Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Univérsité D'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

DJILLALI Asma

Thème

Sur l'existence et la stabilité de solution d'équations différentielles stochastiques d'ordre fractionnaire

Soutenu publiquement le 21/05 / 2017 devant le jury composé de :

M. BOUDAOUI Ahmed	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Président
M. SLAMA Abdeldjalil	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Rapporteur
M. KEDDI Ahmed	Maître assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

Dédicace

Au nom du DIEU le clément et le miséricordieux, je dédie ce modeste travail :

À

Mes chers parents qui ont toujours été dévoués pour que je puisse réaliser ce travail de recherche dans les meilleures conditions

À

ma chère grand mère.

À

mon chèr grand père.

À

mes chers frères, soeurs.

À

toute ma grande famille.

À

toutes mes proches amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Et toute la famille de département de mathématiques et ma promotion 2016-2017(spécialité A.F.A).

Remerciements

Tout d'abord, je remercie DIEU le tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée durant ma vie.

Je tiens à remercier particulièrement à mon encadreur, monsieur " SLAMA Abdeldjalil" d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très prècieux

Je tiens à remercier monsieur "BOUDAOUI Ahmed", et RAHMANE Mabrouk pour l'aide et les observations concernant ce travail.

Je tiens remercier également les membres de nos familles qui nous ont offert soutien moral et financier, plus particulièrement mes parents pour m'avoir soutenu et aidé jusque là.

Je tiens à remercier mes enseignants du primaire, moyen, lycée et d'université

A tous ceux qui nous ont guidés avec gentillesse et effcacité.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail

Résumé

Dans le présent travail, nous avons exposé les différentes définitions et propriétés de la dérivée d'ordre fractionnaire, les définitions et les conditions d'existence et de stabilité de solution des équations différentielles stochastiques. Comme application, nous avons donné une étude sur l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique d'une équation différentielle stochastique neutre d'ordre fractionnaire avec retard infini dans un espace de Hilbert, En utilisant la théorie des semi-gropues et le théorème de point fixe de Banach. En fait, dans ce travail nous avons développé le travail de Sakthivel et al. (2012).

Nous avons aussi donné les définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire, les définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire les plus utilisées comme la définition de Grunwald-letnikov, Riemann-Liouville, ainsi que la dérivée au sens de Caputo, quelques notions de probabilités et de processus stochastique. On introduit les termes et concepts essentiels pour la définition du mouvement Brownien et la famille des processus d'Itô qui elles ont permeté d'établir plusieurs formules pratiques qui forment la base du calcul différentiel et intégral stochastique.

Mots clés : Mouvement brownien, équation différentielle stochastique d'ordre fractionnaire, théorème de point fixe de Banach, semi groupe, processus stochastique, processus d'Itô, solution milde, stabilité

Abstract

In the present work we have described the different definitions and properties of the fractional derivative, the definition and the conditions of the existence and stability of the stochastic fractional differential equations. As an application, we have given a study on the existence, unicity and asymptotic stability of a nonlinear stochastic fractional differential equation with infinite delay in a Hilbert space, using the semigroup theory and the Banach fixed-point theorem. In fact, in this work we have developed the work of Sakthivel et al. (2012). We also gave the basic definitions and notions of the fractional calculation, the most widely used fractional derivative definitions such as the Grunwald-letnikov, Riemann-Liouville definition, and the derivative in the sense of Caputo. We give some notions of probabilities and stochastic processes. We have introduced the terms and concepts essential for the definition of the Brownian motion and the family of Ito processes which have allowed to establish several practical formulas which form the basis of differential calculus and stochastic integral.

Keywords : Brownian motion, fractional order stochastic differential equation, Banach fixed point theorem, semigroup, stochastic processes, Ito processes, mild solutions, stability.

Table des matières

Notations

$\Gamma(z)$	la fonction Gamma.
$\beta(z,w)$	la fonction Béta.
E_{α}	la fonction Mittage-Leffler un seule paramètre.
$E_{\alpha,\beta}$	la fonction Mittage-Leffler deux paramètre.
L	la transformée de laplace.
L^{-1}	l'inversion de transformation de laplace.
$\mathcal{S}$	semi-groupe.
$\mathcal{A}$	le générateur infinitisimal du semi-groupe $\mathcal{S}(t)$.
${}^{G}D_{a}^{\alpha}$	la dérivée fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov.
$I_{a^{+}}^{\alpha}f$	intégrale fractionnaire(à gauche) de Riemmann-Liouville de f d'ordre α.
$I_{a^{-}}^{\alpha}f$	intégrale fractionnaire(à droite) de Riemmann-Liouville de f d'ordre α.
D_{a}^{α}	la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.
${}^{c}D_{a}^{\alpha}$	la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α.
$v.a$	variable aleatoire.
f_X	densité de probabilité.
F^X	La filtration naturelle.
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturel.
$p.s$	presque sûrement.
$\mathbb{N}^{*}$	ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	ensemble des réels.
$\mathbb{R}_{+}$	ensemble des réels positifs $[0,+\infty[$.

$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes.
Ω	espace fondamental d'une expérience aléatoire.
$\mathcal{F}$	tribu.
$\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$	la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{P}$	mesure de probabilité.
$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$	espace de probabilité.
X	variable aléatoire .
F_X	fonction de répartition de la variable X.
$\mathbb{E}(X)$	espérance mathématique de la variable X.
$\sigma(X)$	tribu engendre par la variable X.
I	l'opérateur identité.
$M.B$	mouvement brownien.
$\mathcal{C}([-\tau,\mathbb{R}^n])$	espace des variables aliatoires continu sur $[-\tau,\mathbb{R}^n]$.
$L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T,0];\mathbb{R}^n)$	espace des variables aliatoires X, $\mathcal{F}_{t_0}$-mesurables, appartient à $\mathcal{C}([-\tau,\mathbb{R}^n])$ et $\mathbb{E}(\|X\|^2) < \infty$.

Introduction

La théorie du calcul fractionnaire est un sujet aussi vieux que le calcul classique tel que nous le connaissons aujoud'hui. Ses origines remontent à la fin du 17^{eme} siècle, l'époque où Newton, Gauss et Leibniz ont développé les fondements de ce type de calcul (voir [22, 34]). En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour n^{eme} dérivée d'ordre entier d'une fonction f. Mais ce n'est que lors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu un plus large intérêt, (voir [50]). L'histoire de la dérivée d'ordre non entier a commencé á la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question á Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ lorsque $(n = \frac{1}{2})$. Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et a écrit á L'Hospital : "...cela conduirait á un paradoxe á partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". la première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû á Liouville. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparition comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo [43, 60]. Actuellement dans la littérature mathématique, les études sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles d'ordre fractionnaires sont très abondantes, entre autres les travaux citer ci-dessous. H. Ye, Y. Ding et T. Gao ont établis dans [66] des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution positive de l'équation différentielle fractionnaire á retard suivante

$$\begin{cases} D^{\alpha}[x(t)-x(0)] = x(t)f(t,xt); 0 \leq t \leq T \\ x(t) = \phi(t) \quad t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

L. Lin, X. Liu et H. Fang ont montrés dans [45] l'existence et l'unicité des solutions pour le problème á valeurs aux limites de l'équation différentielle fractionnaire au sens de Caputo suivante

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}u(t) - Mu(t) = f(t,u(t)); 0 \leq t \leq T, 0 < \alpha < 1 \\ u(0) = ru(t) \end{cases}$$

Le calcul fractionnaire a un champ d'applications très vaste, (voir [17, 26]), par exemples : viscoélasticité, théorie du contrôle, équation de diffusion, électricité, électromagnétique, biologie.

Les théories de l'intégrale stochastique et des équations différentielles stochastiques ont été, initialement, développées par Kiyosi Itô vers 1940 (un des premiers articles importants a été publié en 1942). Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire, qui sert de modèle caractérisant les phénomènes variables dans le temps. La présence des perturbations aléatoires dans ces équations a été générée par l'introduction d'un mouvement brownien non différentiable.

