termine par substitution des formules (2.3) et (2.4) dans (2.2).

Théorème 2.7. *soient $\phi : M^m \to N^n$ une application C^∞ entre deux variétés Riemannienne (M^m,g) et (N^n,h) alors*

$$div^M S(\phi) = -h(\tau(\phi),d\phi)$$

.

Preuve soit$\{e_1,...,e_m\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d' un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point x pour tout $i,j \in \{1....n\}$.Au point x , on a $S(\phi)(e_i,e_j) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m h(d\phi(e_k),d\phi(e_k))\delta_{ij} - h(d\phi(e_i),d\phi(e_j))$.
Tenant compte qu'au point x , $\tau(\phi) = \sum_{i=1}^m \nabla^\phi_{e_i} d\phi(e_i)$ et $\nabla^\phi_{e_j} d\phi(e_k) = \nabla^\phi_{e_k} d\phi(e_j)$, alors

$$\begin{aligned}
(div^M S(\phi))(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i(S(\phi)(e_i,e_j)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^m e_i(h(d\phi(e_k),d\phi(e_k)))\delta_{ij} - \sum_{i=1}^m e_i(h(d\phi(e_i),d\phi(e_j))). \\
&= \sum_{k=1}^m h(\nabla^\phi_{e_j} d\phi(e_k), d\phi(e_k)) - \sum_{i=1}^m h(\nabla^\phi_{e_i} d\phi(e_i),d\phi(e_j)) \\
&= -h(\tau(\phi), d\phi(e_j)).
\end{aligned}$$

□

Du théréme 2.7 on déduit le corollaire suivant

Corollaire 2.8. *soient $\phi : M^m \to N^n$ une application de classe C^∞.*

1. *Si ϕ est harmonique , alors $div^M S(\phi) = 0$.*
2. *Si ϕ est submersion et si $div^M S(\phi) = 0$, alors ϕ est harmonique .*

2.5 Problémes d' Existence

Le problémes d' existence de base pour les applications harmoniques peut être formulé de la maniere suivante
soit $\phi_0 : M \to N$ une application de variétés Riemanniennes . ϕ_0 peut -il être deformé en une carte harmonique $\phi_0 : M \to N$?
Bien sûr , cette application est harmonique en supposant que M et N sont compacts et sons frontiére par le développement de la théorie variationnelle et en obtenant dans les cas particuliers suivants

1. Si M est le cercle S^1, une application harmonique de M dans N est une géodésique .
2. Si $N = R^n$, elles se réduisent aux équations linéaires $\Delta\phi^\alpha = 0$, et les solutions sont les fonctions harmoniques .
3. Si $\phi : (M,g) \to (N,h)$ une immersion riemannienne, c'est à dire une immersion satisfaisant $\phi^* h = g$.

Chapitre 3

Applications bi-harmoniques

Dans le troisiéme chapitre on définit l'application bi-harmonique qui est le prolongement d'application harmonique, on donne la définition à la description de leurs propriétés fondamontales (la premiére variation de bi-énergie, du deuxiéme variation d'énergie et la tenseur bi-énergie impulsion) et on donne quelques exemples.

3.1 Applications bi-harmoniques

Définition 3.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés Riemanniennes et D un domaine compact de M. On définit la fonctionnelle bi-énergie d'une application de classe C^∞ $\phi : M \to N$ par

$$E_2(\phi,D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\phi)|^2 v^g$$

Définition 3.2. Une application $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite bi-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle bi-énergie $E_2(\phi,D)$ pour tout compact D de M

$$\frac{d}{dt}E_2(\phi_t,D) = 0 \tag{3.1}$$

pour toute variation $\{\phi_t\}$ de ϕ à support dans D.

3.2 Premiére variation de bi-énergie

Théorème 3.1. *Soit $\varphi : (M^m,g) \to (N^n,h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans D. Alors $\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t,D)|_{t=0} = -\int_D h(v,\tau_2(\varphi))v_g$,*
où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ désigne le champ de variation associé à $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ et $\tau_2(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ défini relativement à une base orthonormée sur (M^m,g), par

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) &= -trace_g R^N(\tau(\varphi),d\varphi)d\varphi - trace_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi)\\ &= -\sum_{i=1}^m R^N(\tau(\varphi),d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \sum_{i=1}^m\{\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)\}\end{aligned}$$

