République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Draia - Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude, en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème

Fonctions et Distributions Presque Périodiques de Stepanov

Préparé par

Fatima BEKRAOUI

Encadré par

Mr. Mohammed Taha KHALLADI

Année Universitaire 2016/2017

je dédie ce modeste travail :

À l'âme de mon père.

À ma mère pour son affection, son compréhension son prières qui m'a toujours accompagné moi, et pour tous ce qu'elle fait pour moi.

À tous mes frères et mes soeurs surtout Samia.

À tous mes tantes, mes oncles, mes cousins et mes cousines.

À mes amis de promotion 2^{eme} annés Mastre Mathématiques .

À mes familles Bekraoui et Bekri.

Remerciements

En premier et avant tout je remercie le Dieu de m'avoir donné la force de réaliser ce travail.

Je tiens a remercier chaleureusement, mon encadreur Mr. Khalladi Mohammed Taha. pour avoir suivi l'évolution de ce travail tout au long de l'année, pour ses conseils judicieux et ses encouragements.

Je remercie, maintenant, les membres de jury, Mr. MAMOUNI Touhami et Mr. BOUAZIZ Said.

Mes remerciements les plus respectueux vont aussi aux professeurs de mathématiques du département mathématiques et informatique sans exception, et tous les enseignants qui ont contribué à l'enrichissement de mes connaissances du primaire jusqu'à l'université.

Enfin, je remercie tous ceux qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

NOTATION **2**

INTRODUCTION **4**

1 Préliminaires **7**

1.1 Les espaces L^p 7

1.2 Fonctions presque périodiques de Bohr 11

2 Fonctions presque périodiques de Stepanov **14**

2.1 Définition et propriétés 14

2.2 Autres définitions de la presque périodicité 28

2.3 Analyse harmonique dans S^p_{pp} 32

2.3.1 Valeur moyenne 32

2.3.2 Série de Fourier 34

3 Distributions presque périodiques de Schwartz **40**

3.1 Distributions bornées $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ 40

3.2 Distributions presque périodiques $\mathcal{B}'_{pp}$ 46

3.3 Analyse harmonique dans $\mathcal{B}_{pp}^{'}$ 49

3.4 Lien entre $\mathcal{B}_{pp}^{\prime}$ et $\mathcal{D}_{S_{pp}^{p}}^{\prime}$ 54

CONCLUSION ET PERSPECTIVES **57**

REFERENCES **58**

NOTATION

$\mathcal{B}'_{pp}$ L'espace des distributions presque périodiques.

$\mathcal{C}_b$ L'espace des fonctions continues bornées.

$\mathcal{C}_{pp}$ L'espace des fonctions presque périodiques au sens de Bohr.

$\mathcal{D}$ L'espaces des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

$\mathcal{D}_{L^1}$ L'espaces des fonctions indéfiniment dérivables dont toutes les dérivées appartiennent à L^1.

$\mathcal{D}_{L^\infty}$ L'espaces des fonctions indéfiniment dérivables dont toutes les dérivées appartiennent à L^∞.

$D_{S_l^p}$ La distance de Stepanov.

$\mathcal{D}'$ L'espaces des distributions.

$\mathcal{D}'_{L^\infty}$ L'espaces des distributions bornées.

$\mathcal{D}'_{S^p_{pp}}$ L'espaces des distributions presque périodiques au sens de Stepanov.

$E_B(\varepsilon, f)$ L'ensemble des ε-presque périodes de f au sens de Bohr.

$E_S(\varepsilon, f)$ L'ensemble des ε-presque périodes de f au sens de Stepanov.

$\mathcal{L}^p$ L'espace des fonctions mesurables et p-intégrables au sens de Lebesgue.

$\mathcal{L}^\infty$ L'espace des fonctions mesurables qui ont un supessentiel fini.

L^p L'espace des classes de fonctions mesurables et p-intégrables au sens de Lebesgue.

L^p_{loc} L'espace des classe des fonctions localement $p-$intégrables.

S^p_b L'espace des fonctions bornée au sens de Stepanov.

S^p_{pp} L'espace des fonctions presque périodiques au sens de Stepanov.

$||\ ||_{S_l^p}$ La norme de Stepanov.

$\hookrightarrow$ Le signe d'injection continue.

$\sim$ Le signe d'association.

INTRODUCTION

La théorie des fonctions continues presque périodiques $\mathcal{C}_{pp}$ a été fondée par le mathématicien danois Harald Bohr (le frère du physicien Niels Bohr) au début du $20^{ième}$ siècle. Il a écrit une série de documents pendant la période 1923-1925 où se trouvent les fondements de cette théorie des fonctions presque périodiques. La presque périodicité, comme propriété structurelle, est une généralisation de la périodicité pure. Cette théorie a des applications théoriques et pratiques nombreuses dans divers domaines, y compris l'analyse harmonique, les systèmes dynamiques, la physique,... etc. En effet, un des premiers résultats est dû à Bohr et Neugebauer et a déclaré que les solutions bornées du système différentiel

$$x'(t) = Ax(t) + f(t),$$

sont nécessairement presque périodiques lorsque f est presque périodique.

La théorie de Bohr a rapidement attiré l'attention de mathématiciens très célèbres de cette époque, parmi lesquels V. V. Stepanov, H. Weyl, N. Wiener, S. Bochner, A. Besicovitch et J. von Neumann.

Il existe diverses extensions du concept de H. Bohr, notamment ceux introduits par S. Bochner, A. S. Besicovitch, V. V. Stepanov et H. Weyl, voir [1], [7], [9], ou [12].

Le concept de presque périodicité ne se limite pas aux fonctions continues. En effet, en 1925, V. V. Stepanov a généralisé la classe de fonctions continues presque périodiques au sens de Bohr sans utiliser l'hypothèse de continuité. Ainsi, dans le cas de fonctions mesurables de Lebesgue, on peut introduire la notion de presque périodicité en remplacant la norme de la convergence uniforme par des mesures, des distances et des normes adéquates, Voir [1], [9], [10] ou [11].

Les distributions $\mathcal{D}'$ inventées par S. L. Sobolev et L. Schwartz ([3], [15]), sont un outil

important et incontournable dans plusieurs domaines des Mathématiques et de la Physique.

L. Schwartz a défini l'espace $\mathcal{B}'_{pp}$ des distributions presque périodiques d'une façon abrégé dans l'ouvrage "Théorie des distributions" en trois pages, voir [15].

Le but principal de ce mémoire consiste en l'étude de la presque periodicité au sens de Stepanov de fonctions et distributions en regroupant les différentes notions et propriétés élémentaires de ce concept. En fait, notre objectif essentiel est de rendre cette théorie plus familier aux diverses catégories d'utilisateurs scientifiques qui étudient des oscillations ou des vagues, des ingénieurs qui sont soit des chercheurs, soit intéressés par ce type des questions, ainsi qu' à tous les étudiants diplômés en sciences et en génie, qui seront les futurs utilisateurs de ces sujets.

Le première chapitre est un rappel de quelques définitions et résultats généraux concernant l'espace $L^p(\Omega)$ des classes de fonctions de Lebesgue, suivi par un sous-paragraphe qui présente la presque périodicité classique de H. Bohr.

Dans le deuxième chapitre on donne la définition et les propriétés fondamentales de l'espace S^p_{pp} des fonctions presque périodiques de Stepanov, en adoptant les définitions équivalentes célèbres introduites par H. Bohr et S. Bochner, voir [1], [5] ou [9], des fonctions presque périodiques usuelles et enfin une petite introduction à l'analyse harmonique dans cet espace.

Le troisième chapitre expose l'espace des distributions presque périodiques $\mathcal{B}'_{pp}$ qui exige nécessairement la connaissance des espaces $\mathcal{D}_{L^1}$ et $\mathcal{D}_{L^\infty}$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées appartiennent à L^1 et L^∞ respectivement et l'espace $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ des distributions bornées dans laquelle on étudie la presque périodicité.

À la fin de ce chapitre, et de la même manière que celle suivi dans le chapitre 3, on a introduit quelques éléments d'analyse harmonique dans l'espace $\mathcal{B}'_{pp}$.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques notions et résultats bien connus dans la littérature et qui sont utiles pour notre travail.

1.1 Les espaces L^p

Ce paragraphe rappele quelques définitions et résultats généraux concernant la théorie de la mesure et de l'intégration, voir [6], [8]. Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue.

On rappelle pour un nombre p, $1 \leq p \leq \infty$, la définition de l'espace $L^p(\Omega)$. C'est l'espace vectoriel des classes (pour l'égalité presque partout, notée $p.p.$) de fonctions Lebesgue mesurables sur Ω, p-intégrables, muni de la norme notée $\|f\|_{L^p}$.

Plus précisement, pour toute fonction mesurable f et tout nombre p, $1 \leq p \leq \infty$, on pose

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & , \text{ si } 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{L^\infty} = \inf\{c,\ |f(x)| < c \ p.p \text{ sur } \Omega\} & , \text{ si } p = +\infty \end{cases}$$

La notion presque partout notée $p.p$, signifie qu'une propriété est vérifié sauf pour un ensemble (négligeable) de mesure nul.

Définition 1.1.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $\mathcal{L}^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables sur Ω et p-intégrables au sens de Lebesgue, i.e.*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C},\ mesurable,\ \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

$\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables qui ont un supessentiel fini. i.e.

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C},\ mesurable,\ \exists C > 0,\ |f(x)| \leq C,\ p.p\ sur\ \Omega \}.$$

Définition 1.1.2 *Soit $1 \leq p \leq \infty$, l'espace*

$$L^p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\mathcal{R}},$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence définie par

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f - g \equiv 0\ p.p\ sur\ \Omega,$$

est la classe d'équivalence d'éléments de $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Remarque 1.1.3 *Le couple $(L^p(\Omega), \| \quad \|_{L^p})$ forme un espace vectoriel normé.*

Définition 1.1.4 *Soient $p, q \in [1, +\infty[$. On dit que p et q sont deux exposants conjugués si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pour $p = +\infty$, l'exposant conjugué est $q = 1$.

Proposition 1.1.5 *(Inégalité de Hölder) Soient p et q deux exposants conjugés, $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors*

(i) $f.g \in L^1$.

(ii) $\| fg \|_{L^1} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q}$.

Preuve. (i) La conclusion est évidente si $p = 1$ ou $p = \infty$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. En appliquant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0.$$

avec p et q sont deux exposants conjugués et tenant compte que.la fonction log est concave sur $]0, \infty[$, on a

$$\log(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab.$$

Donc

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Il en résulte que $f.g \in L^1$ et que

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q}^q. \tag{1.1}$$

(ii) En remplaçant f par λf $(\lambda > 0)$ dans (1.1), on trouve

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_{L^q}^q.$$

On choisit $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}$, donc on resulte que

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

□

Définition 1.1.6 *La convolution $f * g$ d'une fonction f et d'une fonction g est définie par*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy,\ x \in \mathbb{R}$$

Proposition 1.1.7 *(Inégalité de Young) Soit $1 \leq p, q, r \leq +\infty$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, f et g deux fonctions de L^p et L^q respictivement alors*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Proposition 1.1.8 *(Fischer-Riesz) $(L^p(\Omega), \|\ \|_{L^p})$ est un espace de Banach, $\forall 1 \leq p \leq \infty$.*

Preuve. Voir [6]. □

Définition 1.1.9 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On dit que f est localement $p-$intégrable si $f \in L^p(K)$ pour tout compact K de Ω.*

On note $L^p_{loc}(\Omega)$ l'espace des classe des fonctions localement $p-$intégrables sur Ω, i.e.