Les équations différentielles stochastiques ont été largement appliquées en sciences, en géométrie, en biologie et en presque toutes les sciences appliquées. Dans la littérature actuelle, il existe de nombreux articles sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques (voir [6, 25, 15, 14]). Plus récemment, Chang et al. [13] ont étudiés l'existence des solutions milde automorphes du presque moyennes carrées pour équation différentielle stochastique non autonome en Hilbert on utilisant la théorie du semi-groupe et l'approche de point fixe, El-Borai et al. [19] ont étudiés l'existence unique, et la continuité de la solution d'une équation intégrale fractionnaire stochastique, l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques abstraites d'ordre fractionnaire avec retard pilotée par des mouvements browniens ont été étudiés dans [20]. K. Mourad aétudié l'existence, l'unicité de solution milde d'une équation différentielle stochastique d'ordre fractionnaire dans l' espace de Hilbert

$$\left\{ {}^{c}D^{\alpha}x(t)[Ex(t) - h(t,x(t))] = \mathcal{A}x(t) + \sigma(t,x(t))\frac{dW(t)}{dt}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

En particulier la stabilité des équations différentielles stochastiques à été étudiée par plusieurs auteurs [16, 21, 12, 61, 58, 57, 56, 69], Ahmed [4] a dérivant un ensemble des conditions suffisantes pour contrôle d' équation différentiel d'ordre fractionnaire stochastique avec retard, Il est utilisé la théorème de point fixe de Banach et la théorème du semi-groupe. En outre, la théorie des équations différentielles stochastiques neutres est à la fois théorique et des intérêts pratiques. Pour une grande classe de réseaux électrique que contenant des lignes de transmission sans perte, la description des équations peuvent être réduite à des équations différentielles neutres.

Sakthivel et al. [59] ont étudiés l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique d'une équation différentielle stochastique neutre d'ordre fractionnaire avec retard infini dans un espace de Hilbert, en utilisant la théorie des semi-gropues, le théorème de point fixe de Banach, des conditions suffisantes sont déterminées pour établir les résultats d'existence.

Dans le présent travail, nous avons exposé les différentes définitions et propriétés de la dérivée d'ordre fractionnaire, les définitions et les conditions d'existence et de stabilité de solution des équations différentielles stochastiques. Comme application, nous avons donnés une étude sur l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique d'une équation différentielle stochastique neutre d'ordre fractionnaire avec retard infini dans un espace de Hilbert. En fait, dans ce travail nous avons développer le travail de Sakthivel et al. [59].

Ce travail est réparti en cinq chapitres, organisé comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire, nous citons par exemple la fonction Gamma, la fonction Bêta, la fonction Mittag - Leffler et la transformée de Laplace, et d'autre notions et théorèmes dont on aura besoin dans la suite de notre travail comme la notation sur les semi-groupes et les théorèmes de point fixe.

Le deuxième chapitre est dédié aux définitions de la dérivée d'ordre fractionnaire les plus utilisées telles que la définition de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, ainsi que la dérivée au sens de Caputo.

Dans le troisième chapitre, on donne quelques notions de probabilités et de processus stochastiques comme le processus de guassien. Il introduit les termes et concepts essentiels pour la définition du mouvement Brownien et processus d'Itô et les intégrales stochastiques.

Dans le quatrème chapitre, on donnera une théorème d'existence et d'unicité pour la solution d'une équation différentielle stochastique, d'une équation différentielle stochastique neutre et la définition d'une équation différentielle stochastique avec retard et les différentes notions de stabilités des équation différentielle stochastique.

Enfin, Dans le cinquième chapitre nous étudions l'existence, l'unicité et la stabélité asymptotique au p^{em}moment d'une équation différentielle stochastique d'ordre fractionnaire neutre avec retard infini non linéaire.

Chapitre 1

Outils de base

1.1 Fonctions spécifiques

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma, Béta et fonction Mittag - Leffler. Ces trois fonctions jouent un rôle trés important dans la théorie du calcul fractionnaire et ces application.

1.1.1 Fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexes à partie réelle positive).

Définition 1.1. [35]
Pour $z \in \mathbb{C}$, telle que $Re(z) > 0$ la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Proposition 1.1.
Pour tout $Re(z) > 0$ on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Preuve

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t}dt \\ &= [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

Proposition 1.2. *[53]*

Pour tout $Re(z) > 0$ on a

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Proposition 1.3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Preuve D'après la proposition 1.1 on a par récurence

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\cdot\Gamma(n) \\ &= n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1) \\ &= n\cdot(n-1)\dots 2\Gamma(1) \\ &= n!\end{aligned}$$

Proposition 1.4. *[2]*

Pour $z = \frac{1}{2}$ on a

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Proposition 1.5. *[67]*

Pour $z = n + \frac{1}{2}$ on a,

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

Proposition 1.6. *[67]*

Par le principe de prolongement analytique on peut prolonge la fonction sur $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^-$ Soit $z > 0$, $z \notin \mathbb{N}$ on a

$$(-1)^j\binom{z}{j} = \frac{\Gamma(-z+j)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-z)}$$

1.1.2 Fonction Béta

Définition 1.2. [41]

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 0$, $w \in \mathbb{C}$ et $Re(w) > 0$, la fonction Béta $\beta(z, w)$ est définie par :

$$\beta(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau \tag{1.1}$$

Proposition 1.7.

La fonction Béta est liée à La fonction Gamma par la relation suivante

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{z-1}e^{-t_1}t_2^{w-1}e^{-t_2}dt_1dt_2 \\
&= \int_0^\infty t_1^{z-1}(\int_0^\infty e^{-(t_1+t_2)}t_2^{w-1}dt_2)dt_1
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t_2^{'} = t_1 + t_2$, on trouve

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^\infty t_1^{z-1}\int_{t_1}^\infty (t_2^{'}-t_1)^{w-1}e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}dt_1 \\
&= \int_{t_1}^\infty e^{-t_2^{'}}\int_0^\infty (t_2^{'}-t_1)^{w-1}t_1^{z-1}dt_1dt_2^{'}
\end{aligned}$$

Si on pose $t_1^{'} = \frac{t_1}{t_2^{'}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^\infty e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}\int_0^1 (t_2^{'}-t_1^{'}t_2^{'})^{w-1}(t_1^{'}t_2^{'})^{z-1}t_2^{'}dt_1^{'} \\
&= \int_0^\infty e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}\int_0^1 (t_2^{'}(1-t_1^{'}))^{w-1}(t_1^{'}t_2^{'})^{z-1}t_2^{'}dt_1^{'} \\
&= \int_0^\infty e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}\left((t_2^{'})^{w-1}(t_2^{'})^{z-1}t_2^{'}\int_0^1 (1-t_1^{'})^{w-1}(t_1^{'})^{z-1}dt_1^{'}\right) \\
&= \int_0^\infty e^{-t_2^{'}}dt_2^{'}((t_2^{'})^{z+w-1}\beta(z,w)) \\
&= \int_0^\infty e^{-t_2^{'}}(t_2^{'})^{z+w-1}dt_2^{'}\beta(z,w) \\
&= \Gamma(z+w)\beta(z,w)
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré. □

1.1.3 Fonction Mittag - Leffler

La fonction exponentielle e^z joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler [27, 28] et désignée par la fonction suivante :

Définition 1.3. [23, 24]
Pour $z \in \mathbb{C}$ et α est un nombre réelle stréctement positive, on définie la fonction Mittag - Leffler $E_\alpha(z)$ par le dévleppement en série suivant :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la fonction Mittag-Leffler généralisée $E_{\alpha,\beta}(z)$ peut être définie par deux paramétre α et β comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \qquad \alpha > 0, \beta > 0$$

Exemple 1.1. [51]

1.

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1)$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}(e^z - z - 1)$$

On générale

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}\right\}$$

2.

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{sinh(z)}{z}$$

Remarque 1.1. [53]
Pour tout $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z)$$

1.2 Transformée de Laplace

Définition 1.4. [1]
Soit la fonction f est d'ordre exponentiel (c'est à dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$) alors la fonction F de la variable complexe s définie par :

$$F(s) = L\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f.

Définition 1.5. [67]
L'inversion de transformation de Laplace s'effectue par le moyen d'une intégrale dans le plan complexe, pout t positive,

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} e^{st} F(s)ds$$

Où γ est choisi pour que l'intégrale soit convergente, ce qui implique que γ soit supérieur à la partie réelle de singularité de $F(s)$.

Proposition 1.8. *[67]*
Soit f, g deux fonctions sont d'ordre exponentiel. La transformée de Laplace est vérifiée les propritées suivants :

- *Linéairité : pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *on a :*

$$L\{\alpha f + \beta g\} = \alpha L\{f\} + \beta L\{g\}$$

- *Dérivation : La transformée de Laplace d'une dérivée d'ordre entier est :*

$$\begin{aligned} L\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= s^n L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n L\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

- *Intégration :*

$$\begin{aligned} L\left\{\int_a^t f(u)du\right\} &= \frac{1}{s} L\{f\} \\ &+ \frac{1}{s}\int_a^0 f(u)du \end{aligned}$$

- *Convolution :*

$$L\{f * g\} = L\{f\} \times L\{g\}$$

- *La transformation de Laplace de la fonction* $t^{\alpha-1}$ *est :*

$$L\left\{t^{\alpha-1}\right\}(s) = \Gamma(s)s^{-\alpha}$$

1.3 Quelques théorèmes de point fixe

Nous allons donner quelques théorèmes de point fixe utilisés pour démontrer l'existence des solutions d'équations différentielles.

