Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Univérsité d'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présentée par

LAAIADI Fedhila

Thème

Le Théorème de Point Fixe de Krasnoselskii et ses Applications au Equation Différentielle Impulsive

Soutenu publiquement le 22/05 / 2017 devant le jury composé de :

SLAMA Abdeldjalil	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Président
BOUDAOUI Ahmed	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Rapporteur
DEBBAGHE Mohammed	Maître assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

Année Universitaire : 2016-2017

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail, puis je veux exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour tant d'amours et de soutiens moraux.
J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Mr.BOUDAOUI Ahmed qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.
Tous mes remerciements et gratitude vont à Mr SLAMA Abdeldjalil, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Mes vives remerciements vont aussi à Mr DEBBAGHE Mohamed d'avoir accepté d'être membres du jury et d'examiner mon travail.
Je remercie aussi les professeurs de mathématiques et à tout ce qui m'ait enseigné au long de ma vie scolaire.

J'adresse mon sincère remerciement au secrétaire de notre département.
J'adresse aussi mon remerciements les plus vifs aux personnes qui m'aient apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicace

Ce modeste travail est dédié :

À mes chèrs parents ma mère et mon père, pour leurs patiences, leurs amours, leurs soutiens et leurs encouragements.

À mon très cher mari pour son soutien moral et matériel.

À mes frères et soeurs, mes oncles et mes tantes.

À tous membres de ma grande famille " LAAIADI ", chacun en son nom petit et grand.

À les familles : "BENMANSOUR" et "HABSA".

À toutes mes chères amies surtout "Khadidja YAHYAOUI" et mes compagnons de ce long chemin et tous les étudiants et étudiantes de ma promotion.

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires **4**

1.1 Notations et définitions 4

1.2 Quelques Théorèmes de point fixe 11

1.3 Théorème de point fixe de Banach 11

1.4 Théorème de point fixe de Brouwer 12

1.5 Théorème de point fixe de Schauder 12

2 Théorème de point fixe de Krasnoselskii **14**

2.1 Théorème de point fixe de Krasnoselskii 15

2.2 Théorème du point fixe de Schaefer 16

2.3 Théorème du point fixe de Burton-Kirk(Krasnoselskii-Schaefer) 18

3 Problème d'equation différentielle impulsive **20**

3.1 Espace des solutions 20

3.2 La solution 23

3.3 L'existence de la solution 25

4 Problème de l'equation différentielle impulsive de type neutre **30**

4.1 Espace des solutions 30

4.2 La solution 31

4.3 L'existence de la solution 32

Conclusion **39**

Bibliogrphie **40**

Index **41**

Introduction

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations. La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse nonlinéaire puis qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différent. Elle utilise ses outils de l'analyse et de la topologie et pour cette raison nous avons la classification "point fixe et théorie métrique" et "point fixe et théorie topologique".

Le développement de la théorie du point fixe, qui est la branche cardinale de l'analyse non linéaire a donné un grand effets sur l'avancement de l'analyse non linéaire. L'analyse non linéaire comme une branche autonome des mathématiques a été élaboré dans les années 1950 par des mathématiciens, comme Brouwer, comme une combinaison de l'analyse fonctionnelle et l'analyse variationnelle.

La plupart des phénomènes naturels en physique, en chimie, en économie en biologie ou en mécanique ont un comportement non linéaire. De tels problèmes s'expriment, mathématiquement, sous forme d'équations différentielles non linéaires rendant, ainsi, la branche de l'analyse non linéaire un domaine perpétuellement en activité et d'actualité puisqu'il traite des questions et des applications de la vie réelle.

Les équations différentielles non linéaires et intégro-différentielles, les inégalités variationnelles et aussi les problèmes d'optimisation générale, sont des sujets importants dans l'analyse non linéaire. De nombreuses questions, liées à l'existence et à l'unicité de solutions de certains types d'équations (par exemple, des équations différentielles, des équations intégrales) peuvent être ramenées à la question d'existence et d'unicité d'un point fixe pour une application appropriée définie sur un espace métrique. Un des plus important outils d'existence en analyse non linéaire est le théorème dit de Krasnoselskii. C'est un théorème hybride (combinant géométrie et topologie) établie en 1955 par Krasnoselskii. Ce résultat est captivant et possède un domaine d'application très étendu (voir [4],[6]).

Les théorèmes de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles (voir[3]).

Parmi les équations différentielles, je vais parler sur les équations différentielles impulsives. Dans le cas général, les équations impulsives sont composées de deux parties :

- L'équation différentielle, qui définie la partie continue de la solution.
- La partie impulsive, qui définie le changement instantané et la discontinuité de la solution.

La seconde partie des équations impulsives est appelée le saut, les points en les quelles l'impulsion se produit sont appelés les moments d'impulsions et les fonctions qui définient la somme des impulsions sont appelées les fonctions impulsives.
Il ya deux types d'équations impulsives, en des temps fixes et en des temps variables (voir [1]). Dans ce mémoire, on va considérer le cas des équations impulsives en des temps fixes et voila une courte description de ce type. Equations differentielles impulsives en des temps fixes :

Soient les point $t_k \in \mathbb{R}$ fixés tels que $t_{k+1} > t_k, k = 1,2,...$ et $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$. Alors l'équation différentielle est donnée par :

- L'équation differentielle : "la partie continue"

$$x' = f(t,x), t \geq t_0, t \neq t_k. \tag{1}$$

- La partie impulsive "le saut" :

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k^-)), k = 1,2,..., \tag{2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, f : [t_0, +\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors le problème d'équation differentielle impulsive est défini par les équations (1),(2) et la condition initiale

$$x(t_0) = x_0. \tag{3}$$

On va décrire le mouvement du point $(t;x)$ de la courbe intégrale de la solution du problème differentielle impulsive(1)-(3).

Le point $(t;x)$ commence sa trajectoire du point $(t_0;x_0)$ et continue son mouvement le long de la courbe intégrale $(t,x(t))$ de la solution jusqu'au moment $t_1 > t_0$ en le quel se déplace instantanément de la position (t_1,x_1) à la position (t_1,x_1^+), où $x_1 = x(t_1), x_1^+ = x_1 + I_1(x_1)$. Aprés, le point continue son mouvement sur la courbe intégrale de la solution du problème differentielle impulsive (1),(2) avec la condition initiale $x(t_1^+) = x_1$ jusqu'au moment $t_2 > t_1$ en le quel le point (t,x) saute et la somme des sauts est déterminée par l'égalité (2). Les points t_k sont les moments d'impulsions, et les fonctions $I_k(x)$ sont les fonctions impulsives.

Dans ce mémoire, on étudie les théorèmes du point fixe de Krasnoselskii et Krasnoselskii-Schaefer, et quelques unes de leurs applications (aux équations différentielles Impulsive et équation de type neutre), et il est composé en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit les notations, définitions, lemmes et théorèmes qu'on va utiliser à travers ce mémoire.

Dans le seconde chapitre, j'énonce et montre le théorème de Krasnoselskii et j'étudie une extension de ce théorème sous titre théorème de point fixe de Krasnoselskii-Schaefer ou Burton-Kirk.

Dans le troisième chapitre on étudie l'existence de la solution de les équation différentielles impulsive en appliquant le théorème de Krasnoselskii.

Dans le quatrième chapitre, on étend notre travail aux les équation différentielle impulsive de type neutre et je définit l'espace de la solution, Cela revient à étudier existence de la solution. Notre analyse sera basée sur théorème de point fixe de Krasnoselskii-Schaefer.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit des définitions, notations, lemmes et quelque théorèmes qui sont utilisées le long de ce mémoire.

1.1 Notations et définitions

On note $J = [0,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
On désigne par $L^1(J,\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions intégrables sur J à valeur dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme :

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^t \|y(s)\| ds. \tag{1.1}$$

Définition 1.1. Le couple (E,d) est dit un espace métrique si E un ensemble et $d : E \times E \to [0,\infty)$ une application vérifiant pour tout x,y et z de E :

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$,
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Un espace métrique (E,d) est dit complet si tout suite de Cauchy de E converge dans E. Une suite $(x_n) \subset E$ est dite de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n,x_m) < \varepsilon$, pour tout $n, m > N$.

Définition 1.2. Soit $a \in E$ et $r \in [0, +\infty[$. L'ensemble

$$B(a,r) = \{x \in E \setminus d(x,a) < r\}$$

s'appelle la boule ouverte de centre a et de rayon r.

Définition 1.3. (*parti ouvert*) Un ensemble U de E est dit ouvert si $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$.

Définition 1.4. (*parti fermé*) Un sous ensemble A de E est dit fermé si son complémentaire

$$A^c = \{x \in E \setminus x \notin A\}$$

est un ouvert de E.