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C},\ \text{mesurable},\ \int_K |f(x)|^p dx < \infty,\ \text{pour tout compact } K \text{ de } \Omega \right\}.$$

Définition 1.1.10 *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense s'il existe un réel $l > 0$ tel que*

$$[x, x+l] \cap E \neq \emptyset \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1.11 *Tout ensemble contient un sous-ensemble relativement dense est relativement dense.*

Définition 1.1.12 *Une algébre sur le corps k est une structure algébrique $(A, +, ., \times)$ telle que*

(i) $(A, +, .)$ est un espace vectoriel sur k.

(ii) La loi $\times$ est définie de $A \times A$ dans A.

(iii) La loi $\times$ est bilinéaire.

Définition 1.1.13 *Une algébre sur le corps k muni d'une norme est dite de Banach si elle forme un espace vectoriel normé, complet.*

1.2 Fonctions presque périodiques de Bohr

Dans ce paragraphe nous exposons la définition et quelques propriétés de l'espace de fonctions presque périodiques au sens de Bohr, pour plus de détails sur cette classe de fonctions ainsi que les preuves, voir par exemple [1], [2], [7], [9], ou [12].

On désigne par $\mathcal{C}_b$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ á valeurs complexes, muni de la norme $\| \ \|_{L^\infty}$ de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Rappellons que $(\mathcal{C}_b, \| \ \|_{L^\infty})$ est une algèbre de Banach.

L'idée de la presque periodicité classique de H. Bohr est la suivante :

Si f est une fonction périodique de periode T alors on a la propriété suivante

$$f(x+nT) - f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},$$

et l'ensemble discret des périodes

$$\{nT, n \in \mathbb{Z}\},$$

satisfait à la condition suivante:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{Z}, n_0 T \in [\alpha, \alpha + T]$$

La généralisation de cette propriété à l'espace des fonctions presque périodiques est le concept de la densité relative des ensembles introduit par H. Bohr pour définir les fonctions presque périodiques.

Définition 1.2.1 *Soit $\varepsilon > 0$. Un nombre réel τ est appelé ε-presque période de f, si*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

Désignons par $E_B(\varepsilon, f)$ l'ensemble des ε-presque périodes de f au sens de Bohr , i.e.

$$E_B(\varepsilon, f) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Définition 1.2.2 *On dit qu'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ á valeurs complexes est presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $E_B(\varepsilon, f)$ est relativement dense.*

Notation 1.2.3 *L'espace des fonctions presque périodiques au sens de Bohr est noté par $\mathcal{C}_{pp}$.*

Proposition 1.2.4 *Toute fonction périodique est presque périodique au sens de Bohr.*

Remarque 1.2.5 *La reciproque de la proposition* (1.2.4) *n'est pas vrais comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 1.2.6 *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \sin x + \sin \sqrt{2}x,$$

est presque périodique au sens de Bohr, mais elle n'est pas périodique, car il n'existe aucun réel T vérifiant $f(x+T) = f(x)$.

En général, si on considère la fonction presque périodique au sens de Bohr $f(x) = e^{ix} + e^{i\pi x}$ et si on suppose qu'il existe un nombre réel T non nul tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on a

$$e^{i(T+x)} + e^{i\pi(x+T)} = e^{ix} + e^{i\pi x}.$$

Par suite

$$(e^{iT}-1)e^{ix}+(e^{i\pi T}-1)e^{i\pi x}=0$$

Or les fonctions e^{ix} *et* $e^{i\pi x}$ *sont linéarement indépendantes, d'où*

$$e^{iT}-1=e^{i\pi T}-1=0.$$

Par conséquent, $T=2k\pi$ *et* $\pi T=2h\pi$ *où* $k,h\in\mathbb{Z}$, *ce qui fait une contradiction.*

Proposition 1.2.7 *Toute fonction presque périodique au sens de Bohr est bornée sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.8 *Toute fonction presque périodique au sens de Bohr est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.9 *Si* f *est presque périodique au sens de Bohr et* $m=\inf_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|>0$, *alors la fonction* $\frac{1}{f}$ *l'est aussi.*

Proposition 1.2.10 *Si* f *est une fonction presque périodique de Bohr et* F *est continue sur* $\{f(x),x\in\mathbb{R}\}$, *alors* $F\circ f$ *est presque périodique de Bohr.*

Théorème 1.2.11 *L'espace* $\mathcal{C}_{pp}$ *des fonctions presque périodiques au sens de Bohr forme une sous algèbre fermée de l'algèbre* $(\mathcal{C}_b,\|\ \|_{L^\infty})$.

Chapitre 2

Fonctions presque périodiques de Stepanov

Le présent chapitre donne la définition de l'espace des fonctions presque périodiques au sens de Stepanov et leurs propriétés fondamentales. Voir [1], [2], [7], ou [10].

2.1 Définition et propriétés

Soient $l > 0$ et $1 \leq p < \infty$, on note S_l^p l'espace des fonctions f localement $p-$intégrables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_x^{x+l} |f(t)|^p \, dt < \infty \tag{2.1}$$

i.e.

$$S_l^p(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}) : \int_x^{x+l} |f(t)|^p \, dt < \infty \right\}$$

Définition 2.1.1 *Soient $l > 0$, $1 \leq p < \infty$, f et g deux fonctions localement $p-$integrables.*

La norme de Stepanov est notée et définie par

$$\|f\|_{S_l^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

La distance de Stepanov associée a cette norme est notée et définie par

$$D_{S_l^p}(f,g) = \|f-g\|_{S_l^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t)-g(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.3}$$

Proposition 2.1.2 $\forall 1 \leq p < \infty$, *Les normes de Stepanov sont équivalentes.*

Preuve. Soit $0 < l_1 \leq l_2$, montrons que $\| \ \|_{S_{l_1}^p}$ et $\| \ \|_{S_{l_2}^p}$ sont equivalentes. En effet, soit $f \in L_{loc}^p$, il est clair que $\|f\|_{S_{l_2}^p} \leq \|f\|_{S_{l_1}^p}$.

De plus

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_2} \int_x^{x+l_2} |f(t)|^p \, dt &= \frac{1}{l_2} \int_x^{x+l_1} |f(t)|^p \, dt + \frac{1}{l_2} \int_{x+l_1}^{x+l_2} |f(t)|^p \, dt \\ &\geq \frac{1}{l_2} \int_x^{x+l_1} |f(t)|^p \, dt \\ &= \frac{l_1}{l_2} \left(\frac{1}{l_1} \int_x^{x+l_1} |f(t)|^p \, dt \right) \end{aligned}$$

D'oú $||f||_{S_{l_2}^p} \geq \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S_{l_1}^p}$. □

Grâce á cette équivalence on peut remplacer l dans la formule (2.2) par un nombre positif arbitraire. En particulier, nous pouvons considérer la norme, où $l = 1$. Dans tous ce qui suit (et notamment dans les preuves) nous adopterons la notation S^p au lieu de S_1^p.

Proposition 2.1.3 *Soit* $p, q \in [1, +\infty[$ *tels que* $p \leq q$. *Alors*

$$S^q \subset S^p.$$

Preuve. Soit $f \in S^q$ alors $f \in L_{loc}^q \subset L_{loc}^p$, de plus et d'aprés l'inégalité de Hölder on a

$$\int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt \leq \left(\int_x^{x+1} \left(|f(t)|^p\right)^r \, dt \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_x^{x+1} (1)^{r'} \, dt \right)^{\frac{1}{r'}}.$$

où r et r' sont deux exposants conjugués.

En prenant $r = \frac{q}{p}$, on obtient

$$\int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt \leq \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^q \, dt \right)^{\frac{p}{q}} < \infty$$

Par conséquent $f \in S^p$. D'où $S^q \subset S^p$. □

Définition 2.1.4 *Soit $f \in S^p$, on dit que f est bornée au sens de Stepanov ou S^p-bornée, s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On note S_b^p l'espace des fonctions S^p-bornées.

Définition 2.1.5 *Soit $f \in S^p$, on dit que f est uniformément continue au sens de Stepanov ou S^p-uniformément continue, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R} \ \ |y| \leq \delta \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+y) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Définition 2.1.6 *Soit $(f_n)_n \subset S^p$, on dit que $(f_n)_n$ est uniformément convergente vers f au sens de Stepanov ou S^p-uniformément convergente, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \forall t \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f_n(t) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

Proposition 2.1.7 *Soit $1 \leq p < q < \infty$, alors*

(i) $L^P \subset S_b^p \subset L_{loc}^p$.

(ii) $S_b^q \subset S_b^p$.

Preuve. *(i)* Soit $f \in L^p$ i.e $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt < \infty$. Alors

$$\int_I |f(t)|^p \, dt < \infty, \forall I \subset \mathbb{R},$$

i.e. $\exists C > 0$ tel que $\int_I |f(t)|^p \, dt \leq C$.

en particulier,

$$\int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt < C,$$

Donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq C^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent $f \in S_b^p$. D'où $L^P \subset S_b^p$.

Par défintion $f \in S_b^p$ implique que $f \in S^p$, i.e. f est localement $p-$intégrable et vérifiée (2.1). D'où $S_b^p \subset L_{loc}^p$.

(ii) Soit $1 \leq p < q < \infty$ et $f \in S_b^q$, alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \left(|f(t)|^p \right)^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} (1)^{r'} \, dt \right)^{\frac{1}{r'}},$$

où r et r' sont deux exposants conjugués.

En prenant $r = \frac{q}{p}$, on obtient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^q \, dt \right)^{\frac{p}{q}}$$

Ce qui entraîne

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Par conséquent $f \in S_b^p$. D'où $S_b^q \subset S_b^p$. □

Proposition 2.1.8 *Le couple (S_b^p, D_{S^p}) forme un espace métrique.*

Preuve. Il faut montrer que D_{S^p} définit une distance sur S_b^p. Soient en effet f, g et h des fonctions de S_b^p. On a

(i)

$$\begin{aligned} D_{S^p}(f,g) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)-g(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |-1|^p \, |g(t)-f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |g(t)-f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= D_{S^p}(g,f) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} D_{S^p}(f,g) &= 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)-g(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_x^{x+1} |f(t)-g(t)|^p \, dt = 0 \\ &\Leftrightarrow |f(t)-g(t)| = 0 \\ &\Leftrightarrow f(t) = g(t), \; p.p \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} D_{S^p}(f,g) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)-g(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)-h(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |h(t)-g(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq D_{S^p}(f,h) + D_{S^p}(h,g) \end{aligned}$$

D'où la proposition est preuvé. □

Proposition 2.1.9 *Le couple* $(S_b^p, \| \ \|_{S^p})$ *forme un espace de Banach.*

Preuve. D'aprés (ii) de la proposition (2.1.7), il suffit preuver la proposition pour $p = 1$.

Le fait que S_b^1 est normé est évident. Montrons qu'il est complet par rapport à la norme (2.2). Soit, en effet, $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans S_b^1, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \parallel f_n - f_m \parallel_{S^1} < \varepsilon,$$

i.e.

$$\forall n, m \geq N, \ \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f_n(t) - f_m(t)| \, dt < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Fixons maintenant un intervalle arbitraire $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Il existe donc deux entiers $s, r \in \mathbb{Z}$ tels que $[a, b] \subset [r, s]$. En conséquence, la formule (2.4) donne

$$\int_a^b |f_m(t) - f_n(t)| \, dt \leq (s - r) \, \|f_m - f_n\|_{S^1} < (s - r)\varepsilon$$

Pour $m, n \geq N$ la restriction de la suite $(f_n)_n$ sur $[a, b]$ forme une suite de Cauchy de $L^1([a, b])$ et puisque $L^1([a, b])$ est complet, il existe $f \in L^1([a, b])$ telle que

$$\lim_{m \to +\infty} f_m(x) = f(x).$$

Par passage à la limite dans la formule (2.4) on trouve

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f_n(t) - f(t)| \, dt < \varepsilon, \ \forall n \geq N,$$

Alors (f_n) est S^1- convergente vers f, de plus $f \in S_b^1$, car

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f(t)| \, dt &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f_n(t) - f(t)| \, dt + \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f_n(t)| \, dt \\ &\leq \varepsilon + C \end{aligned}$$

D'où le resultat. □

Définition 2.1.10 *Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble des $\varepsilon-$presque périodes au sens de Stepanov d'une fonction f est noté et défini par*

$$E_S(\varepsilon, f) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \right\}.$$

Un tel nombre $\tau \in E_S(\varepsilon, f)$ est dit $\varepsilon-$presque périodes au sens de Stepanov de f.