Théorème 1.9. *(Banach)[10]*
Soient E *un espace métrique complet et* $\Psi : E \to E$ *un opérateur contractant, alors* Ψ *admet un point fixe unique. i.e :*

$$\exists! u \in E \quad \text{tel que } \Psi u = u$$

Théorème 1.10. *(Schauder)[68]*
Soient (E, d) *un espace métrique complet,* U *une partie convexe et fermé de* E *et* $\Psi : U \to U$ *une application telle que l'ensemble* $\{\Psi u : u \in U\}$ *est relativement compacte dans* E*. Alors* Ψ *possède au moins un point fixe.*

Théorème 1.11. *(Schaefer)[29, 30]*
Soient E un espace de Banach et $\Psi : E \to E$ un opérateur complètement continue, si l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in E : \; \Psi u = \lambda u, pour\ un\ certain\, \lambda \in]0,1[\}$$

est borné, alors Ψ possède au moins un point fixe.

Théorème 1.12. *(Ascoli-Arzelà)[10] Soit K un espace métrique compact et soit k un sous ensemble borné de $\mathcal{C}(K)$.*
On suppose que k est uniformément équicontinue i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon \quad pour\ tous\ f \in k$$

Alors k est relativement compacte dans $C(K)$

Théorème 1.13. *(Krasnoselskii-Burton)[36]*
Soit M sous-ensemble non vide d'un espace de Banach E, borné, fermé et convexe .On Suppose deux applictions que $A : M \to M$ et $B : M \to M$ telle que :

(i) $Ax + By \in M$ *pour tout* $x, y \in M$.

(ii) *A est continue et AM est contenu dans un sous-ensemble compact de M.*

(iii) *B est une contraction.*

Alors, il existe $z \in M$ telle que $z = Az + Bz$

Dans ce mémoire nous allons utilisé le théorèmes de point fixe de Banach.

1.4 Rappels de semi-groupe

Définition 1.6. [55]
Soit E un espace de Banach, une famille $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur E est appelé semi-groupe fortement continu si elle satisfait :

i) $\mathcal{S}(0) = I$.

ii) $\mathcal{S}(t+s) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s) \quad \forall\, t, s \geq 0$.

iii)

$$\lim_{t \to 0^+} \mathcal{S}(t)x = x \quad \forall\, x \in E$$

Définition 1.7. [55]

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est dit uniformément continu si :

$$\lim_{t \to 0^+} \parallel \mathcal{S}(t) - I \parallel_{\mathcal{L}(E)} = 0$$

Définition 1.8. [47]

On appelle le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{\mathcal{S}(t)\}_{t \geq 0}$, un opérateur $\mathcal{A}$ défini sur l'ensemble.

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in E, \quad \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t} \quad \text{existe} \right\}$$

par :

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t} \qquad\qquad \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

Définition 1.9. [46]

Nous designerons par Δ l'ensemble : $\{t \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\, t > 0 \quad et \quad \Phi_1 < \arg t < \Phi_2, \quad \Phi_1 < 0 < \Phi_2\}$, on appelle semi-groupe fortement continus analytique une famille $\{\mathcal{S}(t)\}_{t \in \triangle}$ tel que $\{\mathcal{S}(t)\}_{t \in \Delta}$ verifiant les proprietes suivantes :

1) $\mathcal{S}(0) = I$.
2) $\mathcal{S}(t_1 + t_2) = \mathcal{S}(t_1)\mathcal{S}(t_2) \quad t_1, t_2 \in \Delta$.
3) $\lim_{t \to 0} \mathcal{S}(t)x - x = 0 \quad , x \in E \quad t \in \Delta$
4) L'application : $\Delta \ni t \to \mathcal{S}(t) \in B(E)$, est analytique dans le secteur Δ.

Chapitre 2

Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse dont l'étude se rapporte aux opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier. Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans ce chapitre, les définitions de Riemann-Liouville, Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

2.1 Dérivation fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies. Nous reprenons ici la présentation de [18].

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Pour $h > 0$, notons τ_h l'opérateur de translation à gauche :

$$\tau_h f(t) = f(t-h)$$

On a ainsi

$$f^{'}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(t) - f(t-h)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(id - \tau_h)f(t)$$

En notant $\tau_h^2 = \tau_h \circ \tau_h$, on a : $\tau_h^2 f(t) = f(t-2h)$.

Concernant la dérivée seconde

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h\to 0}(\frac{1}{h}(id-\tau_h))^2 f(t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(id-2\tau_h-\tau_h^2)f(t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}(f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)) \end{aligned}$$

Plus généralement, la dérivée n^{ime} de f est donnée par

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}(id-\tau_h)^n f(t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} id^{n-k}(-\tau_h)^k f(t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} f(t-kh) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Il est possible d'étendre à $k > n$, en posant $\binom{n}{k} = 0$. La formule (2.1) devient alors

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k} f(t-kh)$$

La généralisation de cette formule grâce à la fonction Gamma, pour α non entier (avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$) en posant pour $\alpha \in \mathbb{R}^+/\mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, Notons que $\binom{\alpha}{k} = 0$ même si $k > \alpha$

$${}^G D_a^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k} f(t-kh)$$

D'après la proposition 1.6, on a

$$(-1)^k\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}$$

Nous donne :

$${}^G D_a^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh)$$

et

$$\begin{aligned} {}^{G}D_a^{-\alpha}f(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{-\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)}f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Si f est de classe C^n alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$${}^{G}D_a^{-\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n+\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau$$

Et aussi :

$${}^{G}D_a^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)d\tau$$

Exemple 2.1. La dérivée de $f(t) = (t-a)^p$ au sens de Grunwald-Letnikov.
Soit p non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $p > n-1$ alors on a : $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ et $f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(\tau-a)^{p-n}$ d'où

$${}^{G}D_a^{\alpha}(t-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{p-n}d\tau$$

On prent $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned} {}^{G}D_a^{\alpha}(t-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha+1}s^{p-n}ds \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\beta(n-\alpha, p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

Remarque 2.1.
La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

Si $f(t) = C$ et α non entier on a : $f^{(k)}(t) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
{}^{G}D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}}_{0} \\
&+ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{n}(\tau) d\tau}_{0} \\
&= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

2.1.0.1 Composition avec les dérivées d'ordre entier

Proposition 2.1. *[41]*

Pour m entier positif et α non entier on a :

$$\frac{d^m}{dt^m}({}^{G}D_a^{\alpha} f(t)) = {}^{G} D_a^{m+\alpha} f(t)$$

Et

$${}^{G}D_a^{\alpha}(\frac{d^m}{dt^m}(f(t))) = {}^{G} D_a^{m+\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-m}}{\Gamma(k-\alpha-m+1)}$$

Preuve

Pour m entier positif et α non entier avec $(n-1 < \alpha < n)$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m}({}^{G}D_a^{\alpha} f(t)) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(\alpha+m)}}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))} \\
&\quad \times \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1} f^{n+m} \tau d\tau
\end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{d^m}{dt^m}({}^{G}D_a^{\alpha} f(t)) = {}^{G} D_a^{m+\alpha} f(t) \qquad \square$$

Mais :

$$\begin{aligned}
{}^{G}D_a^{\alpha}\left(\frac{d^m}{dt^m}f(t)\right) &= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(m+k)}(a)(t-a)^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-p))}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{n+m}(\tau)d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{n+m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(\alpha+m)}}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(n+m-(p+m))}\int_a^t (t-\tau)^{n+m-(p+m)-1}f^{n+m}(\tau)d\tau \\
&\quad -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-(\alpha+m)}}{\Gamma(k-(\alpha+m)+1)} \\
&= {}^{G}D_a^{m+\alpha}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-m}}{\Gamma(k-\alpha-m+1)}
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.

On déduit alors que la différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si :$f^{(k)}(a)=0$ pour tout $k=0,1,2,\dots,m-1$.

2.1.0.2 Composition avec les dérivées fractionnaires

Proposition 2.2.