Preuve : On pose $\phi : M\times(-\epsilon,\epsilon) \to N$; l'application définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$. Alors :

$$\frac{d}{dt}E_2(\phi_t,D)|_{t=0} = \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0),\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))v_g|_{t=0} \tag{3.2}$$

On a

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0) = \nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt}) \tag{3.3}$$

car

$$[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)] = 0.$$

Et

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(\nabla^M_{e_i}e_i,0) = \nabla^\phi_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt}) \tag{3.4}$$

D'où

$$\begin{aligned}\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) &= \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\{\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(e_i,0) - d\phi(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0))\}\\ &= \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(e_i,0) - \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0))\\ &= R^N(d\phi(0,\frac{d}{dt}),d\phi(e_i,0))d\phi(e_i,0) + \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0)\\ &\quad + \nabla^\phi_{[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)]} - \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(\nabla^M_{e_i}e_i,0)\\ &= R^N(d\phi(0,\frac{d}{dt}),d\phi(e_i,0))d\phi(e_i,0)\\ &\quad + \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt}) - \nabla^\phi_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt}).\end{aligned} \tag{3.5}$$

D'où

$$h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)),\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)))|_{t=0} = h(R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\tau(\varphi)) + h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau(\varphi)) - h(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}v,\tau(\varphi)) \tag{3.6}$$

soit $w \in \Gamma(T^*M)$, la $1-$ forme différentielle á support dans D , définie par :
$w(X) = h(\nabla^{\varphi}_X v,\tau(\varphi)), X \in \Gamma(TM)$.
On a :

$$\begin{aligned} div^M w &= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(w(e_i) - w(\nabla^M_{e_i}e_i))\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau(\varphi))) - h(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}v,\tau(\varphi))\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\{h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau(\varphi)) + h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) - h(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}v,\tau(\varphi))\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

De formules (3.6) et (3.7) , on obtient :

$$\sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)),\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)))|_{t=0} = \sum_{i=1}^{m} h(R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\tau(\varphi)) + div^M w - \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) \tag{3.8}$$

soit $\eta \in \Gamma(T^*M)$, la $1-$forme différentielle ásupport dans D , définie par :
$w(X) = h(v,\nabla^{\varphi}_X\tau(\varphi)), X \in \Gamma(TM)$.
On a :

$$\begin{aligned} div^M \eta &= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(\eta(e_i)) - \eta(\nabla^M_{e_i}e_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi))) - h(v,\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi))\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\{h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) + h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) - h(v,\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi))\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

En substituant 3.9 dans 3.8 , on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)),\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)))|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{m} h(R^N(\tau(\varphi),d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),v)\\ &+ div^M w - div^M \eta\\ &+ \sum_{i=1}^{m} h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi))\\ &- \sum_{i=1}^{m} h(v,\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)) \qquad (3.10)\end{aligned}$$

D' aprés les formule 3.2, 3.10 et le théoréme de la divergence , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_2(\phi_t,D)|_{t=0} = -\int_D \sum_{i=1}^{m} h(-R^N(\tau(\varphi),d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)\\ + \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi),v)v_g \qquad \square\end{aligned}$$

Théorème 3.2. *une application différentiable $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ est bi-harmonique si et seulement si $\tau_2(\varphi) = 0$*

Remarque 3.1. soit l'application $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ et $(U,x^i),(V,y^\alpha)$ de carte locales en p dans M et en $\varphi(p)$ dans N respectivement . Alors

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) = g^{ij}(&\frac{\partial^2\tau^\sigma}{\partial x^i\partial x^j} + 2\frac{\partial\tau^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\tau^\beta}{\partial x^j}\ {}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \tau^\alpha\frac{{}^2\varphi^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\ {}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\ {}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^j}\\ &+ \tau^\alpha\frac{\partial\tau^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\tau^\rho}{\partial x^j}\ {}^N\Gamma^v_{\alpha\beta}\ {}^N\Gamma^\sigma_{v\rho} - {}^M\Gamma^k_{ij}(\frac{\partial\tau^\sigma}{\partial x^k} + \tau^\alpha\frac{\partial^\beta}{\partial x^k}\ {}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta})\\ &- \tau^v\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\ {}^N R^\sigma_{\beta\alpha v})\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\circ\varphi\end{aligned}$$

où $\tau^\alpha = \Delta\varphi^\alpha + g^{ij}\ {}^N\Gamma^\alpha_{\beta\delta}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\delta}{\partial x^j}$