Caractérisation séquentielle des fermés :

Définition 1.5. Soit $a \in E$. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge vers a et on note $x_n \to a$ si $d(x_n,a) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Théorème 1.1. *Une partie A de E est fermé* $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ *et* $a \in E$ *avec* $x_n \to a \Rightarrow a \in A$.

Preuve $\Rightarrow$
Par l'absurde, soit A un fermé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ avec $x_n \to a$ et $a \notin A$ alors $a \in A^c$ qui est un ouvert donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A^c$. Donc $d(x_n,a) \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ car $x_n \in A$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers a, d'où contradiction.
Réciproquement, par l'absurde : si A n'est pas un fermé alors A^c n'est pas ouvert alors $\exists b \in A^c$ tel que :
$\forall \varepsilon > 0, B(b,\varepsilon) \not\subset A^c$ c'est-à-dire $B(b,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. En particulier, si $\varepsilon = 1/n$ alors $\exists x_n \in B(b,1/n) \cap A$. Donc, $d(x_n,b) \leq 1/n$, lorsque $n \to \infty, d(x_n,b) \to 0$ alors $x_n \to b$. Par hypothèse $b \in A$ d'où contradiction. $\square$

Définition 1.6. (*Adhérence d'un ensemble*) Soit $A \subset E$. On dit qu'un point $a \in E$ est adhérent à A s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergeant vers a.
L'ensemble des points adhérents à A est appellé l'adhérence ou la fermeture de A et se note $\overline{A}$.

Définition 1.7. Soient $(X,\delta),(Y,d)$ deux espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est continue au point $a \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$, tel que $\forall x \in X, \delta(x,a) \leq \alpha \Rightarrow d(f(x),f(a)) \leq \varepsilon$.

Proposition 1.2. *([8]) Soient $(X,\delta),(Y,d)$ deux espaces métriques. $f : X \to Y$ Une application alors f est continue en point $a \in X$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Théorème 1.3. *[8] Soient $(X,\delta),(Y,d)$ deux espaces métriques. $f : X \to Y$ une application, alors les assertions suivantes sont equivalentes :*

i) *f est continue sur X,*

ii) *L'image réciproque par f de tout ouvert de Y est ouverte dans X,*

iii) *L'image réciproque par f de tout fermé de Y est fermée dans X.*

Définition 1.8. Soit$(E,+,.)$ un espace vectoriel, le couple $(E,\|.\|)$ est un espace normé si pour tout $x,y \in E$ il existe un nombre réel positif $\|x\|$ dit la norme de x, satisfaisant :

(a) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad \alpha \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Remarque 1.1. Un espace normé est un espace métrique dont la distance est définit par $d(x,y) = \|x - y\|$.

Définition 1.9. Un espace de Banach est un espace normé complet .

Exemple 1.1. $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ est l'espace de toutes les fonctions y continues définient de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^n$. le nombre $\|y\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} \|y(t)\|$ défini une norme rendant $(C([a,b],\mathbb{R}^n),\|.\|_\infty)$ un espace de Banach.

Définition 1.10. Une partie M d'un espace métrique (E,d) est dite compacte si de toute suite d'élément de M, on peut extraire une sous suite convergente dans M. M est relativement compacte si toute suite de M admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à E (i.e si la fermeture de M est compact).

Théorème 1.4. *[8] Toute fonction f continue sur un compact est uniformément continue.*

Définition 1.11. Soit M une sous ensemble d'un espace de Banach E et soit $A : M \to E$ une application. Si A est continue et AM est contenu dans un sous ensemble compact de E, alors on dit que A est une application compacte .

Définition 1.12. Soient E, F deux espaces normés et l'application $f : E \to F$. On dit que f est complétement continue si :

- f est continu,
- f transforme tout ensemble bornée en un ensemble relativement compact.

Lemme 1.5. *(Arzela-Ascoli[9]) : Soit $A \subset C([0,b],\mathbb{R}^n)$ A est relativement compact si :*

1. *A est bornée, c'est à dire qu'il existe $M > 0$:*

$$\|y(t)\| \leq M, \forall t \in [0,b] \quad et \quad y \in A,$$

2. *A est équicontinu c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$*

$$\forall t_1, t_2 \in [0,b], |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|y(t_1) - y(t_2)\| < \varepsilon, \forall y \in A.$$

Définition 1.13. Soit X un ensemble non vide, une tribu ($\sigma-$Algèbre)$\mathcal{A}$ sur X est une famille de parties de X telle que :

1- $\emptyset \in \mathcal{A}$,

2- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

3- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\bigcup A_n$ est aussi dans $\mathcal{A}$.

Le couple $(X,\mathcal{A})$ s'appelle un espace mesurable et les élements de $\mathcal{A}$ sont appelés parties mesurables.

Définition 1.14. Soit τ une famille de parties de X non vide. Il existe une plus petite tribu sur X qui contient τ, noté $\sigma(\tau)$. On appelle $\sigma(\tau)$ la tribu engendrée par τ.

Remarque 1.2. Lorsque $X = \mathbb{R}$ on lui associé souvant la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ qui est celle engendrée par la classe des ouverts de X.
Autrement dit, c'est la plus petite tribu associée à X qui contient tout les ouverts de X.

Définition 1.15. Soient $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ et $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables. L'application $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est dite mesurable si pour tout $B \in \mathcal{F}_2, f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$, autrement dit si $f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1$.

Proposition 1.6. *[5] Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ on dit que f est mesurable si l'ensemble $\{x \in \Omega, \quad f(x) > a\}$ est mesurable.*

Théorème 1.7. *[5] Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de Ω_1 telle que la tribu $\mathcal{A}_1$ soit la plus petite qui contienne $\mathcal{F}$. Soit f une fonction de Ω à valeurs dans Ω_1. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Alors f est mesurable pour ce couple de tribus si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{F}$ alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Proposition 1.8. *Toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable.*

Preuve Pour cela, on applique le théorème (1.7) au cas où $\mathcal{F}$ est l'ensemble de tous les intervalles ouverts : par définition de la tribu $\mathcal{B}$ de Borel, l'hypothèse du théorème est vérifiée. Ensuite, on sait que l'image inverse d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalles ouverts. Donc f est mesurable. $\square$

Définition 1.16. Une fonction $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite L^1-carathédory si :

(i) $t \mapsto f(t,y)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $y \mapsto f(t,y)$ est continue presque pour tout $t \in [0,b]$,

(iii) Pour tout $r > 0$ il existe $h_r \in L^1([0,b],\mathbb{R}_+)$ telle que
$\|f(t,y)\| \leq h_r(t)$ presque pour tout $t \in [0,b]$ et pour toute $\|y\| \leq r$.

Théorème 1.9. *(La convergence dominée de Lebesgue[2]) :Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1([0,b],\mathbb{R}^n)$ qui converge p.p vers f.*
Supposons qu'il existe une fonction positive $g \in L^1([0,b],\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|f_n(x)\| \leq g(x), p.p \quad x \in [0,b]. \tag{1.2}$$

Alors la fonction f est intégrable et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^b f_n(x)dx = \int_0^b f(x)dx. \tag{1.3}$$

Lemme 1.10. *(Inégalité de Bihari[1])Soient $k > 0$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et croissante et $v \in L^1([0,b],\mathbb{R}_+)$ et $u : [0,b] \to \mathbb{R}_+$. Si*

$$u(t) \leq k + \int_0^t v(s)g(u(s))ds, \tag{1.4}$$

alors

$$u(t) \leq G^{-1}\left(\int_0^t v(s)ds\right), \tag{1.5}$$

et

$$u(t) \leq G^{-1}\left[G(k) + \int_0^t v(s)ds\right], \tag{1.6}$$

avec $G(w) = \displaystyle\int_k^w \frac{du}{g(u)}$.

Définition 1.17. Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Soit k un réel strictement positif. On dit que $f : X \to Y$ est Lipschitzienne de rapport k si

$$\forall x, y \in X : \delta(f(x),f(y)) \leq kd(x,y). \tag{1.7}$$

Si de plus $k < 1$, on dit que f est contractante.

Définition 1.18. (homeomorphisme) Soit E et F deux espaces normés, une application $f : E \to F$ on dit que f est un homeomorphisme si f est continue, bijective et f^{-1} est continue.

Définition 1.19. Soient E un espace vectoriel normé, Une partie C de E est dite convexe lorsque deux points quelconques appartient à C, le segment qui les joint est entièrement contenu dans C.