1- Si $\alpha^{'}<0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors :

$${}^{G}D_a^{\alpha}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t))) = {}^{G}D_a^{\alpha+\alpha^{'}}f(t)$$

2- Si $0\leq m-1<\alpha^{'}<m$ et $\alpha<0$ alors :

$${}^{G}D_a^{\alpha}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t))) = {}^{G}D_a^{\alpha+\alpha^{'}}f(t)$$

Seulement si $f^{(k)}(a)=0$ pour tout $k=0,1,2,\dots,m-2$

3- Si $0\leq m-1<\alpha^{'}<m$ et $0\leq n-1<\alpha<n$ alors :

$$\begin{aligned}
{}^{G}D_a^{\alpha}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t))) &= {}^{G}D_a^{\alpha^{'}}({}^{G}D_a^{\alpha}(f(t))) \\
&= {}^{G}D_a^{\alpha+\alpha^{'}}f(t)
\end{aligned}$$

Seulement si $f^{(k)}(a)=0$ pour tout $k=0,1,2,\dots,r-2$ avec $r=max(m,n)$

Preuve 1- Si $\alpha^{'} < 0$ et $\alpha < 0$ alors :

$$\begin{aligned}
{}^{G}D_a^{\alpha}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t))) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(\tau)))d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\alpha^{'})}\int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1}d\tau\int_a^t (\tau-s)^{-\alpha^{'}-1}f(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\alpha^{'})}\int_a^t f(s)ds\int_a^t (\tau-s)^{-\alpha^{'}-1}(t-\tau)^{-\alpha-1}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-(\alpha+\alpha^{'}))}\int_a^t (t-s)^{-\alpha-\alpha^{'}-1}f(s)ds \\
&= {}^{G}D_a^{\alpha+\alpha^{'}}f(t)
\end{aligned}$$

Si $\alpha^{'} < 0$ et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ on a $\alpha = n + (\alpha - n)$ avec $(\alpha - n) < 0$ alors :

$$\begin{aligned}
{}^{G}D_a^{\alpha}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t))) &= \frac{d^n}{dt^n}\left\{{}^{G}D_a^{\alpha-n}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t)))\right\} \\
&= \frac{d^n}{dt^n}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}+\alpha-n}(f(t))) \\
&= {}^{G}D_a^{\alpha+\alpha^{'}}f(t)
\end{aligned}$$

2- Pour $0 \leq m-1 < \alpha^{'} < m$ et $\alpha < 0$ on a :

$$ {}^{G}D_a^{\alpha^{'}}f(t) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha^{'}}}{\Gamma(k-\alpha^{'}+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha^{'})}\int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha^{'}-1}f(m)(t)d\tau $$

et $(t-a)^{k-\alpha^{'}}$ ont des singularités non-integrables donc ${}^{G}D_a^{\alpha}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t)))$ n'existe que si $f_{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, m-2$ et dans ce cas on a :

$$ {}^{G}D_a^{\alpha^{'}}f(t) = \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-1-\alpha^{'}}}{\Gamma(m-\alpha^{'})} + {}^{G}D_a^{\alpha^{'}-m}f^{m}(t) $$

Alors :

$$\begin{aligned}
{}^{G}D_a^{\alpha}({}^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t))) &= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-1-\alpha^{'}-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha^{'}-\alpha)} + {}^{G}D_a^{\alpha+\alpha^{'}-m}f^{m}(t) \\
&= \frac{f^{(m-1)}(a)(t-a)^{m-1-(\alpha^{'}+\alpha)}}{\Gamma(m-\alpha^{'}-\alpha)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(m-(\alpha^{'}+\alpha))}\frac{1}{\Gamma(m-\alpha^{'})}\int_a^t (t-\tau)^{m-(\alpha+\alpha^{'})-1}f(m)(t)d\tau \\
&= {}^{G}D_a^{\alpha+\alpha^{'}}f(t)
\end{aligned}$$

3- Pour $0 \leq m-1 < \alpha^{'} < m$ et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ on a :

$$^{G}D_a^{\alpha}(^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t))) = \frac{d^n}{dt^n}\left\{^{G}D_a^{\alpha-n}(^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t)))\right\}$$

Si $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, m-2$ alors :

$$^{G}D_a^{\alpha-n}(^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t))) =^{G} D_a^{\alpha+\alpha^{'}-n} f(t) \qquad \square$$

Par suite :

$$\begin{aligned} ^{G}D_a^{\alpha}(^{G}D_a^{\alpha^{'}}(f(t))) &= \frac{d^n}{dt^t} {}^{G}D_a^{\alpha+\alpha^{'}-n} f(t) \\ &= {}^{G}D_a^{\alpha+\alpha^{'}} f(t) \end{aligned}$$

2.1.0.3 Transformée de Laplace de dérivation fractionnaire au sens de Grunwald-Letnikov

Soit f une fonction qui possède la transformée de Laplace $F(s)$. Pour $0 \leq \alpha < 1$ on a :

$$^{G}D_0^{\alpha} f(t) = \frac{f(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f^{'}(\tau) d\tau$$

alors :

$$\begin{aligned} L\left[^{G}D_0^{\alpha} f(t)\right](s) &= \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \frac{1}{s^{1-\alpha}}\left[sF(s) - f(0)\right] \\ &= s^{\alpha} F(s) \end{aligned}$$

Pour $\alpha \geq 1$ il n'existe pas de transformée de Laplace dans le sens classique mais dans le sens des distributions on a aussi :

$$L\left[^{G}D_0^{\alpha} f(t)\right](s) = s^{\alpha} F(s)$$

2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Cette section sera consacrée aux défintions élémentaires pour les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et quelques propriétés de ces notions.

Soit f une fonction réelle continue et intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale :

$$I^1 f(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} I^2 f(t) &= \int_a^t I^1 f(u) du \\ &= \int_a^t (\int_a^u f(s) ds) du \\ &= \int_a^t (\int_s^t du) f(s) ds \\ &= \int_a^t (t-s) f(s) ds \end{aligned}$$

En répétant n fois on obtient d'après la formule de Cauchy

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds \tag{2.2}$$

Et de puis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$. Riemann rendu compte que le second membre de paurait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entiere, il a définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 2.1. [67]

Soit $f \in C[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on appelle intégrale fractionnaire(à gauche) de Riemmann Liouville de f d'ordre α, et on la note $I^\alpha_{a^+} f$ la fonction définie par :

$$I^\alpha_{a^+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

Et on appelle intégrale fractionnaire(à droite) de Riemmann Liouville de f d'ordre α, et on la note $I^\alpha_{b^-} f$ la fonction définie par :

$$I^\alpha_{b^-} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

Remarque 2.3.

Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche)et not I^α_a.

Exemple 2.2. Soit $f(t) = t^\beta$ avec $\beta > -1$ On a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= I_a^\alpha t^\beta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t s^\beta (t-s)^{\alpha-1} ds \end{aligned} \tag{2.3}$$

En posant $s = tu$, (2.3) devient

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (tu)^\beta (1-tu)^{\alpha-1} t du$$

En utilisant la définition de fonction Béta 1.2 puis de proposition 1.7 on arrive à :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} t du \\ &= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \end{aligned}$$

Proposition 2.3. *[7]*
Si f une fonction intégrable et bornée, et α et α' deux nombres réels stréctement positifs. Alors

$$I_a^\alpha [I_a^{\alpha'} f(t)] = I_a^{\alpha+\alpha'} f(t)$$

Preuve

$$\begin{aligned} I_a^\alpha [I_a^{\alpha'} f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha'-1} I_a^\alpha f(t-s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')} \int_0^{t-a} s^{\alpha'-1} ds \int_a^{t-s} (t-s-u)^{\alpha-1} f(u) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')} \int_a^t f(u) du \int_a^{t-u} t^{\alpha'-1} (t-u-s)^{\alpha-1} ds \end{aligned}$$

Posons $\quad s = v(t-u)$

Alors $\quad ds = (t-u)dv$

Par suite, il résulte que

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}\int_a^t f(u)du\int_0^1 (v(t-u))^{\alpha'-1}(t-u-v(t-u))^{\alpha-1}(t-u)dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\alpha'-1}f(u)du\int_0^1 v^{\alpha'-1}(1-v)^{\alpha-1}dv \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha')}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\alpha'-1}f(u)du\beta(\alpha',\alpha) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\alpha')}\int_a^t (t-u)^{\alpha+\alpha'-1}f(u)du \\
&= I_a^{(\alpha+\alpha')}f(t)
\end{aligned}$$

Proposition 2.4.
Soient f, g deux fonction continue et intégrable sur $[a,b]$, I_a^α est linèaire cet-à-dire :

$$\forall\gamma,\lambda\in\mathbb{R}\quad \alpha>0\qquad on\ a\qquad I_a^\alpha[\lambda f(t)+\gamma g(t)] = \lambda I_a^\alpha f(t)+\gamma I_a^\alpha g(t)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha[\lambda f(t)+\gamma g(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}[\lambda f(s)+\gamma g(s)]ds \\
&= \lambda\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds+\gamma\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds \\
&= \lambda I_a^\alpha f(t)+\gamma I_a^\alpha g(t)
\end{aligned}$$