3.3 La dexiéme variation de l' énergie

Théorème 3.3. *[14] soit $\varphi : (M^m,g) \to (N^n,h)$ une application harmonique entre deux variétés riemanniennes et D un domaine compact de M . Si $\varphi_{t,s}$ est une variation de φ á support dans D , alors*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s},D)|_{(t,s)=(0,0)} = \int_D h(-trace_g R^N(v,d\varphi)d\varphi - trace_g(\nabla^\varphi)^2 v,w)v_g$$

où $v = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}|_{(t,s)=(0,0)}, w = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}|_{(t,s)=(0,0)}$ *denotes les champs de vecteurs de variation.*

Preuve soit $\{e_1.....e_m\}$ base orthonorme sur M . posons
$\phi : (x,t,s) \in (-\epsilon,\epsilon)\times(-\epsilon,\epsilon) \to \varphi_{t,s}(x) \in N, E_i = (e_i,0,0), \frac{\partial}{\partial t} = (0,\frac{d}{dt},0)$ et $\frac{\partial}{\partial s} = (0,0,\frac{d}{ds})$.
On a

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s},D)|_{(t,s)=(0,0)} = \frac{1}{2}\int_D \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h(d\phi(E_i),d\phi(E_i))v_g|_{(t,s)=(0,0)} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h(d\phi(E_i),d\phi(E_i)) &= \frac{\partial}{\partial t} h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i),d\phi(E_i)) \\ &= h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i),d\phi(E_i)) + h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i))\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i),d\phi(E_i)) &= h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})d\phi(E_i)) \\ &= h(R^n(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}),d\phi(E_i))d\phi(\frac{\partial}{\partial s}),d\phi(E_i)) \\ &\quad + h(\nabla^\phi_{E_i} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}),d\phi(E_i)) + h(\nabla^\phi_{[\frac{\partial}{\partial t},E_i]} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}),d\phi(E_i))\end{aligned} \tag{3.13}$$

soit w la 1-forme différentielle à support dans D , définie sur M par

$$w(X) = h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,s)=(0,0)},d\varphi(X)), X \in \Gamma(TM).$$

En tenant compte que φ est harmonique , on obtien

$$\begin{aligned}
div_w^M &= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(w(e_i)) - w(\nabla_{e_i}^M e_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)) - h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i))\} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\{h(\nabla_{E_i}^{\phi}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)) + h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,s)=(0,0)}, \nabla_{e_i}^{\varphi} d\varphi(e_i)) \\
&\quad - h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i))\} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\{h(\nabla_{E_i}^{\phi}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)) + h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,s)=(0,0)}, \tau(\varphi))\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} h(\nabla_{E_i}^{\phi}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i))
\end{aligned} \tag{3.14}$$

D' aprés les formules 3.13 et 3.14 , on a

$$\sum_{i=1}^{m} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi}\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\phi} d\phi(E_i), d\phi(E_i))|_{(t,s)=(0,0)} = \sum_{i=1}^{m} h(R^N(v, d\varphi(e_i))w, d\varphi(e_i)) + div^M w \tag{3.15}$$

En développant le dexiéme terme à droit de l'égalité 3.12 on trouve

$$\begin{aligned}
h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\phi} d\phi(E_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(E_i)) &= h(\nabla_{E_i}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla_{E_i}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial t})) \\
&= E_i(h(d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla_{E_i}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}))) - h(d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla_{E_i}^{\phi}\nabla_{E_i}^{\phi} d\phi(\frac{\partial}{\partial t}))
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Si η désigne la 1-forme différentielle à support dans D,définie sur M par :

$\eta(X) = h(w, \nabla_X^{\varphi} v), X \in \Gamma(TM)$.

alors on a

$$\begin{aligned}
div^M \eta &= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(\eta(e_i)) - \eta(\nabla_{e_i}^M e_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(h(w, \nabla_{e_i}^{\varphi} v)) - h(w, \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^{\varphi} v)\}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

D'aprés les formules 3.16 et 3.17 , on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\phi} d\phi(E_i), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi} d\phi(E_i))|_{(t,s)=(0,0)} = div^M \eta + \sum_{i=1}^{m} h(w, \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^{\varphi} v) - \sum_{i=1}^{m} h(w, \nabla_{e_i}^{\varphi}\nabla_{e_i}^{\varphi} v) \tag{3.18}$$

En utilisant les formules 3.11, 3.12, 3.15, 3.18 et le théoréme de Stokes , on déuit