Définition 1.20. (*Enveloppe convexe*) : Soit E un espace de Banach réel, pour tout partie finie $D \subset E$ on désigne par l'enveloppe convexe de D l'intersection de toutes les parties convexes contenant D, il est définit par la formule suivante :

$$conv(D) = \left\{\sum_{i=1}^n t_i x_i, t_i \geq 0, x_i \in D, \sum_{i=1}^n t_i = 1.\right\} \tag{1.8}$$

Lemme 1.11. *(Lemme de la projection de Schauder) : Soit K une partie compacte de E. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $D \subset E$ et une application $p : K \to conv(D)$ continue telle que $\|p(x) - x\| < \varepsilon$ pour tout $x \in K$.*

Preuve Comme K est compact, il existe $D = \{x_1, x_2,...,x_n\}$ dans K tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$. On dira que D est un $\varepsilon-$réseau de K.
Pour tout $i = 1,...$ on définit les fonctions continues :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \varepsilon- \parallel x - x_i \parallel, & si \quad x \in B(x_i,\varepsilon) \\ 0 \quad sinon. \end{cases} \tag{1.9}$$

□

On pose $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i$. Alors $\phi(x) > 0$ pour tout $x \in K$ et on définit la projection de Schauder $p : K \to conv(D)$ comme $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i$ alors

$$\|p(x) - x\| = \| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i - x\| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \parallel x_i - x \parallel < \varepsilon.$$

Lemme 1.12. *Si $(E,\|.\|)$ est un espace normé, $M \subset E$ et $B : M \to E$ une application contractante, alors $(I - B)$ est un homéomorphisme de M sur $(I - B)M$.*

Preuve On suppose que B est $\alpha-$contraction, $(I - B)$ est continue car elle est la somme de deux applications continues. D'autre part, pour tout $x, y \in M$ avec $x \neq y$, on voit que

$$\begin{aligned} \|(I - B)x - (I - B)y\| &= \|(x - y) - (Bx - By)\| \\ &\geq \|x - y\| - \|Bx - By\| \\ &\geq \|x - y\| - \alpha\|x - y\| \\ &\geq (1 - \alpha)\|x - y\| \\ &> 0 \end{aligned}$$

d'où $\|(I - B)x - (I - B)y\| \neq 0 \Rightarrow (I - B)x \neq (I - B)y$. En conclusion, $(I - B)$ est injective, et comme $I - B : M \to (I - B)M$ alors $\forall y \in (I - B)M, \exists x \in M$ telque $(I - B)x = y$ d'où $I - B$ est surjective et donc $(I - B)^{-1}$ existe. Il reste à montrer que $(I - B)^{-1}$ est continue, par l'absurde, si $(I - B)^{-1}$ n'était pas continue, alors $\exists (I - B)y$ et $((I - B)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(I - B)x_n \to (I - B)y$ mais $x_n \nrightarrow y$.
Or, pour

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad telque \quad n \geq N \Rightarrow \tag{1.10}$$

$$\varepsilon \geq \|(I - B)x_n - (I - B)y\| \geq \|x_n - y\| - \|Bx_n - By\|$$

comme $x_n \nrightarrow y, \exists\varepsilon_0 > 0$ et $(x_{n_k})_k$ telle que $\|x_{n_k} - y\| \geq \varepsilon_0$, et comme B est une contraction alors
$\exists 0 < \delta < 1$ avec $\|Bx_{n_k} - By\| \leq \delta\|x_{n_k} - y\|$. Ainsi, en utilisant (1.10), on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \|(I-B)x_{n_k} - (I-B)y\| \\ &\geq \|x_{n_k} - y\| - \|Bx_{n_k} - By\| \\ &\geq \|x_{n_k} - y\| - \delta\|x_{n_k} - y\| \\ &= (1-\delta)\|x_{n_k} - y\| \\ &\geq (1-\delta)\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Mais ε_0 est fixé, $\delta < 1$, par conséquent on aura une contradiction lorsque $\varepsilon \to 0$. Donc, $I - B$ est bien un homeomorphisme. □

1.2 Quelques Théorèmes de point fixe

Définition 1.21. Soient (X,d) un espace métrique, une application f est défini par $f : X \to X$, on dit que $x \in X$ est un ponit fixe de f si $f(x) = x$.

1.3 Théorème de point fixe de Banach

Vers 1922, Banach reconnu le rôle fondamental de la complétude métrique, il ennonce le théorème suivant :

Théorème 1.13. *(Théorème de Banach(1922) Soit (E,d) un espace métrique complet non vide et soit $f : E \to E$ une application α-contraction $i.e$ il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $d(f(x),f(y)) \leq \alpha d(x,y)$, pour tout $x, y \in E$. Alors f possède un unique point fixe.*

Preuve (i) L'unicité :

On pose que $x,y \in E$ deux points fixes de f alors $f(x) = x, f(y) = y$

$$d(x,y) = d(f(x),f(y)) \leq \alpha d(x,y)$$

comme $0 < \alpha < 1$ donc $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

(ii) L'existence :

On choisit un point $x_0 \in E$ quelconque et on définit la suite $x_n = f(x_{n-1})$, on montre par récurrence que $d(x_n,x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0,x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on montre que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy :

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n+p}) &\leq \sum_{n=0}^{p-1} d(x_{n+k},x_{n+k+1}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^{n+k} d(x_0,x_1) \\ &\leq \alpha^n \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^k d(x_0,x_1) \\ &\leq \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

et donc $d(x_n,x_{n+p}) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, ceci exprime le fait que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E, et comme E est un espace complet, il existe $x \in E$ telque $x_n \to x$. Par continuité, $x_{n+1} = f(x_n) \to f(x)$, d'où $f(x) = x$. □

1.4 Théorème de point fixe de Brouwer

Théorème 1.14. *(Théorème de Brouwer(1910)[6]) Soit C un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

1.5 Théorème de point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder est une généralisation de théorème de Brouwer, il s'énonce ainsi :

Théorème 1.15. *(Théorème de Schauder(1930)) Soit C un sous ensemble fermé et convex d'un espace de Banach E et $f : C \to C$ une application continue telleque $f(C)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe. Plus généralement, si C est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.*

Preuve On note K l'adhérence de $f(C)$ i.e $K = \overline{f(C)}$ qui est par hypothèse un compact. $K \subset C$ car C est un fermé (si C est compact alors $K = f(C)$ car $f(C)$ est compact).
Pour chaque n, soit F_n un $\frac{1}{n}-$réseau de K i.e $F_n = \{x_1,x_2,...,x_k\} \subset K$ telque
$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i,\frac{1}{n})$ et soit $P_n : K \to conv(F_n)$ une projection de Schauder, comme C est convexe et F_n une partie de C alors $conv(F_n) \subset C$ est un sous ensemble convexe et compact. On définit $f_n : conv(F_n) \to conv(F_n), f_n = P_n \circ f_{|conv(F_n)}$. Par le théorème de Brouwer $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins un point fixe y_n i.e $f_n(y_n) = y_n$. Or $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ qui est compact et donc la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous suite convergente que nous noterons de la même manière. On pose

$$y = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \tag{1.11}$$

et on a $y = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \in C$ car $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset K \subset C$ fermé d'où contient les limites de tous ses suites convergentes.
Montrons $f(y) = y$. En effet :

$$\|f_n(y_n) - f(y_n)\| = \|P_n(f(y_n)) - f(y_n)\| < \frac{1}{n}.$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} f(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.
D'aprés l'égalité (1.11) et par la continuité de f, on obtient : $f(y) = y$. Par conséquent f admet un point fixe. $\square$

Chapitre 2

Théorème de point fixe de Krasnoselskii

En 1955 Krasnoselskii a observé que dans un bon nombre de problèmes, l'intégration d'un opérateur différentiel donne naissance à une somme de deux applications, une contraction et une application compacte. Il déclare alors :

Principe. L'intégrale d'un opérateur différentiel peut produire une somme de deux applications, une contraction et un opérateur compact.

Pour mieux comprendre cette observation de Krasnoselskii on considère l'équation différentielle suivante.

$$x'(t) = -a(t)x(t) - g(t,x), \tag{2.1}$$

où $a(t+T) = a(t)$ et $g(t+T,x) = g(t,x)$ pour un certain $T > 0$.