Proposition 2.5. *[67]*
La transformé de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour $a=0$ d'une fonction f qui possède la transformé de Laplace $F(s)$ dans le demi plan $Re(s)>0$ est :

$$L(I^\alpha f)(s) = s^{-\alpha}F(s)$$

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2. [32]
Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ alors la dérivée fractionnaire d'ordre α (avec

$n-1<\alpha<n$, $n \in \mathbb{N}^*$) au sens de Riemann-Liouville $D_a^\alpha f$ est définie par :

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds$$

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi se écrire comme suit :

$$D_a^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I_a^{n-\alpha} f(t) \right\} \tag{2.4}$$

Exemple 2.3. La dérivée de $f(t) = (t-a)^p$ au sens de Riemann-Liouville. Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $p > -1$ alors on a :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= D_a^\alpha (t-a)^p \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{dt}{dt^n} \int_a^t \frac{(\tau-a)^p}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \end{aligned}$$

En changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (t-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{dt^n}{dt^n} (t-a)^{n+p-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-n+1} s^p ds \\ &= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)\beta(n-\alpha, p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+p-\alpha+1)\beta(n-\alpha, p+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n+p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{p-\alpha} \end{aligned}$$

Proposition 2.6. *[42]*
Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a :

$$D_a^0 f(t) = f(t),\ D_a^2 f(t) = f^{(2)},\ \ldots,\ D_a^n f(t) = f^{(n)}(t)$$

Remarque 2.4. [54]
La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante mais on a :

$$D_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}$$

On note $\frac{d^n}{dt^n}$ par D^n.

2.3.0.4 Composition avec l'intégrale fractionnaire

Proposition 2.7. *[42, 62]*
Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$ alors pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$D_a^\alpha f(t) = D_a^m (I^{m-\alpha} f(t), \quad m > \alpha$$

Preuve Comme $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} D_a^m I^{m-\alpha} f(t) &= D^n D^{m-n} I^{m-n} I^{n-\alpha} f(t) \\ &= D^n I^{n-\alpha} f(t) \\ &= D_a^\alpha f(t) \end{aligned}$$

Lemme 2.8.
Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a, b]$, alors l'égalité :

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) = f(t) \tag{2.5}$$

est vraie pour presque tout $t \in [a, b]$

Preuve En utilisant la définition on a :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha I_a^\alpha f(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} I_a^\alpha f(t) \\ &= D^n I_a^n f(t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Théorème 2.9.
Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n - 1 \leq \alpha < n$, $m - 1 \leq \alpha < m$ tel que $(n, m \in \mathbb{N})$ alors :

(1) Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a, b]$ l'égalité :

$$D_a^\beta (I^\alpha f)(t) = I^{\alpha-\beta} f(t)$$

est presque partout sur $[a, b]$.

(2) S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a,b]$ tel que $f = I_a^\alpha \varphi$ alors :

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(t) = f(t)$$

pour presque tout $x \in [a,b]$.

(3) Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors :

$$D_a^\beta (I_a^\alpha f)(t) = D_a^{\beta-\alpha} f(t)$$

Preuve .En utilisant la définition 2.2 et la proposition 2.3 on obtient :

(1) Pour $\alpha > \beta > 0$, alors pour tout $n \geq m$, on a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta (I_a^\alpha) f(t) &= D^n I^{n-\beta} (I^\alpha) f(t) \\ &= D^n (I_a^{n+\alpha-\beta}) f(t) \\ &= D^n (I_a^n (I_a^{\alpha-\beta}) f(t) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(t) \end{aligned}$$

presque pour tout $t \in [a,b]$

(2) Par la relation 2.5, on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha D_a^\alpha f(t) &= I_a^\alpha (D_a^\alpha I_a^\alpha \varphi(t)) \\ &= I_a^\alpha \varphi(t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

(3) on a :

$$\begin{aligned} D_a^\beta (I_a^\alpha) f(t) &= D_a^m I_a^{m-\beta} I_a^\alpha f(t) \\ &= D^m I^{m-(\beta-\alpha)} f(t) \\ &= D_a^{\beta-\alpha} f(t) \end{aligned}$$

Existe pour $i - 1 \leq \beta - \alpha < i$ et $i \leq m$ □

2.3.0.5 Composition avec les dérivées d'ordre entier

Théorème 2.10.

Soient $\alpha, \beta > 0$ *et* $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \alpha < m$ *tel que* $(n, m \in \mathbb{N})$ *alors : Pour* $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. *Si les dérivées fractionnaires* $D_a^\alpha f$ *et* $D_a^{k+\alpha} f$ *existes, alors :*

$$D^k(D_a^\alpha f(t)) = D_a^{k+\alpha} f(t)$$

Preuve On a :

$$\begin{aligned}
D^k[D_a^\alpha f(t)] &= D^k D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\
&= D^{k+n} I_a^{k+n-\alpha+k-k} f(t) \\
&= D^{k+n} I_a^{k+n-(\alpha+k)} f(t) \\
&= D_a^{k+\alpha} f(x)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 2.11. *[54]*

Pour $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Si les dérivées fractionnaires* $D_a^{n+\alpha} f$ *et* $D^k f$, *pour tout* $1 \leq k \leq n-1$ *existes, alors*

$$D_a^\alpha(D^n f(t)) = (D_a^{n+\alpha} f(t)) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}$$

Remarque 2.5.

La différentiation fractionnaire et la différentiation conventionnelle ne commutent que si : $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

2.3.0.6 Composition avec les dérivées fractionnaires

Proposition 2.12. *[54]*

Pour tout $n-1 \leq \alpha < n$ *et* $m-1 \leq \beta < m$ *on a :*

$$D_a^\alpha(D_a^\beta f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [D_a^{\beta-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)}$$

Proposition 2.13. *[54]*
Pour tout $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$ on a :

$$D_a^{\beta}(D_a^{\alpha} f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=1}^{n} [D_a^{\alpha-k} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)}$$

Remarque 2.6. Les deux opérateurs de dérivations fractionnaires D_a^{α} et D_a^{β} ne commutent que si $\alpha = \beta$ et $[D_a^{\beta-k} f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, m$ et $[D_a^{\alpha-k} f(t)]_{t=a}$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$

2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans la modélisation mathématique l'utilisation des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = a$. Une certaine solution de ce problème a été proposée par M. Caputo.

Dans cette secction on donne une défnition et quelques propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo.

Définition 2.3. [32]
Pour tout α un nombre réel stréctement positive, la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^{c}D_a^{\alpha} f$ d'ordre α sur $[a, b]$, est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{c}D_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds \\ &= I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

Exemple 2.4. La dérivée de $f(t) = (t-a)^p$ au sens de Caputo .
Soit α non entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $p > -1$ alors on a :

$$\begin{aligned} {}^{c}D_a^{\alpha} f(t) &= {}^{c}D_a^{\alpha} (t-a)^p \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)} \int_a^t (\tau-a)^{p-n} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \end{aligned}$$

On prend $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned}
{}^cD_a^\alpha(t-a)^p &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{p-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\beta(n-\alpha,p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}(t-a)^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}(t-a)^{p-\alpha}
\end{aligned}$$

2.4.0.7 Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Théorème 2.14. *[54, 67]*
Soit $\alpha > 0$, et f est une fonction continue sur $[a, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$I_a^\alpha({}^cD_a^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

Théorème 2.15. *[49]*
Soit $\alpha > 0$ et f est une fonction continue sur $[a, +\infty)$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$${}^cD_a^\alpha(I_a^\alpha f)(t) = f(t)$$

Remarque 2.7.
Alors l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse droite.

Remarque 2.8. Le résultat du théorème 2.14 signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f.