Définition 2.1.11 *Une fonction $f \in L^p_{loc}$ définie sur $\mathbb{R}$ á valeurs complexes est dite presque périodique au sens de Stepanov si $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $E_S(\varepsilon, f)$ est relativement dense.*

Notation 2.1.12 *On note S^p_{pp} l'espace des fonctions presque périodiques au sens de Stepanov.*

Exemple 2.1.13 *Soit $f \in \mathcal{C}_{pp}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction*

$$sign\left(f\left(x\right)\right) = \begin{cases} 1, & si \ f\left(x\right) > 0 \\ 0, & si \ f\left(x\right) = 0 \\ -1, & si \ f\left(x\right) < 0 \end{cases}$$

est un élément de $S^1_{pp}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On établit maintenant quelques propriétés fondamentales des fonctions presque périodiques de Stepanov.

Proposition 2.1.14 *Toute fonction presque périodique au sens de Stepanov est S^p-bornée sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $l_\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ il existe un ε-presque période de f au sens de Stepanov noté τ pour le quel $0 \leq x + \tau \leq l_\varepsilon$. Soit $m = \sup_{x\in[0,l_\varepsilon]} |f(x)|$. On a

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau)| \\
&= \varepsilon + m.
\end{aligned}$$

Par conséquent f est S^p-bornée. □

Proposition 2.1.15 *Toute fonction presque périodique au sens de Stepanov est S^p-uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, l la longueur asociée à ε, et $\tau \in E_S(\varepsilon, f)$, alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Prenons $\delta = l$ et posons $t_1 = t$ et $t_2 = t + \tau$, où $t \in \mathbb{R}$, alors $|t_1 - t_2| < \delta$ et

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t_1) - f(t_2)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

D'où le resultat. □

Proposition 2.1.16 *Soit $1 \leq p < q < \infty$, alors on a*

(i) $\mathcal{C}_{pp} \subset S^p_{pp}$.

(ii) $S^q_{pp} \subset S^p_{pp}$.

Preuve. (i) Soient $f \in \mathcal{C}_{pp}$ et $\tau \in E_B(\varepsilon, f)$, on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon.$$

Donc $\forall 1 \leq p < \infty$

$$|f(t+\tau) - f(t)|^p < \varepsilon^p,$$

ce qui donne

$$\left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

D'où $\tau \in E_S(\varepsilon, f)$, et $E_S(\varepsilon, f)$ est relativement dense, par conséquent f est presque périodique au sens de Stepanov.

(ii) Elle découle de la même façon que celle de la preuve de $(ii.)$ de la proposition (2.1.7). □

Remarque 2.1.17 (i) *L'inclusion* (i) *de la proposition* (2.1.16), *montre que la définition de Stepanov est plus générale que celle donnée par Bohr uniquement en dehors de la classe de fonctions qui sont uniformément continues sur* $\mathbb{R}$.

(ii) *La réciproque de l'inclusion* (i) *de la proposition* (2.1.16) *n'est pas toujours vrais. Autrement dit, il existe des fonctions presque périodique au sens de Stepanov qui ne sont pas presque périodique au sens de Bohr.*

Exemple 2.1.18 *Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *avec* $\frac{1}{\alpha\beta}$ *est irrationel, considérons les deux fonctions* $f_{\alpha,\beta}$ *et* $g_{\alpha,\beta}$ *définies sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \sin\left(\frac{1}{2 + \cos(\alpha x) + \cos(\beta x)}\right),$$

et

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \cos\left(\frac{1}{2 + \cos(\alpha x) + \cos(\beta x)}\right).$$

Levitan a donneé une démonstration que les deux fonctions $f_{\alpha,\beta}$ et $g_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions presque périodiques au sens de Stepanov, mais pas au sens de Bohr.

Le résultat suivant donne une condition nécessaire pour qu'une fonction presque périodique au sens de Stepanov soit presque périodique au sens de Bohr.

Proposition 2.1.19 *Pour qu'une fonction f presque périodique au sens de Stepanov soit presque périodique au sens de Bohr il faut qu'elle est uniformement continue sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Supposons que $f \in S^p_{pp}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et soit $h > 0$, on définit

$$\varphi_h(t) = h^{-1} \int_0^h f(s+t)ds, t \in \mathbb{R}.$$

On a $\varphi_h \in \mathcal{C}_{pp}$, en effet, pour $\tau \in E_S(\varepsilon, f)$,

$$\begin{aligned} |\varphi_h(t+\tau) - \varphi_h(t)| &\leq h^{-1} \int_t^{t+h} |f(s+\tau) - f(s)|\, ds \\ &\leq \left(h^{-1} \int_t^{t+h} |f(s+\tau) - f(s)|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

La continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$ implique la continuié uniforme de φ_h, de plus $f \in S^p_{pp}$, donc tout ε-presque période de f est un ε-presque période de φ_h, d'où $\varphi_h \in \mathcal{C}_{pp}$.

De plus, on a

$$|\varphi_h(t) - f(t)| \leq h^{-1} \int_0^h |f(t+s) - f(t)|\, ds < \varepsilon, \text{ pour } s < \delta(\varepsilon).$$

Ce qui montre que φ_h converge uniformément vers f et donc, d'aprés le théorème (1.2.11) $f \in \mathcal{C}_{pp}$.

□

Proposition 2.1.20 *La classe S^p_{pp} des fonctions presque périodiques au sens de Stepanov forme un sous-espace de Banach fermé de l'espace $(S^p_b, \| \ \|_{S^p})$.*

Preuve. Soient $f, g \in S^p_{pp}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrons d'abord, que λf et $f+g$ sont des éléments de S^p_{pp}. Soit en effet, $\varepsilon > 0$ et $\tau \in E_S(\varepsilon, f)$ alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |\lambda f(t+\tau) - \lambda f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} &= |\lambda| \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right) \\ &< |\lambda|\varepsilon \end{aligned}$$

D'où $\tau \in E_S(|\lambda|\varepsilon, \lambda f)$ et ainsi, $E_S(|\lambda|\varepsilon, \lambda f)$ est relativement dense. Par conséquent λf est presque périodique au sens de Stepanov.

Soit, $\varepsilon > 0$ et $\tau \in E_S(\frac{\varepsilon}{2}, f) \cap E_S(\frac{\varepsilon}{2}, g)$ alors

$$\begin{aligned} & \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |(f+g)(t+\tau) - (f+g)(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ = & \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t) + g(t+\tau) - g(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq & \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |g(t+\tau) - g(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ < & \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où $\tau \in E_S(\varepsilon, f+g)$ et $E_S(\varepsilon, f+g)$ est relativement dense, par conséquent $f+g$ est presque périodique au sens de Stepanov.

Afin de montrer la ferméture de l'espace S^p_{pp}, considérons une suite de fonctions $(f_n)_n$ de S^p_{pp}, tel que $(f_n)_n$ S^p-convergente vers f et montrons que $f \in S^p_{pp}$. En effet, soit $\tau \in E_S(\frac{\varepsilon}{4}, f_n)$, alors

$$\begin{aligned} & \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) + f_n(t+\tau) - f_n(t+\tau) + f_n(t) - f_n(t) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f_n(t+\tau)-f_n(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f_n(t+\tau)-f(t+\tau)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f_n(t)-f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$< \tfrac{\varepsilon}{4}+\tfrac{\varepsilon}{4}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ce qui montre que $\tau \in E_S(\varepsilon, f)$ et $E_S(\varepsilon, f)$ est relativement dense, par conséquent f est presque périodique au sens de Stepanov.

Le complétude de S^p_{pp} découle du fait que S^p_{pp} est un sous-espace fermé de $(S^p_b, \|\ \|_{S^p})$ qui est complet. □

Remarque 2.1.21 *La multiplication de deux fonctions de S^p_{pp} n'est pas nécessairement une fonction de S^p_{pp}. mais on peut voir que si $f \in S^p_{pp}$ et $g \in S^q_{pp}$, le produit fg est une fonction de S^1_{pp}, à condition que p et q sont deux exposonts conjugués. En particulier, la multiplication d'une fonction de S^1_{pp} par une fonction de $\mathcal{C}_{pp}$ est une fonction de S^1_{pp}. Plus précisement, on a le résultat suivant.*

Proposition 2.1.22 *Soient $f \in S^p_{pp}$ et $g \in S^q_{pp}$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors $fg \in S^1_{pp}$.*

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$, $\tau \in E_S(\frac{\varepsilon}{2}, f) \cap E_S(\frac{\varepsilon}{2}, g)$ et p, q deux exposonts conjugués, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |fg(t+\tau)-fg(t)|\,dt$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |(f(t+\tau)-f(t))(g(t+\tau)-g(t))+g(t)(f(t+\tau)-f(t))+f(t)(g(t+\tau)-g(t))|\,dt$$
$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |(f(t+\tau)-f(t))(g(t+\tau)-g(t))|\,dt + \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |g(t)(f(t+\tau)-f(t))|\,dt$$
$$+\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f(t)(g(t+\tau)-g(t))|\,dt$$
$$\leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau)-f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |g(t+\tau)-g(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$
$$+\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |g(t)|\,dt\right)\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau)-f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$+\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f(t)|\,dt\right)\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |g(t+\tau)-g(t))|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$\leq \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(M_1 + M_2)$, avec $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |f(t)|\, dt$ et $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} |g(t)|\, dt$.

D'où $\tau \in E_S(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(M_1 + M_2), fg)$ et $E_S(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon}{2}(M_1 + M_2), fg)$ est relativement dense, par conséquent fg est presque périodique au sens de Stepanov. □

Corollaire 2.1.23 *Si la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$, *oú* $a_n \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda_n \in \mathbb{R}$ *est* S^p-*uniformément convergente, alors elle est presque périodique de Stepanov.*

Notation 2.1.24 *La délaté d'une fonction* f *par un nombre réel* α *est noté par*

$$f_\alpha(x) = f(\alpha x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le translaté d'une fonction f *par un nombre réel* h *est noté par*

$$\tau_h f(x) = f(x - h), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2.1.25 *Si* $f \in S^p_{pp}$, *alors* $\forall \alpha, h \in \mathbb{R}$, *on a*

(i) $f_\alpha \in S^p_{pp}$.

(ii) $\tau_h f \in S^p_{pp}$.

Preuve. Elle est facile. □

Proposition 2.1.26 *Si* f *est presque périodique au sens de Stepanov, alors* $|f|$ *l'est aussi.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $\tau \in E_S(\varepsilon, f)$ alors

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} ||f(t+\tau)| - |f(t)||^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

D'où $\tau \in E_S(\varepsilon, |f|)$, et $E_S(\varepsilon, |f|)$ est relativement dense, par conséquent $|f|$ est presque périodique au sens de Stepanov. □

Passons maintenant à l'etude de la presque périodicité de la dérivée et de la primitive de fonctions presque périodiques au sens de Stepanov.