On peut transformer cette équation sous une autre forme en écrivant,

$$x'(t)exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) = -a(t)x(t)exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) - g(t,x)exp\left(\int_0^t a(s)ds\right).$$

Par conséquent,

$$\left(x(t)exp\int_0^t a(s)ds\right)' = -g(t,x(t))exp\left(\int_0^t a(s)ds\right).$$

Une intégration de $t-T$ à t donne

$$\int_{t-T}^t \left(x(u)exp\int_0^u a(s)ds\right)' du = -\int_{t-T}^t g(u,x(u))\left(exp\int_0^u a(s)ds\right) du.$$

Ainsi,

$$x(t)\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) - x(t-T)\exp\int_0^{t-T} a(s)ds = -\int_{t-T}^t g(u,x(u))\left(\exp\int_0^u a(s)ds\right) du, \tag{2.2}$$

alors,

$$\begin{aligned} x(t) =& x(t-T)\exp\int_0^{t-T} a(s)ds \left(\exp - \int_0^t a(s)ds\right) \\ & - \int_{t-T}^t g(u,x(u)) \left(\exp \int_0^u a(s)ds\right) du \left(\exp - \int_0^t a(s)ds\right) du, \end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = x(t-T)exp\left(-\int_{t-T}^t a(s)ds\right) - \int_{t-T}^t g(u,x(u))exp\left(-\int_u^t a(s)ds\right). \tag{2.3}$$

Si on suppose que $exp\left(-\int_{T-t}^t a(s)ds\right) = \alpha < 1$, et si $(E,\|\cdot\|)$ est l'espace de Banach de fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et T-périodique, alors l'équation (2.3) peut se mettre sous la forme

$$\phi(t) = (B\phi)(t) + (A\phi)(t)$$

avec B est une contraction de constante $\alpha < 1$ et A est une application compacte. Cet exemple montre bien la naissance de l'application $P\phi = B\phi + A\phi$ qui s'identifie à une somme d'une contraction et une application compacte. La recherche d'une solution pour (2.3) exige donc un théorème adéquat qui s'applique à cette opérateur hybride P et qui peut conclure l'existence d'un point fixe qui sera, à son tour, solution de l'équation initiale (2.1). Krasnoselskii trouva la solution en combinant les deux théorèmes de Banach et celui de Schauder en un seul théorème hybride mais puissant qui porte son nom. En clair, il établit le résultat suivant :

2.1 Théorème de point fixe de Krasnoselskii

Théorème 2.1. *(Théorème de Krasnoselskii(1955)) : Soit $(E,\|.\|)$ un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe et fermée de S. On suppose que : $A, B : M \to E$ sont deux applications satisfaisant :*

(i) $Ax + By \in M, \forall x, y \in M,$

(ii) *A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact,*

(iii) *B est une contraction de constante $\alpha < 1$.*

Alors $\exists x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$.

Preuve Soient A, B deux applications vérifiant l'hypothèse, on a B est contractant alors $\exists \alpha$ telque $0 < \alpha < 1$ et

$$\|B(x) - B(y)\| \leq \alpha \|x - y\|, \forall x, y \in M.$$

D'aprés le lemme (1.12) :$(I-B) : M \to (I-B)M$ est un homeomorphisme alors $(I-B)^{-1}$ existe et continue sur $(I-B)M$. D'autre part, pour tout $y \in M$ l'équation $x = B(x)+A(y)$ admet unique solution $x \in M$ puisque l'application $x \mapsto Bx + Ay$ définit une contraction de M dans lui même grâce à théoreme de Banach. Ainsi $A(y) \in (I - B)M$ pour tout $y \in M$ et $(I - B)^{-1}A : M \to M$ est une application continue car elle est composée de deux applications continues. Comme A est une application compact alors
$(I - B)^{-1}A : M \to M$ est aussi compact car : si A est compact alors $AM \subset K$ avec K compact de E.
$(I - B)^{-1}(AM) \subset (I - B)^{-1}(K)$ avec $(I - B)^{-1}(K)$ compact car $(I - B)^{-1}$ est continue donc $(I - B)^{-1}A : M \to M$ est compact.
D'aprés le théorème de Schauder, $(I - B)^{-1}A$ possède un point fixe dans M. □

Remarque 2.1. Si $A = 0$ alors ce théorème coïncide avec le principe de l'application contractante de Banach et si $B = 0$ il coïncide avec le théorème de Schauder.

Maintenant, on va traiter le théorème de Burton-Kirk pour cela on aurra besoin le théorème de Schaefer qui est en concurrence avec Schauder, Le théorème de Schaefer exige que nous ayons une liaison a priori sur des solutions totalement inconnues de l'équation d'un opérateur $\varphi = \lambda A(\varphi)$ pour $0 < \lambda < 1$.

2.2 Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 2.2. *(Théorème de Schaefer(1955)) : Soit* $(E,\|.\|)$ *un espace normé,* $f : E \to E$ *une application continue et compact, Alors :*

1. *Ou bien l'equation* $x = \lambda f(x)$ *admet une solution pour* $\lambda = 1$*,*

2. *Ou bien ,* $\forall \lambda \in]0,1[$ *l'ensemble* $\{x \in E, x = \lambda f(x)\}$ *est non borné.*

Preuve On note $B = \{x \in E, \quad x = \lambda f(x)\}$
B est borné alors $\exists M > 0$ telque $\forall x \in B, \|x\| < M$. On définit une autre fonction :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si \quad \|f(x)\| \leq M \\ \frac{M}{\|f(x)\|} f(x), & \|f(x)\| > M. \end{cases} \tag{2.4}$$

Ainsi $\tilde{f}$ est définit de $B(0,M)$ dans elle même.
On définit K une partie de $\tilde{f}(B(0,M))$ tel que K fermé et convex. On peut considérer que $\tilde{f} : K \to K$, la fonction f est compact alors $\tilde{f}$ est aussi compact alors on peut appliquer le théorème de point fixe de Schauder i.e $\tilde{f}$ admet un point fixe : $x = \tilde{f}(x)$.
Si ce point x n'est pas un point fixe de f i.e $x \neq f(x)$ ce signifie que $\|f(x)\| > M$, d'aprés la définition de $\tilde{f}$:

$$x = \tilde{f}(x) = \frac{M}{\|f(x)\|} f(x) = \lambda f(x)$$

avec $\lambda = \frac{M}{\|f(x)\|} < 1$
Alors $x \in B$ et on a :

$$\|x\| = \|\tilde{f}(x)\| = \frac{M}{\|f(x)\|} \|f(x)\| = M$$

contradiction avec l'hypothèse. Donc, x est un point fixe de f. $\square$

Proposition 2.3. *Soit $(E,\|.\|)$ un espace normé, si $0 < \lambda < 1$ et si $B : E \to E$ est une contraction avec le constant de contraction α, Alors :*

$$\lambda B \frac{1}{\lambda} : E \to E$$

est une application contractant avec le constant de contraction α indépendant de λ, en particulier :

$$\|\lambda B(x/\lambda)\| \leq \alpha \|x\| + \|B0\|$$

Preuve On montre que $\lambda B \frac{1}{\lambda}$ est contractant :
si $x \in E \Rightarrow x/\lambda \in E \Rightarrow B(x/\lambda) \in E \Rightarrow \lambda B(x/\lambda) \in E$;
si $x, y \in E$, alors

$$\begin{aligned} \|\lambda B(x/\lambda) - \lambda B(y/\lambda)\| &= \lambda \|B(x/\lambda) - B(y/\lambda)\| \\ &\leq \lambda\alpha \|(x/\lambda) - (y/\lambda)\| \\ &= \alpha \|x - y\|. \end{aligned}$$

Donc l'application $\lambda B\frac{1}{\lambda}$ est contractant.
Pour montrer l'inégalité : soit $x \in E$

$$\begin{aligned}
\|\lambda B(x/\lambda)\| &= \lambda\|B(x/\lambda)\| \\
&= \lambda\|B(x/\lambda) - B0 + B0\| \\
&\leq \lambda(\|B(x/\lambda) - B0\| + \|B0\|) \\
&\leq \lambda(\alpha\|(x/\lambda) - 0\| + \|B0\|) \\
&\leq (\lambda\alpha/\lambda)\|x\| + \|B0\| \\
&\leq \alpha\|x\| + \|B0\|.
\end{aligned}$$

2.3 Théorème du point fixe de Burton-Kirk(Krasnoselskii-Schaefer)

Théorème 2.4. *Soit $(E,\|.\|)$ un espace de Banach et $A, B : E \to E$ deux applications, A est continue et compacte et B est une contraction de constant $\alpha < 1$. Alors*

1. *Ou bien $x = \lambda B(x/\lambda) + \lambda Ax$ admet une solution dans E pour $\lambda = 1$,*

2. *Ou bien l'ensemble $\{x \in E, \lambda B(x/\lambda) + Ax = x, \forall\lambda \in]0,1[\}$ est non borné.*

Preuve D'aprés la proposition (2.3) $\lambda B\frac{1}{\lambda}$ est une application contractant de E dans E. Par conséquent, pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \lambda B(x/\lambda) + \lambda Ay$ est aussi une contraction et d'aprés le théorème de Banach elle admet un unique point fixe x dans E tel que :
$x = \lambda B(x/\lambda) + \lambda Ay$. Alors

$$\frac{x}{\lambda} = B\frac{x}{\lambda} + Ay$$

d'où

$$(I - B)\frac{x}{\lambda} = Ay$$

d'où

$$\frac{x}{\lambda} = (I - B)^{-1}Ay$$

donc

$$x = \lambda(I - B)^{-1} Ay \tag{2.5}$$

D'aprés le lemme (1.12) $(I - B)^{-1}$ existe et continue. Comme A est continue et compacte alors $(I - B)^{-1}A$ est aussi continue et compacte.