Théorème 2.16. *[42]*
Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a :

$${}^cD_a^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$$

c'est à dire :

$${}^cD_a^0 f(t) = f(t),\ {}^cD_a^2 f(t) = f^{(2)},\ \ldots,\ {}^cD_a^n f(t) = f^{(n)}(t)$$

2.5 Relation entre la dérivée fractionnaire au sens Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.17. *[51, 67]*
Soient $\alpha \geq 0$(avec $m-1 \leq \alpha < n$ et $m \in \mathbb{N}^*$) si f posséde $m-1$ dérivées en a et si ${}^cD_a^\alpha f$ et $D_a^\alpha f$ existe, alors : Pour presque tout $t \in [a, +\infty)$:

$$ {}^cD_a^\alpha f(t) = D_a^\alpha f(t) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a)$$

Preuve On a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-s)^\alpha f'(s)ds \\ &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + I_a^{\alpha+1} f'(t) \end{aligned}$$

$$I_a^\alpha f(t) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(t-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + I_a^{\alpha+n} f^n(t)$$

On pose $n = m$ et $\alpha = m - \alpha$ on trouve :

$$I_a^{m-\alpha} f(t) = I_a^{2m-\alpha} f^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(t-a)^{m-\alpha+j}}{\Gamma(m-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a)$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}[I_a^{m-\alpha} f(t)] &= \frac{d^m}{dt^m}[I_a^{2m-\alpha} f(t)^{(m)} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(t-a)^{m-\alpha+j}}{\Gamma(m-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a)] \\ &= \frac{d^m}{dt^m}[I_a^{2m-\alpha} f^{(m)}(t)] + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) \\ &= I_a^{m-\alpha} f^{(m)}(t) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) \end{aligned}$$

Donc

$$D_a^\alpha f(t) =^c D_a^\alpha f(t) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) \tag{2.6}$$

□

Corollaire 2.18. *[63]*

Pour $\alpha > 0$, *on déduit que si* $f^{(k)}(a) = 0$ *pour* $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $(n = [\alpha] + 1)$ *on aura*

$$D_a^\alpha f(t) =^c D_a^\alpha f(t)$$

2.6 Propriétés générales des dérivées fractionnaire

2.6.1 Linéairité

Proposition 2.19. *[1, 53]*

Soient f, g *deux fonction continue sur* $[a, b]$, *La différentiation fractionnaire est une opération linéaire c'est-à-dire :* $\forall \gamma, \lambda \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, *on a*

$$D^\alpha[\lambda f(t) + \gamma g(t)] = \lambda D^\alpha f(t) + \gamma D^\alpha g(t)$$

Ou désigne D^α *n'importe quelle sens de dérivée fractionnaire.*

Exemple 2.5. [53]

- La linéarité dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

  Soient α, $\beta \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned} {}^G D_a^\alpha [\lambda f(t) + \gamma g(t)] &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} [\lambda f(t-kh) + \gamma g(t-kh)] \\ &= \lambda \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh) \\ &\quad + \gamma \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha}{k} g(t-kh) \\ &= \lambda {}^G D_a^\alpha f(t) + \gamma {}^G D_a^\alpha g(t) \end{aligned}$$

- La linéarité dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

  Soient α, $\beta \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha\left[\lambda f(t)+\gamma g(t)\right] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{[\lambda f(s)+\gamma g(s)]}{(t-s)^{\alpha-n+1}} \\ &= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} \\ &\quad +\frac{\gamma}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} \\ &= \lambda D_a^\alpha f(t)+\gamma D_a^\alpha g(t) \end{aligned}$$

2.6.2 Règle de Leibniz

Pour un entier n on a

$$\frac{d^n}{dt^n}(f(t)g(t))=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^k(t)g^{n-1}(t)$$

La généralisation de cette formule nous donne

$$D^\alpha(f(t)g(t))=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}f^k(t)D^{\alpha-k}g(t)+R_n^\alpha(t)$$

où $n\geq\alpha+1$ et

$$R_n^\alpha(t)=\frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{-\alpha-1}g(\tau)d\tau\int_\tau^t f^{(n+1)}(\tau-\xi)^n(\xi)d\xi$$

Avec $\lim_{n\to\infty}R_n^\alpha(t)=0$

Si f et g sont continues dans $[a,t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^\alpha(f(t)g(t))=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}f^k(t)D^{\alpha-k}g(t)+R_n^\alpha(t)$$

D^α est la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov et au sens de Riemann-Liouville.

Preuve (vois page 91-96 de [53]) □

Chapitre 3

Calcul stochastique

3.1 Rappels de probabilité

3.1.1 Espace probabilité

Définition 3.1.
Une tribu (ou σ algébre) sur Ω est une famille $\mathcal{F}$ de sous ensembles de Ω (appelés événements) tels que :

i) $\varnothing \in \mathcal{F}$.

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

ii) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Définition 3.2.
Une probabilite sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ telle que

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b) $\mathbb{P}(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{\infty}^{n=0} \mathbb{P}(A_n)$ pour des A_n appartenant a $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints.

Définition 3.3.
Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ou :

- Ω est un ensemble.
- $\mathcal{F}$ est une tribu (ou σ-algébre) sur Ω.
- $\mathbb{P}$ est une (mesure de) probabilite sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

3.1.2 Variable aléatoire

Définition 3.4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. on appelle variable aléatoire sur cet espace, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$$

Définition 3.5.
La loi d'une v.a. X est l'application $\mu x : B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ définie par

$$\mu x(B) = \mathbb{P}(X \in B), B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$$

3.1.3 Espérance d'une variable aléatoire

3.1.3.1 Fonction de répartition

Définition 3.6. (fonction de répartion)
On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ la fonction $F_X(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Définition 3.7.
Si $F_X(x)$ est une fonction dérivable sa dérivé notée $f_X(x)$ s'appelle densité de probabilité de la variable X :

$$\frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = f_X(x)$$

Définition 3.8.
On appelle espérance mathématique ou moyenne la quantité notée $\mathbb{E}(X)$ et égale :

1. **Cas discret** :
   Si X prend des valeurs discontinues(des nombres entiers est discret) dans un intervalle donné (borné ou non borné)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{K=1}^{\infty} x_K \mathbb{P}(X = x_K)$$

2. **Cas continu** :

   Si X est une variable aléatoire réelle (absolument continue)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Définition 3.9.

Soient X et Y deux v.a. de carré intégrable. On pose :

$$\begin{aligned} Var(X,Y) &= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

3.1.3.2 Espérance conditionnelle

Conditionnement par rapport à un évènement $B \in \mathcal{F}$:

Soit $A \in \mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Soit X une v.a. intégrable (i.e.$\mathbb{E}(\mid X \mid) < \infty$) :

$$\mathbb{E}(X/B) = \frac{\mathbb{P}(X 1_B)}{\mathbb{P}(B)} \ si\, \mathbb{P}(B) \neq 0$$

Conditionnement par rapportà une v.a.Y (à valeurs dans D dénombrable) :

Soit X une v.a. intégrable :

$$\mathbb{E}(X/Y) = \psi(Y)$$

Où

$$\psi(y) = \mathbb{E}(X/Y = y), y \in D$$

Conditionnement par rapport à une tribu $\mathcal{F}_1$

Soit X une v.a.(intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}_1$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$:

Définition 3.10.

On applle l'espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{F}_1$. notée $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)$ tout Z une v.a telle que $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$ et vérifiée :

i) Z est une v.a. $\mathcal{F}_1$-mesurable.

ii) $\mathbb{E}(XU) = \mathbb{E}(ZU)$, $\forall U$ v.a. $\mathcal{F}_1$-mesurable et bornée.

Propriétés 3.1. de l'espérance conditionnelle[55]

Soient X et Y deux v.a. intégrables et soit $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ on a :

1) $\mathbb{E}\left(aX + Y/\mathcal{F}_1\right) = a\mathbb{E}\left(X/\mathcal{F}_1\right) + \mathbb{E}\left(Y/\mathcal{F}_1\right)$.

2) Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1) \leq \mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_1)$.

3) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)) = \mathbb{E}(X)$ (on prend $A = \Omega$ dans la définition).

4) Si X est indépendante de $\mathcal{F}_1$ on a $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X)$, c-à-d qu'en l'absence de toute information sur X, la meilleure estimation que l'on puisse faire sur X est son espérance.

5) Si X est $\mathcal{F}_1-$mesurable alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1) = X$. Cela traduit le fait que $\mathcal{F}_1$ contient déja toute information sur X.

6) Si X est $\mathcal{F}_1-$mesurable et $\mathbb{E}(\mid XY \mid) < +\infty$, alors $\mathbb{E}(XY/\mathcal{F}_1) = X\mathbb{E}(Y/\mathcal{F}_1)$.

7) Si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$, alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F}_2)/\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_1)$.

3.1.4 Convergences de suites de variables aléatoires

Soient $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de v.a et X une autre v.a. toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il y a plusieurs façons de définir la convergence de la suite (X_n) vers X.

- **Convergence en probabilité :**

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \quad si \quad : \forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\omega \in \Omega : X_n(\omega) - X(\omega) > \epsilon\right) = 0$$

- **Convergence presque sûre :**

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X \, p.s \quad si : \quad \mathbb{P}\Big(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big) = 1$$

- **Convergence en moyenne** (ou convergence dans L^1) :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^1\right) = 0$$

- **Convergence quadratique** (ou convergence dans L^2) :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^2\right) = 0$$

3.2 Filtration et processus stochastique

3.2.1 Filtration

Définition 3.11.

Sur un espace probabilisé $(\Omega, B, \mathbb{P})$ on appelle filtration toute suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de sous-tribus de B, c'est-à-dire $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ pour tout $t \leq s$.