Théorème 2.1.27 *Si la dirivée f' d'une fonction presque périodique au sens de Stepanov f est S^p-uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est presque périodique au sens de Stepanov.*

Preuve. Supposons que f est presque périodique au sens de Stepanov et prenons une suite de nombres réels $(h_n)_n$, telle que $h_n \to 0$, lorsque $n \to +\infty$, alors

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} = f^{'}(x+\theta h_n), \quad 0<\theta<1$$

L'exprission á gauche de cette igalité est une somme de deux fonctions presque périodiques au sens de Stepanov, alors elle est presque périodique au sens de Stepanov. De plus, et puisque $f^{'}$ est S^p-uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(f^{'}(x+\theta h_n))_n$ des fonctions presque périodiques au sens de Stepanov est S^p-uniformément convergent vers $f^{'}$.

En effet,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1}\left|f^{'}(t+x)-f^{'}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \text{ lorsque } |x|<\delta$$

Choisisons h_n telle que $|h_n|<\delta$, alors $|t+\theta h_n - t| = |\theta h_n| < \delta$. Ainsi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1}|f^{'}(t+\theta h_n)-f^{'}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Par conséquent et d'aprés la proposition (2.1.20), $f^{'}$ est presque périodiques au sens de Stepanov. □

Définition 2.1.28 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f, toute fonction notée et définie par*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Proposition 2.1.29 *(Bohl-Bohr) Si la primitive F d'une fonction presque périodique au sens de Stepanov f est S^p-bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est presque périodique au sens de Stepanov.*

Preuve. D'après (ii) de la proposition (2.1.16), $S^p_{pp} \subset S^1_{pp}$, $\forall\ 1 < p < +\infty$. Il suffit donc de montrer cette proposition pour $p = 1$. Voir [1], [4] ou [14]. □

2.2 Autres définitions de la presque périodicité

Comme dans le cas de fonctions presque périodiques au sens de Bohr, il existe d'autres définitions équivalentes pour introduire la presque périodicité au sens de Stepanov; à savoir, la définition topologique de Bochner et la définition basée sur la propriété de l'approximation polynômiale, [1], [7], [9], [10],, [12] ou [14].

Définition 2.2.1 *(Bochner) Une fonction $f \in L^p_{loc}$ est presque périodique au sens de Stepanov, si pour toute suite de nombres réels $(h_n)_n$ on peut extraire une sous suite $(h_{n_k})_k$ telle que la suite $(f(. + h_{n_k}))_k$ est S^p-uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.*

Définition 2.2.2 *On appelle polynôme trigonométrique toute fonction P de la forme*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x},\ \text{où } c_k \in \mathbb{C} \text{ et } \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Définition 2.2.3 *(Approximation polynômiale) Une fonction $f \in L^p_{loc}$ est presque périodique au sens de Stepanov, si $\forall \varepsilon > 0, \exists P$ un polynôme trigonométrique tel que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t) - P(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Remarque 2.2.4 *La définition* (2.2.3) *signifie que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans* S^p_{pp}.

Le résultat fondamental de ce paragraphe est le suivant.

Proposition 2.2.5 *On a*

$$\textit{Définition } (2.1.11) \Longleftrightarrow \textit{Définition } (2.2.1) \Longleftrightarrow \textit{Définition } (2.2.3).$$

Preuve. Définition (2.2.1) $\Rightarrow$ Définition (2.1.11) : Soit $f \in L^p_{loc}$, on suppose que f n'est pas presque périodique au sense de Stepanov, alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall l > 0$ il existe un intervalle $[x, x+l]$ qui ne contient aucune ε-presque période de f. Soit $h_1 \in \mathbb{R}$, alors on peut trouver un intervalle $[x_1, x_2]$ de longueur strictement supérieur à $2|h_1|$ qui ne contient aucune ε-presque période de f , on pose $h_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, alors $h_2 - h_1 \in [x_1, x_2]$, et donc $h_2 - h_1$ n'est pas un ε-presque période de f, alors il existe un intervalle $\left[x_1^{'}, x_2^{'}\right]$ de longueur strictement supérieur à $2(|h_2|+|h_1|)$ qui ne contient aucune ε-presque période de f, on pose $h_3 = \frac{1}{2}(x_1^{'}+x_2^{'})$, alors h_3-h_1, $h_3 - h_2 \in \left[x_1^{'}, x_2^{'}\right]$ donc ne sont pas des ε-presque période de f. On continue cette procédure pour lequlle $h_i - h_j$, ($i \geq 4, j < i$) ne sont pas un ε-presque période de f. Donc, il vient

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t-h_i) - f(t-h_j)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+h_i-h_j) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre qu'on ne peut pas extraire une sous suite S^p-uniformément convergente de la siute $(f(x+h_n))_n$ ce qui contredit l'hypothése.

Définition (2.1.11) $\Rightarrow$Définition (2.2.3) : Supposons que $\exists \varepsilon > 0$ tel que pour tout polynôme trigonométrique P, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t) - P(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \geq \varepsilon,$$

où

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x}, \quad \text{où } c_k \in \mathbb{C} \text{ et } \lambda_k \in \mathbb{R} \\ &= c_1 e^{i\lambda_1 x} + c_2 e^{i\lambda_2 x} ... + c_n e^{i\lambda_n x} \end{aligned}$$

On peut vérifie facilement que toute fonction de la forme $c_k e^{i\lambda_k x}$ est périodique de période $\frac{2\pi}{\lambda_k}$, pour toute $\lambda_k \neq 0$, même si $\lambda_k = 0$, alors les polynômes trégonométriques sont des fonctions périodique, ainsi que sont des fonctions presque périodiques au sens de Stepanov. Soit $\varepsilon \in E_S(\varepsilon, P)$, on a

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - P(t) + P(t) - P(t+\tau) + P(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - P(t+\tau)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} - \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |-P(t) + P(t) + P(t+\tau) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t+\tau) - P(t+\tau)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} - \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |-P(t) + P(t+\tau)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |P(t) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \varepsilon \end{aligned}$$

C'est une contradiction, car f est presque périodique au sens de Stepanov.

Définition (2.2.3) $\Rightarrow$Définition (2.2.1) : Soit $f(x) = e^{i\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $(h_n)_n$ une suite de nombres réels, il faut montrer qu'il existe une sous suite $(h_{n_k})_k$ telle que la suite $(f(x+h_{n_k}))_k = (e^{i\lambda x} e^{i\lambda h_{n_k}})_k$ est S^p-uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. En effet,

Comme $\left| e^{i\lambda h_n} \right| = 1$, alors on peut extraire une sous suite $(h_{n_k})_k$ telle que la suite $\left(e^{i\lambda h_{n_k}} \right)_k$ sera convergente. Mais

$$|f(x + h_{n_k}) - f(x + h_{m_k})| = \left| e^{i\lambda h_{n_k}} - e^{i\lambda h_{m_k}} \right|,$$

ce qui implique que $(f(x+h_{n_k}))_n$ est uniformément convergente , donc elle est S^p-uniformément convergente. D'où f verifie le critère de Bochner.

il est clair que toute fonction de la forme $ce^{i\lambda x}$, où $c \in \mathbb{C}$, est aussi verifié le critère de Bochner.

Considérons maintenant un polynôme trigonométrique $P(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k e^{i\lambda_k x}$ et une suite de nombres réels $(h_n)_n$.

D'après ce qui précède on peut extraire $(h_{n_1})_{n_1}$ de la suite $(h_n)_n$ telle que $(c_1 e^{i\lambda_1 x} e^{i\lambda_1 h_{n_1}})_{n_1}$ sera S^p-uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, et ainsi on peut extraire $(h_{n_2})_{n_2}$ de la suite $(h_{n_1})_{n_1}$ telle que $(c_2 e^{i\lambda_2 x} e^{i\lambda_2 h_{n_2}})_{n_2}$ sera S^p-uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, par cette procédeure on conclu qu'il existe une suite $(h_{n_k})_{n_k}$ de $(h_n)_n$ telle que les suite $(c_k e^{i\lambda_k x} e^{i\lambda_k h_{n_k}})_{n_k}$ $k = 1...m$, sont S^p-uniformément convergentes, ce qui montre que tout polynome trigonométrique vérifie le critère de Bochner.

Soit maintenant une fonction $f \in S^p_{pp}$, alors il existe P_n qu'il est S^p-convergente vers f .

Soit $(h_n)_n$ une suite de nombres réels, alors on peut extraire une sous suite $(h_{n_1})_{n_1}$ de la suite $(h_n)_n$ telle que la suite $(P_1(x+h_{n_1}))_{n_1}$ sera S^p-uniformément convergente, et de la suite $(h_{n_1})_{n_1}$ on peut extraire $(h_{n_2})_{n_2}$ telle que la suite $(P_2(x+h_{n_2}))_{n_2}$ sera S^p-uniformément convergente, par suite il existe $(h_{n_p})_{n_p}$ telle que les suite $(P_q(x+h_{n_p}))_{n_p}$ sont S^p-uniformément convergente $q = 1...p$, on construire la suite diagonle $(h_{n_n})_{n_n}$ qu'elle est extraire des suites $(h_{n_p})_{n_p}$, d'oú $(P_q(x+h_{n_n}))_{n_n}$ $q = 1...n$, sont S^p-uniformément convergentes.

Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |P_n(t) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3},$$

et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \left| P_n(t+h_{n_n}) - P_n(t+h_{p_p}) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1}\left|f(t+h_{n_n})-f(t+h_{p_p})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1}|f(t+h_{n_n})-P_n(t+h_{n_n})|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}+\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1}\left|P_n(t+h_{n_n})-P_n(t+h_{p_p})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&+\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+1}|f(t+h_{n_n})-P_n(t+h_{n_n})|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\\
&<\tfrac{\varepsilon}{3}+\tfrac{\varepsilon}{3}+\tfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon
\end{aligned}$$

Ceci montre que de la suite $(h_n)_n$, on peut extraire une sous suite $(h_{n_k})_k$ telle que la suite $(f(x+h_{n_k}))_k$ est S^p-uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. □

2.3 Analyse harmonique dans S^p_{pp}

Le paragraphe suivant est une brève approche à l'analyse harmonique dans l'espace des fonctions presque périodiques au sens de Stepanov. À cet effet, nous allons donner quelques notions fondamentales sur ce contexte, telles que; la valeur moyenne, les coefficients de Fourier et les séries de Fourier, etc....

2.3.1 Valeur moyenne

Définition 2.3.1 *On appelle valeur moyenne d'une fonction f, la limite (si elle existe) notée et définie par*

$$M(f)=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\int_0^X f(t)dt$$

Théorème 2.3.2 *Si f est une fonction presque périodique au sens de Stepanov, alors sa valeur moyenne existe.*

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$, l_ε la longeur associé et $\tau \in [a, a + l_\varepsilon]$ un $\frac{\varepsilon}{2}-$presque période de f , on a,

$$\int_a^{a+X} f(t)dt = \int_a^{\tau} f(t)dt + \int_{\tau}^{\tau+X} f(t)dt + \int_{\tau+X}^{a+X} f(t)dt.$$

Alors,

$$\int_0^{X} f(t)dt - \int_a^{a+X} f(t)dt = \int_0^{X} f(t)dt - \int_a^{\tau} f(t)dt - \int_{\tau}^{\tau+X} f(t)dt - \int_{\tau+X}^{a+X} f(t)dt.$$

Donc,

$\frac{1}{X} \left\| \int_0^X f(t)dt - \int_a^{a+X} f(t)dt \right\|_{S^p}$

$\leq \frac{1}{X} \left\| \int_0^X f(t)dt - \int_\tau^{\tau+X} f(t)dt \right\|_{S^p} + \frac{1}{X} \left\| \int_a^\tau f(t)dt \right\|_{S^p} + \frac{1}{X} \left\| \int_{\tau+X}^{a+X} f(t)dt \right\|_{S^p}$

$\leq \frac{1}{X} \int_0^X \|f(t) - f(t+\tau)\|_{S^p} dt + \frac{1}{X} \int_a^\tau \|f(t)\|_{S^p} dt + \frac{1}{X} \int_{\tau+X}^{a+X} \|f(t)\|_{S^p} dt$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{X}||f||_{S^p} l_\varepsilon + \frac{1}{X}||f||_{S^p} l_\varepsilon.$

Ainsi

$$\frac{1}{X} \left\| \int_0^X f(t)dt - \int_a^{a+X} f(t)dt \right\|_{S^p} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{X} \|f\|_{S^p} l_\varepsilon \tag{2.5}$$

Soit $X_1, X_2 > \dfrac{4||f||_{S^p} l_\varepsilon}{\varepsilon}$, alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{X_1} \int_0^{X_1} f(t)dt - \frac{1}{X_2} \int_0^{X_2} f(t)dt \right\|_{S^p} &\leq \varepsilon + 2||f||_{S^p} l_\varepsilon (\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}) \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $M(f) = \lim\limits_{X \to +\infty} \int_0^X f(t)dt$ existe. □

Proposition 2.3.3 *Soit f et g deux fonctions presque périodiques au sens de Stepanov définient sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors*

(i) $M(\overline{f}) = \overline{M(f)}$, *où $\overline{f}$ désigne la conjugué de f.*

(ii) $M(\alpha f) = \alpha M(f)$.