Donc, d'aprés le théorème de Shaefer l'equation (2.5) admet une solution avec $x = y$ pour $\lambda = 1$, ou bien l'ensembre $\{x \in E, \lambda(I - B)^{-1}Ax = x, \forall \lambda \in]0,1[\}$ est non borné. $\square$

Chapitre 3

Problème d'equation différentielle impulsive

Dans ce chapitre on étudie l'existence d'une solution pour les équations différentielles impulsives du premier ordre avec condition initiale, en appliquant le théorème de point fixe de Krasnoselskii :

Définition 3.1. Le problème de l'équation différentielle impulsive est défini par les égalitées suivantes :

$$\begin{cases} y^{'}(t) = f(t,y(t)), \quad si \quad t \in J = [0,b], t \neq t_k, k = 1,...,m \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1,...,m \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée, et $I_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), k = 1,...,m$ sont des fonctions données et $y(t_k^+) = \lim_{h \to 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h \to 0^-} y(t_k - h)$.

3.1 Espace des solutions

On définit l'espace

$$PC(J, \mathbb{R}^n) = \{y : J \to \mathbb{R}^n, y_k \in C(J_k, \mathbb{R}^n), \ \exists y(t_k^+), y(t_k^-) :$$
$$\text{et satisfaint } y(t_k^-) = y(t_k), k = 1,...,m. J_0 = [0,t_1], J_k =]t_k,t_{k+1}]\}.$$

muni de la norme :

$$\|y\|_{PC} = \max\left(\|y_k\|_\infty, \quad k = 1,...,m\right)$$

où $y_k = y|_{J_k}$ et $\|y_k\|_\infty = \sup\left\{\|y(t)\|, t \in]t_k,t_{k+1}]\right\}$.

Lemme 3.1. *L'espace* $(PC,\|\cdot\|_{PC})$ *est un espace de Banach.*

Preuve On suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq PC$ une suite de Cauchy alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \forall n, p \in \mathbb{N}, n > p : \|y_n - y_p\|_{PC} \leq \varepsilon$$

d'aprés la définition de l'espace PC, on a :

1. $y_n : J \to \mathbb{R}^n$,
2. $y_n \in C\left(J_k,\mathbb{R}^n\right)$,
3. $\exists y_n(t_k^+), y_n(t_k^-)$ tel que $y_n(t_k^-) = y_n(t_k), k = \overline{1,m}$.

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_p\|_{PC} &= \max_{k=\overline{1,m}} \|(y_k)_n - (y_k)_p\|_\infty \\
&\Rightarrow \|(y_k)_n - (y_k)_p\|_\infty \leq \varepsilon, \forall k = 1,...,m. \\
&\Rightarrow \sup_{t\in]t_k,t_{k+1}]} \|y_n(t) - y_p(t)\| \leq \varepsilon \quad et \sup_{t\in[0,t_1]} \|y_n(t) - y_p(t)\| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

On va chercher une limite pour la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à PC, pour cela on fait les étapes suivantes :
Pour $k = 1$:

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_p\|_\infty &= \sup_{t\in[0,t_1]} \|y_n(t) - y_p(t)\| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $C([0,t_1],\mathbb{R}^n)$ et comme cet espace est de Banach alors $\exists y_1 \in C([0,t_1],\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y_1(t), \quad \forall t \in [0,t_1].$$

Pour $k = 2$:
On définit la suite de fonctions suivante :

$$\tilde{y}_n = \begin{cases} y_n(t), & t \in]t_1,t_2] \\ y_n(t_1), & t = t_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\tilde{y}_n - \tilde{y}_p\|_\infty &= \sup_{t\in]t_1,t_2]} \|\tilde{y}_n(t) - \tilde{y}_p(t)\| \\
&= \sup_{t\in]t_1,t_2]} \|y_n(t) - y_p(t)\| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, $(\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans l'espace de Banach $C\left([t_1,t_2],\mathbb{R}^n\right)$ d'où elle reste une suite de Cauchy dans $C\left(]t_1,t_2],\mathbb{R}^n\right)$ alors $\exists y_2 \in C\left(]t_1,t_2],\mathbb{R}^n\right)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n(t) = y_2(t), \quad \forall t \in]t_1,t_2].$$

De la même façon, on définit la suite :

$$(\tilde{y}_k)_n(t) = \begin{cases} y_n(t), & t \in]t_k,t_{k+1}] \\ y_n(t_k), & t = t_k. \end{cases} \tag{3.3}$$

On trouve que :

$$\begin{aligned} \|(\tilde{y}_k)_n - (\tilde{y}_k)_p\|_\infty &= \|(y_k)_n - (y_k)_p\|_\infty, k = \overline{3,m} \\ &= \sup_{t\in]t_k,t_{k+1}]} \|y_n(t) - y_p(t)\|, k = \overline{3,m} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ou $\|(\tilde{y}_k)_n - (\tilde{y}_k)_p\|_\infty = \|y_n(t_k) - y_p(t_k)\| \leq \varepsilon$,
et on a :

$$\lim_{n\to\infty} (\tilde{y}_k)_n(t) = y_k(t), \forall t \in]t_k,t_{k+1}], k = \overline{3,m}.$$

Posons

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & si \quad t \in [0,t_1], \\ y_2(t), & si \quad t \in]t_1,t_2], \\ \dots & \\ y_{n+1}(t), & si \quad t \in]t_m,b]. \end{cases}$$

Par conséquant,

$$\|y_n - y\|_{PC} = \max_{k=\overline{1,m}} \|(y_k)_n - y_k\|_\infty,$$

et $\|(y_k)_n - y_k\|_\infty = \sup_{t\in]t_k,t_{k+1}]} \|y_n(t) - y(t)\| \leq \varepsilon$.
Donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y dans PC et de plus, $y \in PC$. D'où $PC(J,\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach. □

3.2 La solution

Lemme 3.2. *Une fonction $y \in PC(J,\mathbb{R}^n)$ est une solution du problème (3.1) si et seulement si*

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)), t \in [0,b]. \tag{3.4}$$

Preuve On suppose que y est une solution du problème (3.1), alors y satisfait les égalités suivantes :

$$y^{'}(t) = f(t,y(t)), \quad si \quad t \in J = [0,b], t \neq t_k, k = 1,...,m,$$

$$y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1,...,m,$$

$$y(0) = y_0.$$

Soit $t \in [0,b]$ alors $\exists k \in \{1,...,m\}$ telle que $t \in]t_k,t_{k+1}]$.

On fait les étapes suivants :

(a) Si $t \in [0,t_1]$:

$$\begin{aligned} y^{'}(t) = f(t,y(t)) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^t y^{'}(s)ds = \int_0^t f(s,y(s))ds, \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds. \end{aligned}$$

(b) Si $t \in]t_1,t_2]$:

$$\begin{aligned} y^{'}(t) = f(t,y(t)) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{t_1+h}^t y^{'}(s)ds = \int_{t_1+h}^t f(s,y(s))ds \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = y(t_1+h) + \int_{t_1+h}^t f(s,y(s))ds \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0^+} y(t) = \lim_{h\to 0^+} \left[y(t_1+h) + \int_{t_1+h}^t f(s,y(s))ds \right] \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = y(t_1^+) + \int_{t_1}^t f(s,y(s))ds \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = y(t_1^-) + I_1(y(t_1^-)) + \int_{t_1}^t f(s,y(s))ds \end{aligned}$$

On sait que

$$y(t_1^-) = y(t_1) \Rightarrow y(t_1^-) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s,y(s))ds,$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_0^{t_1} f(s,y(s))ds + I_1(y(t_1^-)) + \int_{t_1}^{t} f(s,y(s))ds \\ &= y_0 + I_1(y(t_1^-)) + \int_0^{t} f(s,y(s))ds, \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)), \quad t \in [0,t_2]$$

(c) Si $t \in]t_m,b]$

$$\begin{aligned} y^{'}(t) = f(t,y(t)) &\Leftrightarrow \int_{t_m+h}^{t} y^{'}(s)ds = \int_{t_m+h}^{t} f(s,y(s))ds \\ &\Leftrightarrow y(t) = y(t_m+h) + \int_{t_m+h}^{t} f(s,y(s))ds \\ &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+} y(t) = \lim_{h\to 0^+} \left[y(t_m+h) + \int_{t_m+h}^{t} f(s,y(s))ds \right] \\ &\Leftrightarrow y(t) = y(t_m^+) + \int_{t_m}^{t} f(s,y(s))ds \\ &\Leftrightarrow y(t) = y(t_m^-) + I_m(y(t_m^-)) + \int_{t_m}^{t} f(s,y(s))ds. \end{aligned}$$

On sait que

$$y(t_m^-) = y(t_m) \Rightarrow y(t_m^-) = y_0 + \int_0^{t_m} f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t_m} I_k(y(t_k^-)) \tag{3.5}$$

donc, on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + I_m(y(t_m^-)) + \int_{t_m}^{t} f(s,y(s))ds + \int_0^{t_m} f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t_m} I_k(y(t_k^-))ds \\ &= y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)), \quad t \in [0,b]. \tag{3.6}$$

□

3.3 L'existence de la solution

On va donner un premier résultat concernant l'existence de la solution du problème (3.1) en utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii :

Théorème 3.3. *Supposons que :*

(H_1) $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une fonction* L^1-*Carathédory,*

(H_2) $I_k \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), k = 1,...,m$ *avec* $\exists c_k > 0,$ *telque*

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad \|I_k(x) - I_k(y)\| \leq c_k\|x - y\|. \tag{3.7}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{m} c_k < 1. \tag{3.8}$$

sont vérifiées. Alors le problème (3.1) admet au mois une solution.