Définition 3.12. [38]

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On dit que une variable aléatoire réelle X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ si :

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \qquad\qquad \forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$$

Définition 3.13.

La tribu engendrée par une famille de variables aléatoires $(X_t, t \in [0,T])$ est la plus petite tribu contenant les ensembles $X_t^{-1}(B)$ pour tout $t \in [0,T]$ et $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. On la note $\sigma(X_t, t \leq T)$

Définition 3.14. [37]

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration,

On dit qu'une filtration est continue à droite si :

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon} \; \forall t \geq 0$$

On dit qu'une filtration est continue à gauche si :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\bigcup_{0\leq s<t} \mathcal{F}_s) \; \forall t > 0$$

Cette même filtration est dite complète par rapport à une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$ négligeables, c'est-à-dire de mesure nulle, pour $\mathbb{P}$.

Définition 3.15.
On appelle espace de probabilité filtré, et l'on note $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration compatible $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Définition 3.16.
On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfait les conditions habituelles si elle est a la fois continue a droite et complete.

3.2.2 Processus stochastique

Dans cette partie nous introduisons quelques notions fondamentales liées aux processus stochastiques et nous commençons par les définir.

Définition 3.17.
Soit T un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ dans $\mathbb{R}^n$ est une famille de variables aléatoires a valeurs dans $\mathbb{R}^n$ indexée par T.
Pour $\omega \in \Omega$ fixé $t \longmapsto X_t(\omega)$ est appelée trajectoire.

Définition 3.18. (filtration naturelle)[37]
La filtration naturelle d'un processus stochastique $X = \{X_t, t \geq 0\}$, notée F^X, est la famille croissante de tribus engendrées par $\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$.
$t \geq 0$ c'est-à-dire :

$$F^X = \left\{F_t^X = \sigma(\{X(s), 0 \leq s \leq t\}), t \geq 0\right\}$$

Définition 3.19.
Un processus $X = (X)_{t\geq 0}$ est mesurable si l'application :

$$X : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$$

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

est mesurable par rapport aux tribus $\mathbb{B}(\mathbb{R}^+) \bigotimes \mathcal{F}$ et $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$

Définition 3.20.
Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit continu si pour presque tout $w \in \Omega$, $t \to X_t(w)$ est continue (i.e. les trajectoires sont continues).

Définition 3.21.

Le processus stochastique X est dit càd-làg si pour chaque $\omega \in \Omega$ la trajectoire $X(\omega)$ est continue à droite et admet une limite à gauche.

Définition 3.22.

Soit (X_t) un processus et $(\mathcal{F}_t)$ une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $X = (X)_{t\geq 0}$ est adapte a la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si $\forall t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Définition 3.23.

Soit $X = (X)_{t\in T}$ un processus stochastique. Les lois de dimension finie du processus X sont les lois des vecteurs du type $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ où $n \geq 1$ et $t_1, \ldots, t_n \in T$
On dit que deux processus $(X)_{t\geq 0}$ et $(Y)_{t\geq 0}$ ont meme loi s'ils ont les mêmes lois de dimension finie .

Définition 3.24.

On dit que le processus $X = (X)_{t\geq 0}$ est a accroissements indépendants si : $\forall n \geq 1$, $\forall t_1 < t_2 <, \ldots, < t_n \in T$, $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont independantes.

Définition 3.25.

Un processus progressif X_t, $t \in T$ (par rapport à $\mathcal{F}$) est un processus tel que pour tout $t \in T$, l'application :

$$(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto X_s(\omega)$$

est mesurable de $\mathbb{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ dans $\mathbb{B}(\mathbb{R})$.

Définition 3.26.

Soient $p \geq 1$ et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique, on dit que $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est bornée dans L^p si :

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[\mid X_t \mid^p] < \infty$$

Définition 3.27.

Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration et $T : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une application. On dit que T est un temps d'arrêt par rapport a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Théorème 3.1. *[31]*

Si $(X_t, t \geq 0)$ est un processus adapté et à trajectoires continues, et si T est un temps d'arrêt. Alors on a :

$$\int_0^T \mathbb{E} \mid X_t \mid dt = \mathbb{E}(\int_0^T \mid X_t \mid dt)$$

De plus, si cette quantité est finie, alors on a :

$$\int_0^T \mathbb{E} X_t dt = \mathbb{E}(\int_0^T X_t dt)$$

3.2.2.1 Martingales

Définition 3.28. [71]

On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté et intégrable, on dit que X est :

1. Une martingale si :
$$\forall 0 \leq s \leq t \qquad \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$$
2. Une sur-martingale si :
$$\forall 0 \leq s \leq t \qquad \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$$
3. Une sous-martingale si :
$$\forall 0 \leq s \leq t \qquad \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$$

Définition 3.29.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus continu. On dit que X est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$martingale locale, s'il existe une famille de temps d'arrêt $\{T_n, n \geq 1\}$, telle que

i) La suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $\lim_{t\to\infty} T_n = +\infty$ p.s.

ii) Pour tout n, le processus $X^{T^n} 1_{\{T_n>0\}} = (X_t^{T^n} 1_{\{T_n>0\}})_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ martingale uniformement integrable.

Proposition 3.2. *[3]*

Toute martingale continue est une martingale locale.

Une martingale locale positive est une sur-martingale.

Une martingale locale bornée est une martingale.

3.2.2.2 Quelques inégalitées

Théorème 3.3. *(Inégalitée de Hõlder)[64]*
Si $X \in L^q$, $Y \in L^p$, tele que $q > 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, alors :

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \mathbb{E}\left[|X|^q\right]^{\frac{1}{q}} \mathbb{E}\left[|Y|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Théorème 3.4. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)[39]*
Soient X et Y deux v.a. de carré intégrable. Alors

i) XY est intégrable.
ii)

$$\left(\mathbb{E}\left(|XY|\right)\right)^2 \leq \mathbb{E}\left(X^2\right) \mathbb{E}\left(Y^2\right)$$

Théorème 3.5. *:(Inégalité de Doob)[48]*
Soit $(M_n, n \in N)$ une martingale réelle de carré intégrable. On a :

$$\mathbb{E}[\max_{0 \leq k \leq n} M_k^2] \leq 4\mathbb{E}[M_n^2]$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[\sup_{n \in \mathbb{N}} M_n^2] \leq 4 \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[M_n^2]$$

3.3 Mouvement brownien

3.3.1 Vecteur gaussien

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité complet.

Définition 3.30. [3]
On dit qu'une v.a.r, X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une variable aléatoire gaussienne ou normale de parametres (m, σ^2), $(m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*)$ si sa fonction de densité f_X est donnée par

$$f_X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2)}$$

Dans ce cas, sa loi $\mathbb{P}_X$ est donnée par

$$\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}_X(A) = \int_{\mathcal{F}} f_X(x) dx$$

Et on note

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Si $m = 0$ le vecteur X est dit centré.

Remarque 3.1. Lorsque $\sigma = 0$, X est une variable constante i.e. $X = m\,\mathbb{P}$.p.s.

Proposition 3.6. *[40]*
Une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ a pour

- *esperance :* $\mathbb{E}[X] = m$.
- *variance :* $Var(X) = \sigma^2$.
- $Cov(X_s, X_t) = min(s,t) \qquad \forall\, 0 \leq s,\, t < T$.

Définition 3.31.
$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire gaussien si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes i.e :

$$\forall a_1, \ldots, a_2 \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X_i \text{ est une v.a.r, gaussienne}$$

Définition 3.32.
Un processus $X = (X)_{t \in T}$ est un processus gaussien si toutes ses lois de dimension finie sont gaussiennes i.e :

$$\forall n \geq 1 \ \ , \forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T, \ (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \text{ est un vecteur gaussien}$$

Proposition 3.7. *[48]*
Si le vecteur (X_1, X_2) est Gaussien, les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $Cov(X_1, X_2) = 0$:

Proposition 3.8. *[48]*
Tout vecteur de variables aléatoires Gaussienne indépendantes est un vecteur Gaussien.

3.3.2 Définition du mouvement brownien

Le mouvement brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans un liquide. Ce mouvement aléatoire, dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules du liquide, entraine la dispersion ou la diffusion du pollen dans le liquide. Il a été observé pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown.

Définition 3.33. (Mouvement brownien standard)[5]
Un mouvement brownien standard vectoriel (d-dimensionnel) sur $T = [0, T]$ ou $\mathbb{R}^+$ est un processus continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(W_t)_{t\in T} = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t\in T}$ tel que :

1. $W_0 = 0 \quad p.s.$
2. $0 \leq s < t$ dans T, l'accroissement $W_t - W_s$ indépendant de $\sigma(W_u, u \leq s)$.
3. $0 \leq s < t$ dans T, l'accroissement $W_t - W_s$ suit une loi normale centrée, de matrice de variance covariance $(t - s)I_d$ où I_d désigne la matrice identité $d \times d$.