(iii) *Si* $f \geq 0$ *alors* $M(f) \geq 0$.

(iv) $M(f+g) = M(f) + M(g)$.

(v) *Si* $(f_n)_n \underset{n\to+\infty}{\overset{S^p}{\to}} f$, *alors* $M((f_n)_n) \underset{n\to+\infty}{\overset{S^p}{\to}} M(f)$

(vi) $a \in \mathbb{R}$, $M(f) = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \int\limits_a^{a+X} f(t)dt$.

Preuve. (i), (ii), (iii), (iv) et (v) sont évidents.

(vi) D'aprés (2.5), on a

$$\frac{1}{X}\left\|\int_0^X f(t)dt - \int_a^{a+X} f(t)dt\right\|_{S^p} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{X}||f||_{S^p} l_\varepsilon.$$

Pour $X > \dfrac{4||f||_{S^p} l_\varepsilon}{\varepsilon}$, on trouve

$$\frac{1}{X}\left\|\int_0^X f(t)dt - \int_a^{a+X} f(t)dt\right\|_{S^p} < \varepsilon.$$

Ce qui montre que

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X f(t)dt = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_a^{a+X} f(t)dt.$$

□

2.3.2 Série de Fourier

Soit f une fonction presque périodique au sens de Stepanov définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. En vertu de la remarque (2.1.21) et la proposition (2.1.22) , il est claire que la fonction $t \to f(t)e^{-i\lambda t}$ est presque périodique au sens de Stepanov, car $e^{-i\lambda t} \in \mathcal{C}_{pp}$ et $f \in S^p_{pp}$, donc on peut définir sa valeur moyenne. On la note

$$a(\lambda, f) = M(f(t)e^{-i\lambda t}).$$

Proposition 2.3.4 *Soit $f \in S^p_{pp}$, alors l´ensemble des λ pour lequel $a(\lambda, f) \neq 0$, est au plus dénombrable.*

Preuve. Soit $f \in S^p_{pp}$, alors il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ une suite de polynômes trigonométriques telle que, $\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(x) \overset{S^p}{=} f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et par suite, $\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n(x)\, e^{-i\lambda x} \overset{S^p}{=} f(x)\, e^{-i\lambda x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De plus, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} M\left(P_n e^{-i\lambda x}\right) \overset{S^p}{=} M\left(f e^{-i\lambda x}\right) = a(\lambda).$$

Pour chaque n fixé le nombre $M\left(P_n e^{-i\lambda x}\right) \neq 0$, seulement pour un nombre fini de valeurs de λ, et par conséquent,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} M\left(P_n e^{-i\lambda x}\right) \neq 0,$$

pour au plus un ensemble dénombrable de valeurs de λ. □

Théorème 2.3.5 *(Bessel) Soit f une fonction presque périodique au sens de Stepanov, et soit $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbb{R}$, et $b_1, b_2, ...b_n \in \mathbb{C}$ avec $b_k = a(\lambda_k, f)$, pour tout $k = \overline{1, ..., n}$. Alors,*

$$\sum_{k=1}^{n} |a(\lambda_k, f)|^2 \leq M(|f|^2).$$

Preuve. D'après la proposition (2.3.3), on a

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq\; M\left(|f - \sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\lambda_k x}|^2\right) = M\left(\left(f - \sum_{k=1}^{n} b_k e^{i\lambda_k x}\right)\left(\overline{f} - \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k e^{-i\lambda_k x}\right)\right) \\ &=\; M(|f|^2) - \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k M(f(x)e^{-i\lambda_k x}) - \sum_{k=1}^{n} b_k(\overline{f}(x)e^{i\lambda_k x}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} b_k \overline{b}_h M(e^{ix(\lambda_k - \lambda_h)}) \end{aligned}$$

On peut facilement voir que

$$M(e^{ix(\lambda_k - \lambda_h)}) = \begin{cases} 1, & \text{si } h = k \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} 0 &\leq M(|f|^2) - \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k a(\lambda_k, f) - \sum_{k=1}^{n} b_k \overline{a}(\lambda_k, f) + \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \\ &= M(|f|^2) + \sum_{k=1}^{n} |b_k - a(\lambda_k, f)|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a(\lambda_k, f)|^2 \\ &= M(|f|^2) - \sum_{k=1}^{n} |a(\lambda_k, f)|^2 \end{aligned}$$

Ainsi que le théorème et preuvé. □

Définition 2.3.6 *Soit f une fonction presque périodique au sens de Stepanov. Alors,*

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbb{R}$, tels que $a(\lambda_k, f) \neq 0$, sont appelés les exposants de Fourier de f.

L'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbb{R} : \ a(\lambda_k, f) \neq 0, 1 \leq k \leq n\},$$

est appelé le spectre de f.

Les nombres $A_k = a(\lambda_k, f)$ sont appelés les coefficients de Fourier de f.

La série formelle donnée par

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x},$$

est appelée la série de Fourier associée à f.

Afin de prouver l'égalité de Parseval on aura besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.3.7 *Si la série de Fourier d'une fonction f presque périodique de Stepanov est*

S^p-uniformément convergente vers une somme, alors la fonction f coïncide avec cette somme.

Lemme 2.3.8 *Soit f une fonction presque périodique de Stepanov, alors on a*

$$M_t(M_x(f(x+t)\overline{f}(t)e^{-i\lambda x})) = M_x(M_t(f(x+t)\overline{f}(t)e^{-i\lambda x})).$$

Proposition 2.3.9 *(Egalité de Parseval) Soit f une fonction presque périodique au sens de Stepanov telle que*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{i\lambda_n x}.$$

Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = M(|f|^2).$$

Preuve. Considèrons la fonction $g(x) = M_t(f(x+t)\overline{f}(t))$, d'aprés le lemme (2.3.8) on a,

$$\begin{aligned} M_x(ge^{-i\lambda x}) &= M_x(M_t(f(x+t)\overline{f}(t))e^{-i\lambda x}) = M_t(M_x(f(x+t)\overline{f}(t)e^{-i\lambda x})) \\ &= M_t(\overline{f}(t)M_x(f(x)e^{-i\lambda x}e^{i\lambda t})) = M_t(\overline{f}(t)A_k e^{i\lambda t}) \\ &= \overline{A_k}A_k = |A_k|^2. \end{aligned}$$

Alors,

$$g(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} |A_k|^2 e^{i\lambda_k x}.$$

En appliquant l'inégalité de Bessel à la fonction f on obtient $\sum_{k=1}^{n} |A_k|^2 \leq M(|f|^2)$ ce qui montre que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} |A_k|^2$ est convergente. Or

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| |A_k|^2 e^{i\lambda_k x} \right| \leq |A_k|^2.$$

Alors la série $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |A_k|^2 e^{i\lambda_k x}$ est normalement convergente d'où S^p-uniformément convergente, et d'aprés le corollaire (2.1.23) S est presque périodique de Stepanov.

Le lemme (2.3.7), donne $g(x) = S(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pour $x = 0$ on a

$$g(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} |A_k|^2.$$

De plus

$$g(0) = M_t(f(t)\overline{f}(t)) = M(|f|^2).$$

Ainsi que la proposition est prouvé. □

Proposition 2.3.10 *Si la valeur moyenne d'une fonction presque périodique de Stepanov f est nulle alors $f \equiv 0$.*

Théorème 2.3.11 *(Unicité) Deux fonctions presque périodiques au sens de Stepanov ayant la même série de Fourier sont identiques.*

Preuve. La preuve découle de la proposition (2.3.10). □

Proposition 2.3.12 *Si la dérivée (respectivement la primitive) d'une fonction presque périodique au sens de Stepanov est presque périodique alors sa série de Fourier est obtenue par dérivation(respectivement intégration) formelle de la série associée à la fonction.*

Preuve. Soit f une fonction presque périodique au sens de Stepanov et supposons que la dérivée $f^{'}$et la primitive F sont aussi presque périodique au sens de Stepanov, alors

$$\begin{aligned} a(\lambda, f^{'}) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^{'}(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} f(t) e^{-i\lambda t}|_0^T + i\lambda \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) \\ &= i\lambda a(\lambda, f). \end{aligned}$$

Si on note $A_k^{'}$ les coeffcients de Fourier de $f^{'}$ on obtient, $A_k^{'} = i\lambda_k A_k$, et ainsi

$$f^{'} \sim \sum_{n=1}^{\infty} i\lambda_n A_n e^{i\lambda_n x}.$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned} a(\lambda, F) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{i\lambda T} F(t) e^{-i\lambda t}|_0^T + \frac{1}{i\lambda T} \int_0^T f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) \\ &= \frac{1}{i\lambda} a(\lambda, f). \end{aligned}$$

Si on note B_k les coeffcients de Fourier de F on obtient, $B_k = \frac{1}{i\lambda_k} A_k$. Donc

$$F \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i\lambda_n} A_n e^{i\lambda_n x}.$$

□

Chapitre 3

Distributions presque périodiques de Schwartz

3.1 Distributions bornées $\mathcal{D}'_{L^\infty}$

Dans ce paragraphe on introduit les espaces $\mathcal{D}_{L^1}$, $\mathcal{D}_{L^\infty}$ et l'espace des distributions bornées $\mathcal{D}'_{L^\infty}$. Quelques notions et résultats nécessaires sont rappelés, voir [3] et [15] pour plus de détails ainsi que les preuves.

On désigne par $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions test et par $\mathcal{D}'$ son dual topologique, c'est l'espace des distributions.