Preuve Considérons l'opérateur N défini par :

$$\begin{array}{rcl} N : PC(J,\mathbb{R}^n) & \to & PC(J,\mathbb{R}^n) \\ y & \to & (N(y))(t) = y_0 + \displaystyle\int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)) \end{array}$$

D'aprés le lemme (4.1) les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (3.1). On va appliquer le théorème de *Krasnoselskii* sur l'opérateur N :

$$N(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)),$$

on l'ecrit sous la forme de la somme de deux applications A et B tel que : $N = A + B$ avec A est une contraction et B est complétement continue.
On suppose que :

$$A(y(t)) = y_0 + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)), \tag{3.9}$$

$$B(y(t)) = \int_0^t f(s,y(s))ds. \tag{3.10}$$

Le preuve est donné par les étapes suivants :

Etape1 Soit M une partie non vide, convex et fermée de PC. On suppose que :

$A, B : M \to PC$.

M est défini par la formule suivante :

$$\exists l > 0, M = \{y \in PC, telque \quad \|y\|_{PC} \leq l\}.$$

On montre que $A(x) + B(y) \in M, \forall x, y \in M$:

Soient $x, y \in M$ il faut que $A(x) + B(y) \in M$,

$x, y \in M \Rightarrow \|x\|_{PC} \leq l \quad et \quad \|y\|_{PC} \leq l$,

On a :

$$\begin{aligned}
\|A(x(t)) + B(y(t))\| &= \|x_0 + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k^-)) + \int_0^t f(s,y(s))ds\| \\
&\leq \|x_0\| + \|\sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k^-))\| + \|\int_0^t f(s,y(s))ds\| \\
&\leq \|x_0\| + \sum_{0<t_k<t} \|I_k(x(t_k^-))\| + \int_0^t \|f(s,y(s))\|ds \\
&\leq \|x_0\| + \sum_{k=1}^{m} \|I_k(x(t_k^-))\| + \int_0^t h_r(s)ds \\
&\leq \|x_0\| + \sum_{k=1}^{m} \|I_k(x(t_k^-))\| + \|h_r\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

On a $\|x\|_{PC} \leq l$ donc $\|x(t_k^-)\| \leq l, k = 1,...,m$ donc $x(t_k^-) \in \bar{B}(0,l) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$.

Puisque les I_k sont continues sur le compact $\bar{B}(0,r)$ alors

$$\sup_{x \in \bar{B}(0,r)} \|I_k(x)\| < +\infty. \tag{3.11}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|A(x(t)) + B(y(t))\| &\leq \|x_0\| + \sum_{k=1}^{m} \|I_k(x(t_k^-))\| + \|h_r\|_{L^1} \\
&\leq \|x_0\| + \sum_{k=1}^{m} \sup_{x \in \bar{B}(0,l)} \|I_k(x)\| + \|h_r\|_{L^1} \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Donc $\|A(x(t)) + B(y(t))\|_{PC} \leq C$ avec C un constant positif.

Donc $A(x) + B(y) \in M$.

Etape2 : On montre que A est une contraction :

Soient $y,z \in PC\,(J,\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\|A(y(t)) - A(z(t))\| &= \|\sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)) - \sum_{0<t_k<t} I_k(z(t_k^-))\| \\
&= \|\sum_{0<t_k<t} \left[I_k(y(t_k^-)) - I_k(z(t_k^-))\right]\| \\
&\leq \sum_{0<t_k<t} \|I_k(y(t_k^-)) - I_k(z(t_k^-))\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} c_k \|y - z\|
\end{aligned}$$

et comme :

$$\sum_{k=1}^{m} c_k < 1. \tag{3.12}$$

Donc A est une contraction .

Etape3 : On montre que B est complétement continue en appliquant le théorème d'Arzela-Ascoli :

1. B transforme tout ensemble borné en un ensemble borné :

   Soit $y \in M$

$$\begin{aligned}
\|B(y(t))\| &= \left\|\int_0^t f(s,y(s))ds\right\| \\
&\leq \int_0^t \|f(s,y(s))\|\, ds \\
&\leq \int_0^t h_r(s)ds \\
&\leq \|h_r\|_{L^1}
\end{aligned}$$

2. B est équicontinu :

   Soient $l_1, l_2 \in [0,b]$ tel que $l_1 < l_2$ et soit $y \in M$

$$\begin{aligned}
\|B(y(l_2)) - B(y(l_1))\| &= \left\|\int_0^{l_2} f(s,y(s))ds - \int_0^{l_1} f(s,y(s))ds\right\| \\
&= \left\|\int_0^{l_1} f(s,y(s))ds + \int_{l_1}^{l_2} f(s,y(s))ds - \int_0^{l_1} f(s,y(s))ds\right\| \\
&= \left\|\int_{l_1}^{l_2} f(s,y(s))ds\right\| \\
&\leq \int_{l_1}^{l_2} \|f(s,y(s))\|ds \\
&\leq \int_{l_1}^{l_2} h_r(s)ds.
\end{aligned}$$

Si $l_1 \to l_2$ alors $\|B(y(l_2)) - B(y(l_1))\| \to 0$.

3. B est continue :

   Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans PC converge vers y. Il existe un entier l tel que $\|y_n\|_{PC} \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|y\|_{PC} \leq l$ donc $y_n \in M$ et $y \in M$.

   D'aprés le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\begin{aligned}\|B(y_n) - B(y)\| &= \left\|\int_0^t f(s,y_n(s))ds - \int_0^t f(s,y(s))ds\right\| \\ &= \left\|\int_0^t \left(f(s,y_n(s))ds - f(s,y(s))\right) ds\right\| \\ &\leq \int_0^t \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\| ds \to 0 \quad si \quad n \to \infty\end{aligned}$$

   Donc B est continu.

D'où d'aprés le théoreme de Krasnoselskii N admet un point fixe. ☐

Exemple 3.1. On considère l'équation différentielle impulsive suivante :

$$\begin{cases} x^{'}(t) = \frac{tx^2(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)}, \quad si \quad t \in J = [0,1], t \neq t_k = \frac{1}{2}. \\ y^{'}(t) = \frac{ty^2(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)}, \quad t \in J = [0,1], t \neq t_k = \frac{1}{2}. \\ x(t_k^+) - x(t_k^-) = \frac{1}{2}x(t_k^-), \quad t_k = \frac{1}{2}. \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) = \frac{1}{2}y(t_k^-), \quad t_k = \frac{1}{2}. \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

La fonction f est défini par la formule suivant :

$$\begin{array}{llll} f: & J \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (t,(x,y)) & \mapsto & f(t,(x,y)) = \left(\frac{tx^2(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)}; \frac{ty^2(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)}\right). \end{array}$$

est L^1-carathédory car :

1. $t \mapsto f(t,y)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, car on sait que tout fonction continue est mesurable.
2. On peut montrer que la fonction $y \mapsto f(t,y)$ est continue presque pour tout $t \in [0,b]$ on utilisons les coordonés polaires.
3. Pour tout $r > 0$ il existe $h_r \in L^1([0,b],\mathbb{R}_+)$ telle que $\|f(t,y)\| \leq h_r(t)$ presque pour tout $t \in [0,b]$ et pour toute $\|y\| \leq r$. avec $h_r(t) = \frac{t}{r}$.

$I_k(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$ est une contraction.

Donc, le problème (3.13) admet une solution d'aprés le théorème (3.3).

Chapitre 4

Problème de l'equation différentielle impulsive de type neutre

Dans ce chapitre on étudie l'existence d'une solution pour les équations différentielles impulsives de type neutre en appliquant le théorème de point fixe de Krasnoselskii-Schaefer :

Définition 4.1. Le problème d'equation différentielle impulsive de type neutre est défini par les égalitées suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(y(t) - h(t,y(t))\right) = f(t,y(t)), \quad si \quad t \in J = [0,b], t \neq t_k, k = 1,...,m \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k^-)), \quad k = 1,...,m \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f, h : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $I_k \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), k = 1,...,m$ sont des fonctions données et $y(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h\to 0^-} y(t_k - h)$.