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}E(\varphi_{t,s},D)|_{(t,s)=(0,0)} = \int_D \sum_{i=1}^{m}\{-h(R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),w) + h(w,\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}v)$$
$$- h(w,\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}v)\}v_g \qquad \square$$

3.4 Exemples d' applications bi-harmoniquees

Exemple 3.1. Toute application harmonique entre deux variété Riemanniennes est bi-harmonique

Exemple 3.2. considérons l' application différentiable

$$\begin{aligned}\varphi :(M,g) &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ p \quad &\longmapsto \varphi(p) = (\varphi^1(p),....\varphi^n(p))\end{aligned}$$

Alors $\tau_2(\varphi) = (\tau_2(\varphi^1),.....\tau_2(\varphi^n))$ donc φ et bi-harmonique si et seulement si les applications $\varphi^i, i = 1....n$ sont biharmoniques.

Exemple 3.3. soient $\gamma : I \to (N,h)$ une géodésique et $t : I \to J, t \mapsto t(s) = t$ un changement de paramétre ,où I,J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Alors L'application$\gamma = \gamma \circ t$: $J \to N$ est bi-harmonique si et seulement si $\dfrac{d^4t}{ds^4} = 0$ et $\dfrac{d^2t}{ds^2} \neq 0$

Exemple 3.4. soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique (c'est -à-dire $\Delta f = 0$).
Alors la fonction $\varphi(x) = r^2(x)f(x)$ est une fonction biharmonique non- harmonique ,oú $r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ pour tout $x = (x_1,x_2,....,x_n) \in \mathbb{R}^n$ est la fonction distance.
En effet ;

$$\begin{aligned}r^2(x) &= x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2;\\ \frac{\partial r^2}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j^2}{\partial x_i} = 2x_i;\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \frac{\partial r^2}{\partial x_i}f + r^2\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i f + r^2\frac{\partial f}{\partial x_i};\\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} &= 2f + 2x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + 2x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.\end{aligned}$$

Donc le Laplacien de la fonction φ est donné par

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\\ &= \sum_{i=1}^{n}2f+\sum_{i=1}^{n}4x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\\ &= 2nf+4\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+r^2\underbrace{\Delta f}_{=0}\neq 0.\end{aligned}$$

Ainsi φ est non-harmonique .Pour j fixé , on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x_j} &= 2n\frac{\partial f}{\partial x_i}+4\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij}}\frac{\partial f}{\partial x_i}+4\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\\ &= 2n\frac{\partial f}{\partial x_i}4\frac{\partial f}{\partial x_j}+4\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}.\end{aligned}$$

Par conséquent $\dfrac{\partial^2\Delta\varphi}{\partial x_j^2}=2n\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}+4\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}+4\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij}}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+4\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j^2}$

$$\begin{aligned}\tau_2(f) &= -\Delta(\Delta\varphi)\\ &= -\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\Delta\varphi}{\partial x_j^2}=-(2n+4)\Delta f-4\Delta f-4\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta f)\\ &= 0\end{aligned}$$

3.5 Tenseur biénergie impulsion

Définition 3.3. soit $\varphi:(M^m,g)\to(N^n,h)$ une application de classe C^∞ . Le tenseur biénergie impulsion $S_2(\varphi)$ de φ est défini pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$ par

$$\begin{aligned}S_2(\varphi)(X,Y) = &-\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2g(X,Y)-\langle d\varphi,\nabla^\varphi\tau(\varphi)\rangle g(X,Y)+h(d\varphi(X),\nabla^\varphi_Y\tau(\varphi))\\ &+h(d\varphi(Y),\nabla^\varphi_X\tau(\varphi))\end{aligned}$$

où $\langle d\varphi,\nabla^\varphi\tau(\varphi)\rangle=\sum_{i=1}^{m}h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))$ relativement à une base orthonormée locale $\{e_i\}_{i=1}^m$ sur (M^m,g).