Définition 3.1.1 *On note par $\mathcal{D}_{L^1}$ l'espace des fonctions φ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées appartiennent à L^1, i.e.*

$$\mathcal{D}_{L^1} = \left\{\varphi \in C^\infty : \varphi^{(j)} \in L^1, \forall j \in \mathbb{Z}_+\right\}.$$

et $\mathcal{D}_{L^\infty}$ est l'espace des fonctions φ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées sont

bornées, i.e.

$$\mathcal{D}_{L^\infty} = \left\{\varphi \in C^\infty : \varphi^{(j)} \in L^\infty, \forall j \in \mathbb{Z}_+\right\}.$$

L'espace $\mathcal{D}_{L^1}$, est muni de la topologie définie par la famille dénombrable de normes

$$|\varphi|_{m,1} = \sum_{j\leq m} \left\|\varphi^{(j)}\right\|_{L^1}, \ m \in \mathbb{Z}_+.$$

L'espace $\mathcal{D}_{L^\infty}$ est muni de la topologie définie par la famille dénombrable de normes

$$|\varphi|_{m,\infty} = \sum_{j\leq m} \left\|\varphi^{(j)}\right\|_{L^\infty}, \ m \in \mathbb{Z}_+$$

Proposition 3.1.2 *Les espaces $\mathcal{D}_{L^1}$ et $\mathcal{D}_{L^\infty}$, sont des espaces de Frechet.*

Preuve. Voir [3] et [15]. □

Remarque 3.1.3 *Une suite de fonctions $\left(\varphi_j\right)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}_{L^1}$, (converge vers 0 dans $\mathcal{D}_{L^\infty}$ respectivement), si $\forall m \in \mathbb{Z}_+$, $\left|\varphi_j\right|_{m,1} \underset{j\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$, ($\forall m \in \mathbb{Z}_+$, $\left|\varphi_j\right|_{m,\infty} \underset{j\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ respectivement).*

Remarque 3.1.4 *L'espace $\mathcal{D}$ n'est pas dense dans $\mathcal{D}_{L^\infty}$. La fonction φ définie par $\varphi \equiv 1$ est une fonction de $\mathcal{D}_{L^\infty}$, mais il n'existe aucune suite de fonctions test $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\varphi_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \varphi$.*

Notation 3.1.5 *On note $\hookrightarrow$ le signe d'injection continue.*

Proposition 3.1.6 *(i) $\mathcal{D}_{L^1}$ et $\mathcal{D}_{L^\infty}$ sont des sous-algèbres différentielles de $\mathcal{C}^\infty$.*

(ii) $\mathcal{D}_{L^1} \hookrightarrow L^1$ et $\mathcal{D}_{L^\infty} \hookrightarrow L^\infty$.

(iii) $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}_{L^1} \hookrightarrow \mathcal{D}_{L^\infty} \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty$.

(iv) $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}_{L^1}$.

Preuve. Voir [3] et [15]. □

Proposition 3.1.7 *Si $\varphi \in \mathcal{D}_{L^1}$ et $\psi \in \mathcal{D}_{L^\infty}$, alors $\varphi\psi \in \mathcal{D}_{L^1}$ et $\forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists C_m > 0$ tel que*

$$|\varphi\psi|_{m,1} \leq C_m |\varphi|_{m,1} |\psi|_{m,\infty}, \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^1}, \psi \in \mathcal{D}_{L^\infty}.$$

Preuve. Voir [3] et [15]. □

Comme conséquence de l'inégalité de Young, on a

Proposition 3.1.8 *Soient $\varphi \in \mathcal{D}_{L^1}$ et $\psi \in \mathcal{D}_{L^\infty}$, alors $\varphi * \psi \in \mathcal{D}_{L^\infty}$. Et $\forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists C_m > 0$ tel que*

$$|\varphi * \psi|_{m,\infty} \leq C_m |\varphi|_{m,1} |\psi|_{0,\infty}.$$

Preuve. Si $\psi \in \mathcal{D}_{L^\infty}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$y \longmapsto \psi(x-y) \in \mathcal{D}_{L^\infty}.$$

Par conséquent, $y \longmapsto \varphi^{(j)}(y)\psi(x-y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'inégalité de Hölder donne

$$\sum_{j\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(\varphi * \psi)^{(j)}(x)\right| = \sum_{j\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left|\varphi^{(j)}(y)\psi(x-y)\right| dy \leq \sum_{j\leq m} \left\|\varphi^{(j)}\right\|_{L^1} \|\psi\|_{L^\infty},$$

ce qui entraîne

$$|\varphi * \psi|_{m,\infty} \leq |\varphi|_{m,1} |\psi|_{0,\infty}.$$

□

Corollaire 3.1.9 *Soient $\varphi \in \mathcal{D}_{L^1}$ et $\psi \in \mathcal{D}_{L^1}$. Alors $\varphi * \psi \in \mathcal{D}_{L^1}$ et $\forall m \in \mathbb{Z}_+, \exists C_m > 0$ tel que*

$$|\varphi * \psi|_{m,1} \leq C_m |\varphi|_{m,1} |\psi|_{0,1}, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^1} \text{ et } \forall \psi \in \mathcal{D}_{L^1}$$

L. Schwartz a introduit l'espace des distributions bornées $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ comme espace dual de l'espace $\mathcal{D}_{L^1}$, voir [15].

Définition 3.1.10 *Le dual topologique de $\mathcal{D}_{L^1}$, noté $\mathcal{D}'_{L^\infty}$, est l´espace des formes linéaires T continues sur $\mathcal{D}_{L^1}$, i.e. $T : \mathcal{D}_{L^1} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire et vérifie*

$$\exists C > 0, \exists m \in \mathbb{Z}_+ \, : \, |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \, |\varphi|_{m,1} \, , \; \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^1}$$

Remarque 3.1.11 *Soient $(T_j)_j$ une suite de $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ et $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$, dire $\lim\limits_{j \longrightarrow \infty} T_j = T$ dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ si et seulement si*

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \, , \; \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^1}$$

Définition 3.1.12 *La convolution d'une distribution T et d'une fonction φ, notée $T * \varphi$, est la fonction définie par $(T * \varphi)(x) = \langle T_y, \varphi(x - y) \rangle$.*

Nous avons la caractérisation des éléments de $\mathcal{D}'_{L^\infty}$.

Théorème 3.1.13 *Les assertions suivantes sont équivalents:*

(i) $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$

(ii) $T * \varphi \in L^\infty$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

(iii) $\exists \; k \in \mathbb{Z}_+, \exists \; (f_j)_{j \leq k} \subset L^\infty$, $T = \sum\limits_{j \leq k} f_j^{(j)}$.

Preuve. Voir [3] et [15]. □

Notation 3.1.14 *Soient $h \in \mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}'$, on désigne par $\tau_h T$ le translaté de T, i.e.*

$$\langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-h} \varphi \rangle \, , \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

où $\tau_{-h}\varphi(x) = \varphi(x + h)$ est le translaté de φ par h.

Remarque 3.1.15 *L'assertion ii) de théorème* (3.1.13) *dit qu'une distribution T est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'ensemble de ses translatés $\{\tau_h T,\ h \in \mathbb{R}\}$ est borné dans $\mathcal{D}'$. Autrement dit; l'application*

$$\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}'$$

$$h \mapsto \tau_h T$$

est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, i.e. $\langle \tau_h T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, est une fonction de h bornée sur tout $\mathbb{R}$.

Proposition 3.1.16 $L^\infty \hookrightarrow \mathcal{D}'_{L^\infty} \hookrightarrow \mathcal{D}'$.

Preuve. Voir [3] et [15]. □

Proposition 3.1.17 *Si $\varphi \in \mathcal{D}_{L^\infty}$ et $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$, alors $\varphi T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$. L'application bilinéaire*

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}'_{L^\infty} \times \mathcal{D}_{L^\infty} \longrightarrow \mathcal{D}'_{L^\infty} \\ (T, \varphi) \longmapsto \varphi T \end{array}$$

est séparément continue.

Preuve. Elle découle de la proposition (3.1.7). □

Corollaire 3.1.18 *Si $\varphi \in \mathcal{D}_{L^1}$ et $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$, alors $\varphi T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$. L'application bilinéaire*

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}'_{L^\infty} \times \mathcal{D}_{L^1} \longrightarrow \mathcal{D}'_{L^\infty} \\ (T, \varphi) \longmapsto \varphi T \end{array}$$

est séparément continue.

Théorème 3.1.19 *Si $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$ et $f \in L^1$, alors on définit la convolution de T et f, notée $T * f$, par*

$$\langle T * f, \varphi \rangle = \langle T_x \otimes f_y, \varphi(x+y) \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^1}$$

L'application bilinéaire

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}'_{L^\infty} \times L^1 \longrightarrow \mathcal{D}'_{L^\infty} \\ (T, f) \longmapsto T * f \end{array},$$

est continue.

Preuve. En effet, on a $\langle T * f, \varphi \rangle = \langle T_x \otimes f_y, \varphi(x+y) \rangle$. Puisque $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$, alors d'aprés la caractérisation des distributions $\mathcal{D}'_{L^\infty}$, $\exists\ (f_j)_{j \leq k} \subset L^\infty$ tel que $T = \sum_{j \leq k} f_j^{(j)}$, et par suite

$$\begin{aligned} \langle T * f, \varphi \rangle &= \langle T_x \otimes f_y, \varphi(x+y) \rangle = \left\langle \sum_{j \leq k} f_j^{(j)}(x), \langle f(y), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle \\ &= \sum_{j \leq k} (-1)^j \left\langle f_j * f, \varphi^{(j)} \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^1}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\left| \left\langle f_j * f, \varphi^{(j)} \right\rangle \right| \leq \|f_j\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} \left\|\varphi^{(j)}\right\|_{L^1},$$

et par suite $\exists C > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^1}$, on a

$$|\langle T * f, \varphi \rangle| \leq C |\varphi|_{k,1}$$

ce qui démontre que $T * f \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$. Montrons que l'application

$$\begin{array}{c} A_* : \mathcal{D}'_{L^\infty} \times L^1 \longrightarrow \mathcal{D}'_{L^\infty} \\ (T, f) \longmapsto T * f \end{array},$$

est continue. Soient $(T_j)_{j \in \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{D}'_{L^\infty}$ et $(f_j)_{j \in \in \mathbb{Z}_+} \subset L^1$ tels que $T_j \underset{j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} T$ dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ et $f_j \underset{j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f$ dans L^1, on a

$$\langle T_j * f_j, \varphi \rangle = \left\langle \left\langle (T_j)_y, f_j(x-y) \right\rangle, \varphi \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^1}.$$

Or

$$\left\langle \left\langle (T_j)_y, f_j(x-y) \right\rangle, \varphi \right\rangle = \left\langle (T_j)_y, \langle f_j(x-y), \varphi \rangle \right\rangle \underset{j \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \langle T_y, \langle f(x-y), \varphi \rangle \rangle = \langle T * f, \varphi \rangle,$$

ce qui démontre que $T_j * f_j$ converge vers $T * f$, d'où A_* est continue. □

3.2 Distributions presque périodiques $\mathcal{B}'_{pp}$

L'idée de la presque périodicité des distributions est donnée pour la première fois par L. Schwartz, voir [15]. Elle est basée sur la définition topologique de la presque périodicité donnée par S. Bochner.

Définition 3.2.1 *On dit qu'une distribution T est presque périodique si*

(i) $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$.

(ii) l'ensemble $\{\tau_h T \ , h \in \mathbb{R}\}$ *des translatés de* T *est relativement compact dans* $\mathcal{D}'_{L^\infty}$.

On note par $\mathcal{B}'_{pp}$ *l'espace des distributions presque périodiques.*

Remarque 3.2.2 *La condition (ii) de la définition signifie : pour toute suite* $(h_n)_n \subset \mathbb{R}$, *on peut extraire une sous suite* $(h_{n_k})_k$ *telle que* $\left(\tau_{h_{n_k}} T\right)_k$ *converge dans* $\mathcal{D}'_{L^\infty}$, *quand* $k \longrightarrow \infty$.

Théorème 3.2.3 *Soit* $T \in \mathcal{D}'$, *alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) $T \in \mathcal{B}'_{pp}$.

(ii) $T * \varphi \in \mathcal{C}_{pp}, \forall\ \varphi \in \mathcal{D}$

(iii) $\exists\ k \in \mathbb{Z}_+, \exists\ (f_j)_{j \leq k} \subset \mathcal{C}_{pp}$, $T = \sum_{j \leq k} f_j^{(j)}$

Remarque 3.2.4 *La condition (ii) signifie que la fonction*

$$\begin{aligned} g : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \quad \mathcal{D}' \\ y &\longmapsto \quad \tau_y T \end{aligned}$$

est une fonction presque périodique de Bohr.