4.1 Espace des solutions

L'espace des solutions est de la forme :

$$PC(J,\mathbb{R}^n) = \{y : J \to \mathbb{R}^n, y_k \in C(J_k,\mathbb{R}^n), \ \exists y(t_k^+), y(t_k^-) : \text{ et satisfaint} \\ y(t_k^-) = y(t_k), k = 1,...,m. J_0 = [0,t_1], J_k =]t_k,t_{k+1}]\}.$$

muni de la norme :

$$\|y\|_{PC} = \max\left(\|y_k\|_\infty, \quad k = 1,...,m\right)$$

où $y_k = y|_{J_k}$ et $\|y_k\|_\infty = \sup\left\{\|y(t)\|, t \in]t_k,t_{k+1}]\right\}$.

4.2 La solution

Lemme 4.1. *Une fonction $y \in PC(J,\mathbb{R}^n)$ est une solution du problème (4.1) si et seulement si*

$$y(t) = y_0 - h(0,y_0) + h(t,y(t)) + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k)), \tag{4.2}$$

Preuve 1. si $t \in [0,t_1]$:

On intégre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) - h(t,y(t))\right) = f(t,y(t)), \tag{4.3}$$

on obtient :

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left(y(s) - h(s,y(s))\right) ds = \int_0^t f(s,y(s))ds, \tag{4.4}$$

alors :

$$y(t) - h(t,y(t)) - y_0 + h(0,y_0) = \int_0^t f(s,y(s))ds, \tag{4.5}$$

donc la solution est notée et donnée par :

$$y_1(t) = y_0 - h(0,y_0) + h(t,y(t)) + \int_0^t f(s,y(s))ds. \tag{4.6}$$

2. Pour $t \in]t_1,t_2]$:

De la même façon, on trouve :

$$\int_{t_1^+}^t \frac{d}{ds}\left(y(s) - h(s,y(s))\right) ds = \int_{t_1^+}^t f(s,y(s))ds, \tag{4.7}$$

d'où :

$$y(t) - h(t,y(t)) - y(t_1^+) + h(t_1^+,y(t_1^+)) = \int_{t_1^+}^t f(s,y(s))ds, \tag{4.8}$$

on a $y(t_1^+) = y(t_1^-) + I_1(y(t_1^-))$.
Donc :

$$\begin{aligned} y(t) - h(t,y(t)) - I_1(y_1(t_1^-)) \quad &- \quad \left(h(t_1^-,y_1(t_1^-)) + y_0 - h(0,y_0) + \int_0^{t_1^+} f(s,y(s))ds\right) \\ &+ \quad h(t_1^+,y_1(t_1^+)) = \int_{t_1^+}^{t} f(s,y(s))ds \end{aligned}$$

Donc la solution est notée et donnée par :

$$y_2(t) = y_0 - h(0,y_0) + h(t,y(t)) + \int_0^t f(s,y(s))ds + I_1(y_1(t_1^-)), \quad t \in [0,t_2] \tag{4.9}$$

d'où :

$$y_k(t) = y_0 - h(0,y_0) + h(t,y(t)) + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)), \quad k = \overline{3,m} \tag{4.10}$$

$\square$

Par conséquent la solution est donnée par :

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t), & si \quad t \in [0,t_1] \\ y_2(t), & si \quad t \in]t_1,t_2] \\ y_k(t), & si \quad t \in]t_k,t_{k+1}]... \\ y_{n+1}(t), & si \quad t \in]t_m,b]. \end{cases}$$

4.3 L'existence de la solution

Théorème 4.2. *Supposons que :*

(H_1) $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une fonction* L^1-*Carathédory.*

(H_2) $h : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une contraction i.e* $\exists c \in]0,1[$ *tel que* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$\|h(t,x) - h(t,y)\|_{PC} \leq c\|x - y\|_{PC}.$$

avec $h(.,0) = 0$.

(H_3) *Il existe une fonction* $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *continue et croissante, et* $p \in L^1(J,\mathbb{R})$ *telle que :*

$$\|f(t,x(t))\| \leq p(t)\psi(\|x\|), \quad pour \quad t \in [0,b], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

avec

$$\int_0^b p(s)ds < \int_{\|a\|}^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)}. \tag{4.11}$$

Sont vérifiés. Alors le problème (4.1) *admet au mois une solution.*

Preuve Cas1 :

On considère le problème (4.1) sur $t \in [0,t_1]$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(y(t) - h(t,y(t))\right) = f(t,y(t)), \quad si \quad t \in [0,t_1] \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4.12}$$

On considère l'opérateur N_1 défini par :

$$\begin{array}{rcl} N_1 : C([0,t_1],\mathbb{R}^n) & \to & C([0,t_1],\mathbb{R}^n) \\ y & \to & (N(y))(t) = y_0 - h(0,y_0) + h(t,y(t)) + \int_0^t f(s,y(s))ds. \end{array}$$

On va appliquer le théorème de Burton-Kirk sur l'opérateur N alors on l'ecrit sous la forme :$N(y) = A(y) + B(y)$ avec

$$A(y(t)) = y_0 - h(0,y_0) + h(t,y(t)). \tag{4.13}$$

$$B(y(t)) = \int_0^t f(s,y(s))ds. \tag{4.14}$$

Etape1 : On montre que A est une contraction :

$$\begin{array}{rcl} \|A(y(t)) - A(z(t))\| & = & \|h(t,y(t)) - h(t,z(t))\| \\ & \leq & c\|y - z\| \end{array}$$

Donc A est une contraction (car $c < 1$).

Etape2 : B est complétement continue : de la même façon de la démonstration precédente.

Etape3 : On montre que l'ensemble $F = \left\{x \in PC, \lambda B(\frac{x}{\lambda}) + A(x) = x, \forall \lambda \in]0,1]\right\}$ est borné $i.e \quad \exists r > 0, \forall x \in F, \|x\|_{PC} \leq r$

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|\lambda B(\frac{x}{\lambda}) + A(x)\| \\
&= \|\lambda \int_0^t f(s,\frac{x}{\lambda}(s))ds + x_0 - h(0,x_0) + h(t,x(t))\| \\
&\leq \|x_0 - h(0,x_0)\| + \|h(t,x(t))\| + \left\|\lambda \int_0^t f(s,\frac{x}{\lambda}(s))ds\right\| \\
&\leq \|x_0 - h(0,x_0)\| + \|h(t,x(t)) - h(0,0) + h(0,0)\| + \lambda \int_0^t \|f(s,\frac{x}{\lambda}(s))ds\| \\
&\leq \|x_0 - h(0,x_0)\| + \|h(t,x(t)) - h(0,0)\| + \|h(0,0)\| + \lambda \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds \\
&\leq \|x_0 - h(0,x_0)\| + c\|x - 0\| + \lambda \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds \\
\|x\| - c\|x\| &\leq \|x_0 - h(0,x_0)\| + \lambda \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds \\
(1-c)\|x\| &\leq \|x_0 - h(0,x_0)\| + \lambda \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds \\
\|x\| &\leq \frac{1}{1-c}\|x_0 - h(0,x_0)\| + \frac{\lambda}{1-c} \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds.
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable : $x = \frac{x}{\lambda}$ alors :

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_{PC} &\leq \frac{1}{1-c}\|x_0 - h(0,x_0)\| + \frac{\lambda}{1-c} \int_0^t p(s)\psi(\|x(s)\|)ds \\
\lambda\|x\|_{PC} &\leq \frac{1}{1-c}\|x_0 - h(0,x_0)\| + \frac{\lambda}{1-c} \int_0^t p(s)\psi(\|x(s)\|)ds \\
\|x\|_{PC} &\leq \frac{1}{\lambda(1-c)}\|x_0 - h(0,x_0)\| + \frac{1}{1-c} \int_0^t p(s)\psi(\|x(s)\|)ds.
\end{aligned}$$

On note $P(s) = \frac{1}{1-c}p(s)$ et $k = \frac{1}{\lambda(1-c)}\|x_0 - h(0,x_0)\|$.

Donc

$$\|x\| \leq k + \int_0^t P(s)\psi(\|x(s)\|)ds. \tag{4.15}$$

Alors, d'aprés l'inégalité de Bihari $\exists M_0 > 0$ telle que

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,t_1]} \|x(t)\| \leq M_0 = G^{-1}\left(\int_0^{t_1} P(s)ds\right), \tag{4.16}$$

avec $G(\omega) = \displaystyle\int_{\|k\|}^{\omega} \frac{du}{\psi(u)}$. Alors l'ensemble F est borné. Donc d'aprés le théorème de Burton-Kirk l'opérateur N admet un point fixe.

Cas2 : si $t \in]t_1,t_2]$

On a le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(y(t) - h(t,y(t))\right) = f(t,y(t)), \quad si \quad t \in]t_1,t_2] \\ y(t_1^+) - y(t_1^-) = I_1(y(t_1^-)) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4.17}$$

La solution est donnée par :

$$y(t) = y_0 - h(0,y_0) + h(t,y(t)) + \int_0^t f(s,y(s))ds + I_1(y_1(t_1^-)). \tag{4.18}$$

On prend :

$$A(y(t)) = y_0 - h(0,y_0) + h(t,y(t)) + I_1(y_1(t_1^-)). \tag{4.19}$$

$$B(y(t)) = \int_0^t f(s,y(s))ds. \tag{4.20}$$

de la même façon, on applique le théorème de Burton-Kirk.