Théorème 3.4. *Soit $\varphi : (M^m,g) \to (N^n,h)$ une application de classe C^∞ , alors $[div^M S_2(\varphi)](X) = -h(\tau_2(\varphi), d\varphi(X)), \forall X \in \Gamma(TM)$.*

Preuve Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M^m, g) telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point $x(1 \leq i,j \leq m)$. On note $S_2(\varphi) = T_1 + T_2$, où T_1,T_2 sont définis par

$$T_1(X,Y) = -\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g(X,Y) - \langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi)\rangle g(X,Y),$$
$$T_2(X,Y) = h(d\varphi(X),\nabla^\varphi_Y \tau(\varphi)) + h(d\varphi(Y),\nabla^\varphi_X \tau(\varphi)).$$

Alors au point x, on a

$$\begin{aligned}
(div^M T_1)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i(T_1(e_i,e_j)) \\
&= \sum_{i=1}^m e_i(-\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 \delta_{ij} - \langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi)\rangle)\delta_{ij} \\
&= -h(\nabla^\varphi_{e_j} \tau(\varphi),\tau(\varphi)) - e_j(\langle d\varphi, \nabla^\varphi \tau(\varphi)\rangle) \\
&= -h(\nabla^\varphi_{e_j} \tau(\varphi),\tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^m h(\nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j} \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi)) \\
(div^M T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i(T_2(e_i,e_j)) \\
&= \sum_{i=1}^m e_i(h(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j} \tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi))) \\
&= \sum_{i=1}^m h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_j} \tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_j} \tau(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m h(\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j), \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi)).
\end{aligned}$$

Tenant compte qu'au point x , on a

$$\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_j) = \nabla^\varphi_{e_j} d\varphi(e_i)$$

$$\nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_j} \tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{e_j} \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi) = R^N(d\varphi(e_i),d\varphi(e_j))\tau(\varphi)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
(div^M T_1)(e_j) + (div^M T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_j} \tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_i),\nabla^\varphi_{e_j} \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m h(d\varphi(e_j),\nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} \tau(\varphi)) \\
&= -h(\tau_2(\varphi),d\varphi).
\end{aligned}$$

□

Du Théoréme 3.4 on déduit le corollaire suivant

Corollaire 3.5. *: soit $\varphi : (M^m,g) \to (N^n,h)$ une application de classe C^∞.*

1. *Si φ est biharmonique , alors $divS_2(\phi) = 0$.*
2. *Si φ est une submersion et si $divS_2(\phi) = 0$, alors φ est biharmonique .*

Conclusion

Ce travail est consacrée à l'etude d'application harmonique entre les variétés Riemanniennes qui est le but de ce travail dont on cite l'existence de ses applications . Ainsi on déplace à une application bi-harmonique qui une extension d'application harmonique et on a toute application harmonique est une application bi-harmonique , et on cherche aussi l'existence des applications bi-harmoniques qu'il s'agit un point critique d'équation bi-energie entre les variétés Riemannienne à déterminer les conditions nécéssaires .

Bibliographie

[1] , Baird, Paul and Wood, John C and Wood, John C and others *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, n.29,Oxford University Press ,(2003)

[2] Bouteloup, Didier,*Éléments de géométrie différentielle*,Cours de l'ENSG,2003

[3] Catherine Doss-Bachelet,Jean-Pierre Françoise, Claude Piquet, *Géometrie Différentielle avec 80 Figures*,ellipses ,2011

[4] , Djaa, M , Introduction à la Géométrie Riemannienne et l'Analyse Harmonique sur les Variétés,vo.2018 Publication du Centre Universitaire Ahmed Zabana Relizane, ,(2017)

[5] Do Carmo, Manfredo P,*Differential forms and applications*,Springer Science & Business Media,2012

[6] , Eells, James and Sampson, Joseph H, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, American journal of mathematics, vol 86, n. 1 pp 109–160,JSTO,(1964)

[7] , Jost, Jurgen and others, *Harmonic mappings between Riemannian manifolds* ,The Australian National University, Mathematical Sciences Institute, Centre ... (1984)

[8] Michael Spivak,*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 3rd Edition*,Publish or Perish,1999

[9] Michael Spivak,*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2, 3rd Edition*,Publish or Perish,1999

[10] , Lin, Fanghua and Wang, Changyou *The analysis of harmonic maps and their heat flows*,World Scientific ,(2008)

[11] , Paulin, Frédéric *Géométrie différentielle élémentaire*, Notes de cours de première année de mastère, Ecole Normale Supérieure (2007)

[12] , Schoen, Richard M and Yau, Shing-Tung, *Lectures on differential geometry*, vol 2,International press Cambridge, MA ,(1994)

[13] , Urakawa, Hajime *Geometry of Biharmonic Mappings : Differential Geometry of Variational Methods*, World Scientific ,(2019)

[14] , ZEGGA,Kaddour ; others *Géométrie harmonique des vaiétés* , World Scientific ,(2016)