Preuve. Voir [15]. □

Proposition 3.2.5 *A toute fonction presque périodique au sens de Bohr on associe une unique distribution presque périodique T_f définie par*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Preuve. Puisque f est continue, alors il est clair qu'il existe une unique distribution $T_f \in \mathcal{D}'$ correspondant à f. Montrons que $T_f \in \mathcal{B}'_{pp}$, en effet, soit $(h_n)_n$ une suite de nombres réels, on a

$$g(y+h_n) = \langle \tau_{y+h_n} T_f, \varphi \rangle = \int f(x-y-h_n)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

puisque f est presque périodique alors on peut extraire une sous suite $(h_{n_k})_k$, telle que $f(.-h_{n_k})$ converge uniformément.Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall k, k' \geq N, \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x+h_{n_k}) - f\left(x+h_{n_{k'}}\right)\right| < \varepsilon.$$

D'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall k, k' \geq N, \left| g(y+h_{n_k}) - g\left(y+h_{n_{k'}}\right)\right| \leq \varepsilon \int |\varphi(x)|\,dx,$$

et la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}'$$

$$y \longrightarrow \tau_y T_f$$

est presque périodique et donc $T_f \in \mathcal{B}'_{pp}$. □

Remarque 3.2.6 *Si $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, alors $\forall i \in \mathbb{Z}_+$, $T^{(i)} \in \mathcal{B}'_{pp}$, ceci découle de (ii) (Théorème 3.2.3).*

Proposition 3.2.7 *Si $T \in \mathcal{B}'_{pp}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_{pp}$, alors, $\varphi T \in \mathcal{B}'_{pp}$.*

Preuve. Puisque $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, alors, il existe $(f_j)_{j\leq k} \subset \mathcal{C}_{pp}$, tel que $T = \sum_{j\leq k} f_j^{(j)}$, d'autre part, on a

$$\varphi T = \sum_{j\leq k} \varphi f_j^{(j)} = \sum_{j\leq k}\sum_{i\leq j} (-1)^i \complement_j^i \left(\varphi^{(i)} f_j\right)^{(j-i)},$$

ce qui entraîne que φT est écrite comme somme fini de dérivées succesives de fonctions presque périodiques usuelles, d'où $\varphi T \in \mathcal{B}'_{pp}$. □

Proposition 3.2.8 *Si $T \in \mathcal{B}'_{pp}$ et $f \in L^1$, alors $T * f \in \mathcal{B}'_{pp}$.*

Preuve. Puisque $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, alors $\exists\ k \in \mathbb{Z}_+, \exists\ (f_j)_{j\leq k} \subset \mathcal{C}_{pp}$, tel que $T = \sum_{j\leq k} f_j^{(j)}$, et par suite $T * f = \left(\sum_{j\leq k} f_j^{(j)}\right) * f = \sum_{j\leq k} (f_j * f)^{(j)}$. Le résultat découle du fait que

$$\text{Si } f \in \mathcal{C}_{pp} \text{ et } g \in L^1 \Longrightarrow f * g \in \mathcal{C}_{pp}.$$

En effet, soit $(h_n)_n$ une suite de nombres réels, on a

$$(f * g)(x + h_n) = \int f(x + h_n - y)\, g(y)\, dy,$$

d'une façon analogue de la preuve du proposition (3.2.5) on déduit que $(f * g)(. + h_{n_k})$ converge uniformément, ce qui signifie que $f * g \in \mathcal{C}_{pp}$. D'où $T * f \in \mathcal{B}'_{pp}$. □

Remarque 3.2.9 *La proposition reste vraie si $f \in \mathcal{D}_{L^1}$.*

3.3 Analyse harmonique dans $\mathcal{B}'_{pp}$

On sait que à toute fonction f presque périodique de Bohr (ou de Stepanov) on peut associer un nombre complexe appelé valeur moyenne de f, noté et défini par

$$M(f) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \int_0^X f(x)\,dx.$$

Définition 3.3.1 *Soit* $\varphi \in \mathcal{D}$ *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \neq 0$, *et soit* $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, *alors la* $\varphi-$*moyenne de* T, *noté* $M^{\varphi}(T)$, *est définie par*

$$M^{\varphi}(T) = \frac{M(T * \varphi)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}$$

Proposition 3.3.2 *Si* $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, *alors* $M^{\varphi}(T)$ *ne dépend pas du choix de* φ , *et on le note* $M(T)$.

Preuve. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,dx = 1$, on définit la fonction f par

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} (\varphi - \psi)(x)\,dx$$

Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - \psi(x))\,dx = 0$, alors $f \in \mathcal{D}$. La fonction $T * (\varphi - \psi)$ est presque périodique, donc

$$M(T * (\varphi - \psi)) = M(T * f') = M\left((T * f)'\right) = 0,$$

d'où $M^{\varphi}(T) = M^{\psi}(T)$. □

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, alors d'aprés la proposition (3.2.7), $e^{-i\lambda x}T \in \mathcal{B}'_{pp}$, et par suite $M\left(e^{-i\lambda x}T\right)$ existe, posons

$$a_{\lambda}(T) = M\left(e^{-i\lambda x}T\right)$$

Proposition 3.3.3 *Si $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, alors* $a_\lambda\left(T^{(k)}\right) = (i\lambda)^k a_\lambda(T), \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \neq 0$, alors

$$a_\lambda\left(T^{(k)}\right) = M\left(e^{-i\lambda x}T^{(k)}\right) = \frac{M\left(\left(e^{-i\lambda x}T^{(k)}\right) * \varphi\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx} = \frac{M\left(e^{-i\lambda x}\left(T^{(k)} * e^{i\lambda x}\varphi\right)\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}$$

$$= \frac{M\left(e^{-i\lambda x}\left(T * \left(e^{i\lambda x}\varphi\right)^{(k)}\right)\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx} = \frac{M\left(e^{-i\lambda x}\left(T * \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(e^{i\lambda x}\right)^{(l)} \varphi^{(k-l)}\right)\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}$$

$$= \frac{M\left(e^{-i\lambda x}\left(T * \left(e^{i\lambda x}\varphi^{(k)} + (i\lambda)\, e^{i\lambda x}\varphi^{(k-1)} + ... + (i\lambda)^k e^{i\lambda x}\varphi\right)\right)\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}$$

$$= \frac{M\left(e^{-i\lambda x}T * \left(e^{i\lambda x}\varphi^{(k)} + ... + (i\lambda)^{k-1} e^{i\lambda x}\varphi'\right)\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx} + \frac{M\left(e^{-i\lambda x}\left(T * (i\lambda)^k e^{i\lambda x}\varphi\right)\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}.$$

Puisque les fonctions $g(h) = e^{-i\lambda x}T * \left(e^{i\lambda x}\varphi^{(k-s)}\right) = \left\langle e^{-i\lambda x}T, \tau_h\varphi^{(k-s)}\right\rangle, s = 0, ..., k-1$, sont des fonctions presque périodiques en h , alors elles sont bornées, et on a $g'(h) = \left\langle e^{-i\lambda x}T, \tau_h\varphi^{(k-s+1)}\right\rangle$, alors

$$M\left(g'(h)\right) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\int_0^X g'(x)\,dx = 0, \forall s, 0 \leq s \leq k,$$

et par suite, $M\left(e^{-i\lambda x}T^{(k)}\right) = (i\lambda)^k \frac{M\left(e^{-i\lambda x}\left(T * e^{i\lambda x}\varphi\right)\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx} = (i\lambda)^k M\left(e^{-i\lambda x}T\right)$.

D'où $a_\lambda\left(T^{(k)}\right) = (i\lambda)^k a_\lambda(T), \forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposition 3.3.4 *Soit $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, alors l'ensemble des λ tels que $a_\lambda(T) \neq 0$ est au plus dénombrable.*

Preuve. Puisque $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, $\exists\ k \in \mathbb{Z}_+, \exists\ (f_j)_{j\leq k} \subset \mathcal{C}_{pp}$, tels que $T = \sum_{j\leq k} f_j^{(j)}$, alors on a $a_\lambda(T) = a_\lambda\left(\sum_{j\leq k} f_j^{(j)}\right) = \sum_{j\leq k} a_\lambda\left(f_j^{(j)}\right)$, et d'aprés la proposition (3.3.3) on obtient $a_\lambda\left(f_j^{(j)}\right)$

$=(i\lambda)^j a_\lambda(f_j)$, et par suite $a_\lambda(T) = \sum_{j\leq k} (i\lambda)^j a_\lambda(f_j)$. Puisque $a_\lambda(f_j) \neq 0$ seulement pour un ensemble dénombrable de λ, alors $a_\lambda(T) \neq 0$ seulement pour un ensemble dénombrable de λ aussi. □

Définition 3.3.5 *Soit $T \in \mathcal{B}'_{pp}$, on note par Λ le spectre de T, i.e.*

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}: a_\lambda(T) \neq 0\},$$

et par a_λ le coefficient de Fourier de T définie par

$$a_\lambda = a_\lambda(T) = M\left(e^{-i\lambda x}T\right),\ \lambda \in \Lambda$$

La série de Fourier associée à T est définie par

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{i\lambda_j x},\ \text{où } a_j = a_{\lambda_j}$$

Théorème 3.3.6 *(Unicité) Deux distributions presque périodiques ayant la même série de Fourier sont identiques.*

Preuve. *i)* Si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \neq 0$, on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$M\left(\left(e^{-i\lambda x}T\right) * \varphi\right) = 0 \underset{\lambda=0}{\Longrightarrow} (T*\varphi)(x) = 0 \underset{x=0}{\Longrightarrow} \langle T, \varphi\rangle = 0.$$

ii) Si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$, alors la fonction ψ définie par $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx$ est une fonction test et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$M\left(\left(e^{-i\lambda x}T\right) * \varphi\right) = M\left(\left(e^{-i\lambda x}T\right) * \psi'\right) = M\left(\left(\left(e^{-i\lambda x}T\right) * \psi\right)'\right) = 0.$$

De plus

$$M\left(\left(e^{-i\lambda x}T\right) * \varphi\right) = M\left(e^{-i\lambda x}\left(T * e^{i\lambda x}\varphi\right)\right).$$

Alors $\left(T * e^{i\lambda x}\varphi\right)(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne, en prenant $\lambda = 0$ et $x = 0$, que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Et par conséquent $\langle T, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}$. D'où $T = 0$. □

Théorème 3.3.7 *Si $(T_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}'_{pp}$ est une suite de distributions presque périodiques convergente vers une distribution T presque périodique dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}$, alors*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ M\left(e^{-i\lambda x}T_n\right) \longrightarrow M\left(e^{-i\lambda x}T\right) \text{ dans } \mathbb{C}.$$

Preuve. Soient $(g_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}_{pp}$, et $g \in \mathcal{C}_{pp}$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \neq 0$, posons

$$g_n(h) = (T_n * \varphi)(h) \text{ et } g(h) = (T * \varphi)(h), h \in \mathbb{R}$$

Puisque $T_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} T$ dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}$, alors, $g_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} g$ dans L^∞. On a

$$\begin{aligned} \left|M\left(e^{-i\lambda x}T_n\right) - M\left(e^{-i\lambda x}T\right)\right| &= \left|\frac{M\left(e^{-i\lambda x}g_n\right) - M\left(e^{-i\lambda x}g\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx}\right| \\ &\leq \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx\right|^{-1} \sup_{h\in\mathbb{R}} \left|(g_n(h)) - (g(h))\right|, \end{aligned}$$

ce qui montre que $M\left(e^{-i\lambda x}T_n\right) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} M\left(e^{-i\lambda x}T\right)$ dans $\mathbb{C}$. □

Théorème 3.3.8 *Soit $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$, alors T est presque périodique si et seulement si il existe une suite de polynômes trigonométriques $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ telle que*

$$P_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} T \quad \text{dans } \mathcal{D}'_{L^\infty}$$

Preuve. $\Longrightarrow$) Soit $T \in \mathcal{B}'_{pp}$ alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}_+, \exists\, (f_j)_{j\leq k} \subset \mathcal{C}_{pp}, T = \sum_{j\leq k} f_j^{(j)}$, comme f_j est presque périodique alors il existe une suite de polynômes trigonométriques $(Q_{n,j})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ telle que

$$Q_{n,j} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f_j \quad \text{dans } \mathcal{C}_b.$$

D'autre part, $P_n = \sum_{j\leq k} Q_{n,j}^{(j)}$ est une suite de polynômes trigonométriques, on a alors

$$\begin{aligned}(T-P_n)*\varphi &= \left(\sum_{j\leq k} f_j^{(j)} - \sum_{j\leq k} Q_{n,j}^{(j)}\right)*\varphi \\ &= \sum_{j\leq k}\left((f_j - Q_{n,j})*\varphi^{(j)}\right) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } L^\infty,\ \forall\varphi\in\mathcal{D}.\end{aligned}$$

D'où $P_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} T$ dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}$.