Etape 1 : On montre que A est une contraction : Soient $x, y \in PC$

$$\begin{aligned} \|A(x(t)) - A(y(t))\| &= \|h(t,x(t)) - h(t,y(t)) + I_1(x_1(t_1^-)) - I_1(y_1(t_1^-))\| \\ &\leq \|h(t,x(t)) - h(t,y(t))\| \\ &\leq c\|x - y\|. \end{aligned}$$

Donc A est une contraction.

Etape 2 : B est complétement continue, de la même façon de la démonstration précédente.

Etape3 : On montre que l'ensemble $F = \left\{x \in PC, \lambda B(\frac{x}{\lambda}) + A(x) = x, \forall\lambda \in]0,1]\right\}$ est borné $i.e \quad \exists r > 0, \forall x \in F, \|x\|_{PC} \leq r$

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|\lambda B(\frac{x}{\lambda}) + A(x)\| \\
&\leq \left\|\lambda \int_0^t f(s,\frac{x}{\lambda}(s))ds + x_0 - h(0,x_0) + h(t,x(t)) + I_1(x_1(t_1^-))\right\| \\
&\leq \lambda \int_0^t \|f(s,\frac{x}{\lambda}(s))\|ds + \|x_0 - h(0,x_0)\| + \|h(t,x(t))\| + \|I_1(x_1(t_1^-))\| \\
&\leq \lambda \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds + \|x_0 - h(0,x_0)\| + \|h(t,x(t)) - h(0,0) + h(0,0)\| \\
&+ \|I_1(x_1(t_1^-))\| \\
&\leq \lambda \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds + \|x_0 - h(0,x_0)\| + \|h(t,x(t)) - h(0,0)\| + \|h(0,0)\| \\
&+ \|I_1(x_1(t_1^-))\| \\
&\leq \lambda \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds + \|x_0 - h(0,x_0)\| + c\|x - 0\| + \|I_1(x_1(t_1^-))\| \\
\|x\| - c\|x\| &\leq \lambda \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds + \|x_0 - h(0,x_0)\| + \|I_1(x_1(t_1^-))\| \\
(1-c)\|x\| &\leq \lambda \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds + \|x_0 - h(0,x_0)\| + \|I_1(x_1(t_1^-))\| \\
\|x\| &\leq \frac{\lambda}{1-c} \int_0^t p(s)\psi(\|\frac{x}{\lambda}(s)\|)ds + \frac{1}{1-c}[\|x_0 - h(0,x_0)\| + \|I_1(x_1(t_1^-))\|],
\end{aligned}$$

on fait le changement de variable : $x = \frac{x}{\lambda}$

$$\|\lambda x\| \leq \frac{\lambda}{1-c} \int_0^t p(s)\psi(\|x(s)\|)ds + \frac{1}{1-c}[\|x_0 - h(0,x_0)\| + \|I_1(x_1(t_1^-))\|], \quad (4.21)$$

d'où

$$\|x\| \leq \frac{1}{1-c} \int_0^t p(s)\psi(\|x(s)\|)ds + \frac{1}{\lambda(1-c)}[\|x_0 - h(0,x_0)\| + \|I_1(x_1(t_1^-))\|]. \quad (4.22)$$

On note $P(s) = \frac{1}{1-c}p(s)$ et $k = \frac{1}{\lambda(1-c)}\left[\|x_0 - h(0,x_0)\| + \|I_1(x_1(t_1^-))\|\right]$

Donc

$$\|x\| \leq k + \int_0^t P(s)\psi(\|x(s)\|)ds. \quad (4.23)$$

d'où d'aprés l'inégalité de Bihari $\exists M_1 > 0$ tel que

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in]t_1,t_2]} \|x\| \leq M_1 = G^{-1}(\int_{t_1}^{t_2} p(s)ds), \quad (4.24)$$

avec $G(\omega) = \displaystyle\int_{M_0}^{\omega} \frac{du}{\psi(u)}$. Alors l'ensemble F est borné. Donc d'aprés le théorème de Burton-Kirk l'opérateur N admet un point fixe.

Cas3 : Si $t \in]t_m,b]$De la même manière, on trouve que :
$\exists M_m > 0 : \|x\|_\infty = \sup_{t\in]t_m,b]} \|x(t)\| \leq M_m$ D'où

$$\begin{aligned} \|x\|_{PC} &= \max(\|y\|_\infty) \\ &\leq \max(M_0,...,M_m) \end{aligned}$$

Alors l'ensemble F est borné. Donc d'aprés le théorème de Burton-Kirk l'opérateur N admet un point fixe. $\square$

Exemple 4.1. : on considère le problème de l'équation différentielle impulsive de type neutre suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(y(t) - \frac{1}{2}y(t)\right) = 1 + y^2(t), \quad si \quad t \in [0,1], t \neq \frac{1}{2}, \\ y(\frac{1}{2}^+) - y(\frac{1}{2}^-) = y(\frac{1}{2}^-), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{4.25}$$

On a $f(t,x) = 1 + x^2$ est $L^1 - carath\acute{e}dory$ car : On a $f(t,x) = 1 + x^2$ est $L^1 - carath\acute{e}dory$ car :

1. $t \mapsto f(t,x) = 0$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$, car on sait que tout fonction constant est mesurable.
2. On peut montrer que la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est continue presque pour tout $t \in [0,b]$ car elle est la somme de deux applications continues.
3. Pour tout $r > 0$ il existe $h_r \in L^1([0,b],\mathbb{R}_+)$ telle que
$\|f(t,y)\| \leq h_r(t)$ presque pour tout $t \in [0,b]$ et pour toute $\|y\| \leq r$.
avec $h_r(t) = 1 + r^2$.

Soit $\psi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ la fonction définit par : $\psi(x) = x + 1$, ψ est une fonction positive et croissante et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \ln(x+1) - \ln(1) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

On prend $p(t) = 1$ alors $\|f(t,x)\| \leq p(t)\psi(\|x\|)$.
avec

$$\begin{aligned}\int_0^b p(s)ds &= \int_0^1 ds \\ &= 1,\end{aligned}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} = +\infty. \tag{4.26}$$

d'où

$$\int_0^b p(s)ds < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)}. \tag{4.27}$$

Puisque les conditions du théorème (4.2) sont satisfaites alors le problème (4.25) admet au moins une solution sur [0,1].

Conclusion et perspectives

A travers ce travail, nous avons traité les théorèmes de Krasnoselskii et Krasnoselskii-Schaefer. Les deux théorèmes sont une combinaison de théorème de Banach et de Schauder pour le premier et Banach et Schaefer pour le deusième, et ont appliquant ces théorèmes pour montrer l'existence des solutions des équations différentielles impulsives.

Dans le futur, on s'intéresse par les théorèmes de point fixe aléatoires, et leur application sur les équations différentielles stochastiques.

Bibliographie

[1] D.D. Bainov and P.S. Simeonov, Systems with Impulse Effect, Ellis Horwood Ltd, Chichister, 1989.

[2] H. Brézis,*Analyse Fonctionnelle, théorie et applications.*Dunod,1999.

[3] I. Belkhir,*Théorème du point fixe et ses applications*,Université des sciences et de technologie d'Oran, Juin 2010.

[4] T. A. Burton, Krasnoselskii's inversion principle and fixed points, *Nonlinear Anal.* 30 (1997), 3975-3986.

[5] A. Giroux *Mesure et Intégration* Notes de cours Université Montereál 2004

[6] D.R. Smart, *Fixed Point Theorem*, Cambridge Tracts in Mathematics, No.66, Cambridge University Press, London.New York,1974.

[7] S. Yousfi, *Equations differentielles impulsives*, Univercité Djillali Liabes, Sidi Bel Abbes,2010.

[8] A. Mostafaï, *Cours De Topologie*, OPU.

[9] E. Zeidler, *Nonlinear Functionnal Analysis of Epidemics,of Epidemics*, World Scientific Publishing, Co. Pte. Ltd. 2009.

Index

Arzela-Ascoli, 7

Burton-Kirk, 18

complétement continue, 7

Enveloppe convexe, 9
equation différentielle impulsive, 20
equation différentielle impulsive de type neutre, 30

homeomorphisme, 9

inégalité de Bihari, 9

la convergence dominée de Lebesgue, 8
la projection de Schauder, 9
lipschitzienne, 9

suite de Cauchy, 4

Théorème de Banach, 11
Théorème de Brouwer, 12
Théorème de Krasnoselskii, 15
théorème de Schaefer, 16
Théorème de Schauder, 12