$\Longleftarrow$) Soit $T \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$ et supposons qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ telle que

$$P_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} T \quad \text{dans } \mathcal{D}'_{L^\infty}$$

Afin de montrer que T est presque périodique il suffit de montrer que $T*\varphi \in \mathcal{C}_{pp}, \forall\varphi\in\mathcal{D}$. En effet, il est claire que $P_n*\varphi$ est aussi est un polynôme trigonométrique pour tout $n\in\mathbb{Z}_+$ et que l'ensemble $\{\tau_h\varphi,\ h\in\mathbb{R}\}$ est bornée dans $\mathcal{D}_{L^1}$. Alors

$$(P_n*\varphi)(h) = \left\langle P_n, \tau_h\overset{\curlyvee}{\varphi}\right\rangle \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \left\langle T, \tau_h\overset{\curlyvee}{\varphi}\right\rangle = (T*\varphi)(h).$$

Ce qui montre qu'il existe une suite $(P_n*\varphi)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de polynômes trigonométriques qui converge vers $T*\varphi$ dans L^∞. Alors $T*\varphi\in\mathcal{C}_{pp}$ et d'aprés le théorème (3.2.3) on déduit que $T\in\mathcal{B}'_{pp}$. $\square$

3.4 Lien entre $\mathcal{B}'_{pp}$ et $\mathcal{D}'_{S^p_{pp}}$

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que l'espace $\mathcal{B}'_{pp}$ des distributions presque périodiques de Schwarts est identique avec l'espace $\mathcal{D}'_{S^p_{pp}}$ des distributions presque périodiques introduit par Basit et Gunzler. En effet, en adoptant les mêmes notations de Basit et Gunzler, voir [4], nous avons les notions et les propriétés suivantes.

Soient $h \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in L^1_{loc}$. On pose

$$M_h\varphi(t) = \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(t+s)ds, t \in \mathbb{R}.$$

Définition 3.4.1 *Soit $\mathcal{A} \subset L^1_{loc}$. On définit l'espace $M\mathcal{A}$ par*

$$M\mathcal{A} = \left\{\varphi \in L^1_{loc}, M_h\varphi \in \mathcal{A}, \forall h > 0\right\}.$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M^k\mathcal{A} &= M(M^{k-1}\mathcal{A}), ..., \ M^1\mathcal{A} = M\mathcal{A}, \\ M^0\mathcal{A} &= \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Proposition 3.4.2 *On a*

(i) $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^{k-1}\mathcal{A} \subset M^k\mathcal{A}$.

Preuve. Voir [4]. □

Soient $T \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*_+$ on définit l'opérateur $\widetilde{M}_hT$ par

$$\widetilde{M}_hT(\varphi) = T(M_{-h}\varphi).$$

Remarque 3.4.3 *Il est claire que l'opérateur $\widetilde{M}_h$ est linéaire et continu. Il définit donc une distribution, i.e.*

$$si\ T \in \mathcal{D}',\ \widetilde{M}_hT \in \mathcal{D}'.$$

Définition 3.4.4 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}'$, $T \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}$, l'espace $\widetilde{M}\mathcal{A}$ est défini par*

$$\widetilde{M}\mathcal{A} = \left\{ T \in \mathcal{D}', \widetilde{M}_h T \in \mathcal{A}, \forall h > 0 \right\},$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{M}^k\mathcal{A} = \widetilde{M}(\widetilde{M}^{k-1}\mathcal{A}), ..., \widetilde{M}^1\mathcal{A} = \widetilde{M}\mathcal{A}, \quad \widetilde{M}^0\mathcal{A} = \mathcal{A}$$

Proposition 3.4.5 *On a*

(i) $\mathcal{A} \subset \widetilde{M}\mathcal{A}$

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{M}^{k-1}\mathcal{A} \subset \widetilde{M}^k\mathcal{A}$.

(iii) L'opérateur $\widetilde{M}_h$ coïncide avec M_h dans L^1_{loc}.

Preuve. Voir [4]. □

Définition 3.4.6 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. L'espace $\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}$ est défini par*

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{A}} = \left\{ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : T * \varphi \in \mathcal{A}, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \right\} \tag{3.1}$$

Remarque 3.4.7 *Pour $\mathcal{A} = \mathcal{C}_{pp}$, (resp. $\mathcal{A} = S^p_{pp}$) on obtient $\mathcal{D}'_{\mathcal{C}_{pp}} = \mathcal{B}'_{pp}$ (resp. $\mathcal{D}'_{S^p_{pp}}$).*

On a les propriétés suivantes

$$M\mathcal{A} \subset \widetilde{M}\mathcal{A}$$

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{A}} = \cup_{n=0}^{+\infty} \widetilde{M}^n\mathcal{A} \tag{3.2}$$

et le résultat suivant.

Proposition 3.4.8 *Soit l'ensemble*

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \psi_j * \varphi_j, \quad m \in \mathbb{N} \quad \psi_j \in \mathcal{A},\, \varphi_j \in \mathcal{D} \right\}.$$

S'il existe une partie U tel que $\mathcal{A}_0 \subset U \subset \mathcal{D}'_{\mathcal{A}}$, alors

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{A}} = \mathcal{D}'_{U}.$$

Preuve. Voir [4]. □

En appliquant la proposition précédente on a le résultat suivant.

Proposition 3.4.9 *L'espace $\mathcal{D}'_{S^p_{pp}}$ cöincide avec l'espace $\mathcal{B}'_{pp}$ des distribution presque périodique.*

Preuve. Puisque $\mathcal{C}_{pp} \subset M\mathcal{C}_{pp} \subset \widetilde{M}\mathcal{C}_{pp} \subset ... \subset \widetilde{M}^n\mathcal{C}_{pp}$ et. $\mathcal{C}_{pp} \subset \overset{+\infty}{\underset{n=0}{\cup}} \widetilde{M}^n\mathcal{C}_{pp} = \mathcal{D}'_{\mathcal{C}_{pp}}$. Alors

$$\mathcal{C}_{pp} \subset \mathcal{D}'_{\mathcal{C}_{pp}} = \mathcal{B}'_{pp}.$$

Comme $\mathcal{C}_{pp} * \mathcal{D} \subset \mathcal{C}_{pp} \subset S^p_{pp}$, l'ensemble

$$(\mathcal{C}_{pp})_0 = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \psi_j * \varphi_j, \quad m \in \mathbb{N} \quad \psi_j \in \mathcal{C}_{pp},\, \varphi_j \in \mathcal{D} \right\},$$

vérifie

$$(\mathcal{C}_{pp})_0 \subset \mathcal{C}_{pp} \subset S^p_{pp}.$$

D'autre part, d'aprés le Lemme 5.4 de ([4]), $f \in S^p_{pp} \Rightarrow f = u + v'$, $u,\, v \in \mathcal{C}_{pp}$. Alors $f * \varphi = u * \varphi + v * \varphi' \in \mathcal{C}_{pp} \subset \mathcal{D}'_{\mathcal{C}_{pp}}$, ce qui entraîne $S^p_{pp} \subset \mathcal{D}'_{\mathcal{C}_{pp}}$. Ainsi que

$$(\mathcal{C}_{pp})_0 \subset S^p_{pp} \subset \mathcal{D}'_{\mathcal{C}_{pp}}$$

De la proposition (3.4.8), on déduit que $\mathcal{D}'_{S^p_{pp}} = \mathcal{D}'_{\mathcal{C}_{pp}}$. □

Remarque 3.4.10 *En vertu de la proposition* (3.4.9) , *toutes les propriétés de l'espace $\mathcal{B}'_{pp}$ restent valables pour $\mathcal{D}'_{S^p_{pp}}$.*

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le but de ce travail a été de faire une étude générale d'une nouvelle classe de fonctions presque périodiques de Stepanov ainsi que l'espace des distributions de Schwarts presque périodiques. Donc, nous espérons que ce travail, soit un document utile et un point de départ pour d'autres projets de recherche.

Tout ou long de ce travail, on a vu l'importance de cette notion comme propriété structurelle et caractéristique d'un sous-espace de l'espace L^p_{loc} des classes de fonctions localement $p-$intégrables au sens de Lebesgue.

Bien que l'espace S^p_{pp} de fonctions presque périodiques de Stepanov ait été introduit il y a longtemps, certaines de leurs propriétés qui jouent un rôle important dans la discussion des solutions des équations différentielles n'ont été établies que récemment.

En perspectives, j'espère de poursuivre l'étude sur ce sujet et pouvoir développer certaines des idées, en avenir proche. A titre d'exemple, l'existence de solutions presque périodiques de Stepanov du système d'équations différentielles linéaires dans les espaces S^p_{pp} et $\mathcal{B}'_{pp}$.

REFERENCES

[1] Andres J., Bersani A. M., Grande R. F., Hierarchy of almost-periodic functione spaces, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Vol. 26, 121-188, (2006).

[2] Amerio L, Prouse G, Almost Periodic Function and Functional Equations, Springer, New York, (1971).

[3] Barros-Neto J., An introduction to the theory of distributions, Marcel Dekker, (1973).

[4] Basit B et Gunzler H, Generalized Vector Valued Almost Periodic and Ergodic Distributions, J. Math. Anal. Appl. 314, 363-381, (2006).

[5] Besicovitch A.S., Almost periodic functions, Dover, (1954) .

[6] Brezis H, Analyse Fonctionelle. Théorie et Application. Maisson Paris I, (1983).

[7] Bohr H., Almost periodic functions. Chelsea Publishing Company, (1947).

[8] Charles M, Mesures et Proralités, Hermann, (1974) .

[9] Corduneanu C., Almost periodic functions, Chelsea Publishing Company, (1989) .

[10] Corduneanu C, Almost Periodic Oscillations and Waves Springer, New York, (2009).

[11] Diagana T, Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces, Springer, New York, (2013).

[12] Fink A. M., Almost periodic differential equations. Lecture Notes in Math., N° 377, Springer, (1974) .

[13] Lassoued D, Fonctions Presque Périodiques et Equations Différentielles. Université Panthéon-Sorbonne, Paris I, (2013) .

[14] Levitan B.M.; Zhikov V.V, Almost periodic functions and differential equations, Cambridge University Press, (1982) .

[15] Schwartz L., Théorie des distributions, Hermann, (1966).