Définition 3.34. (Mouvement brownien par rapport à une filtration)[5]
Un mouvement brownien vectoriel (d-dimensionnel) sur $T = [0, T]$ ou $\mathbb{R}^+$ par rapport à une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est un processus continu $\mathcal{F}$-adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(W_t)_{t\in T} = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t\in T}$ tel que :

1. $W_0 = 0 \quad p.s.$
2. $0 \leq s < t$ dans T, l'accroissement $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.
3. $0 \leq s < t$ dans T, l'accroissement $W_t - W_s$ suit une loi normale centrée, de matrice de variance covariance $(t - s)I_d$ où I_d désigne la matrice identité $d \times d$.

Remarque 3.2.
Un mouvement brownien standard est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle.

Remarque 3.3. [33]
De cette définition, il suit que pour $t \geq s \geq 0$,

$$W_t - W_s \sim W_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t - s)$$

c'est à dire :

$$\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0 \text{ et } \mathbb{E}((W_t - W_s)^2) = t - s$$

Proposition 3.9. *[3]*
Soit $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors :

a) ***Symetrie :.***
Le processus $(-W) = (-W_t)_{t\geq 0}$ est encore un mouvement brownien.

b) ***Changement d'echelle (scaling) :.***
Soit $\lambda > 0$. Le processus $W^\lambda = (W_t^\lambda)_{t\geq 0}$ avec $W_t^\lambda = (\frac{1}{\lambda})W_{\lambda^2 t}$ est encore un mouvement brownien.

c) ***Propriété de Markov simple :.***
Pour $s \geq 0$, posons $\mathcal{F}_s := \sigma(W_u, u \leq s)$ et $W_t^{(s)} = W_{t+s} - W_s$ alors $W^{(s)} = (W_t^s)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

3.3.2.1 Variation totale, quadratique et bornée

Définition 3.35. [52]
La variation infinitésimale d'ordre p d'un processus X_t défini sur $[0, T]$ associée à une subdivision $\Pi_n = (t_1^n, \ldots, t_n^n)$ est définie par :

$$V_T^p(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right|^p$$

Si $V_T^p(\Pi)$ a une limite dans un certain sens (convergence presque sûre, convergence L^p) lorsque

$$\pi_n = \parallel \Pi_n \parallel_\infty = \max_{i\leq n} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \to 0$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre p de X_t sur $[0, T]$. En particulier,

. si $p = 1$, la limite s'appelle la variation totale de X_t sur $[0, T]$.

. si $p = 2$, la limite s'appelle la variation quadratique de X_t sur $[0, T]$ et est notée $< X >_T$.

Définition 3.36. [52]
Un processus X_t est un processus à variation bornée sur $[0, T]$ s'il est à variation bornée

trajectoire par trajectoire, c'est-à-dire que

$$\sup_{\pi_n} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right| < \infty \quad p.s$$

.

Remarque 3.4.

Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement, alors elle vaut :

$$V_T^p = \sup_{\pi \in P} \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right| \quad p.s$$

où P est l'ensemble des subdivisions possibles de $[0, T]$.

Proposition 3.10. *[52]*

La variation quadratique sur $[0, T]$ du mouvement Brownien existe dans $L^2(\Omega)$ et vaut T. De plus, si la subdivision Π_n satisfait

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$$

on a la convergence au sens presque sûr. On a donc :

$$< W >_T = T$$

3.4 Intégrale stochastique

On commençons par définir l'intégrale pour les processus élémentaires. Ensuite, nous étendons la définition aux processus adaptés ayant un moment d'ordre 2, en utilisant un résultat sur les espaces complets. Pour finir, nous regardons la formule d'Itô, de même que l'intégrale par rapport à un processus d'Itô.

3.4.1 Définition

Définition 3.37. (Intégrale de Wiener)[71]

L'intégrale de Wiener est simplement une intégrale du type

$$\int_0^t X_s dW_s$$

Où : les processus X_t sont définis pour $t \in [0,T]$ sur C. Avec :C l'ensembele des fonction suivantes $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$, continue et stochastique et a), b), c) sont satisfaits, où

a) X est $\mathbb{B}([0,t])\times$ $\mathcal{F}$ mésurabele

b) $X(t,.) : \Omega \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{F}_t$ mésurable.

c) $X(t,.) \in L^2(\Omega)$ et $\int_0^T \mathbb{E}[|X(t,.)|^2]dt < \infty$ ie $X \in L^2([0,T] \times \Omega)$

1. **Cas de processus étagés**

Définition 3.38.

On dit qu'un processus $\{\theta_t\}_{t\in[0,T]}$ est processus étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_j, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$ et une suite de variables aléatoires telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$ mesurable, appartienne a $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in]t_j, t_{j+1}]$ soit :

$$\theta_s(w) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(w) 1_{]t_j,t_{j+1}]}(s)$$

On définit alors l'intégrale d'Itô :

Définition 3.39.

Pour tout processus élémentaire θ, on définit l'intégrale d'Itô de θ par rapport au mouvement brownien W par :

$$\int_0^T \theta_s(\omega) dW_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$$

Propriétés 3.2. [44]

L'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élèmentaires satisfait les propriétés suivantes :

1. Linéarité :
$$\int_0^t (\theta_s + \eta_s)\, dW_s = \int_0^t \theta_s dW_s + \int_0^t \eta_s dW_s$$
$$\int_0^t c\, \theta_s dW_s = c \int_0^t \theta_s dW_s$$
2. Additivité : Pour $0 \leq u < t \leq T$:
$$\int_s^t \theta_v dW_v = \int_s^u \theta_v dW_v + \int_u^t \theta_v dW_v$$

3. Pour tout $t \leq T$:
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)\left(\int_0^t \eta_s dW_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s \eta_s)\, dW_s\right]$$

4. $t \mapsto \int_0^t \theta_s dW_s$ est continue p.s.

5. $(\int_0^t \theta_s dW_s)_{0\leq t\leq T}$ est un processus $\mathcal{F}-$adapté.

6. $$Var(\int_0^t \theta_s dW_s) = \mathbb{E}[\int_0^t \theta_s^2 dW_s]$$

Proposition 3.11.

1. *Si* $\int_0^t \mathbb{E}\left(|\theta_s|\right) ds < \infty$ *alors :*
$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right) = 0$$

2. *Si* $\int_0^t \mathbb{E}\left(\theta_s^2\right) ds < \infty$ *on a l'isométrie d'Itô*
$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)^2\right) = \int_0^t \mathbb{E}\left(\theta_s^2\right) ds \tag{3.1}$$

Preuve 1. On pose que $t_n = t$ on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\theta_j(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right]\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}(\theta_j)\underbrace{\mathbb{E}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})}_{0}\\ &= 0\end{aligned}$$

2. On pose que $t_n = t$ on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j,i=0}^{n-1}\theta_j\theta_i(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right]\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}(\theta_j^2)\underbrace{\mathbb{E}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2}_{t_{j+1}-t_j}\\ &= \int_0^t \mathbb{E}\left(\theta_s^2\right) ds\end{aligned}$$

2. **Cas général**

   On peut prolonger la définition de l'intégrale de Wiener a une classe plus grande de processus. On perd le caractere gaussien de l'intégrale, ce qui est déja le cas pour le processus étagé.

   On défininit Γ comme l'ensemble des processus X càglàd de carré intégrale appartenant à $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ tels que :

$$\| \theta \|^2 = \mathbb{E}[\int_0^\infty \theta_t^2 dt] < \infty$$

   Les processus étagés $\theta^{(n)}$ appartiennent à Γ que converge vers X dans l'espace complet $L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ c-à-d :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \mathbb{E}((X_s - \theta_s^{(n)}))^2 ds = 0$$

   L'isométrie (3.1) nous permet alors d'affirmer que la limite suivante existe dans L^2 :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^t \theta_s^{(n)} dW_s = \int_0^t X_s dW_s$$

   C'est par définition l'intégrale d'Itô de X_s.

Proposition 3.12. *[55]*
Le processus $\left\{\int_0^t X_s dW_s\right\}_{t\geq 0}$ *est une martingale.*

Preuve Soit $0 \leq u < t$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s dW_s | \mathcal{F}_u\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^u X_s dW_s | \mathcal{F}_u\right) + \mathbb{E}\left(\int_u^t X_s dW_s | \mathcal{F}_u\right) \\
&= \int_0^u X_s dW_s + 0 \\
&= \int_0^u X_s dW_s
\end{aligned}$$

Exemple 3.1. Nous pouvons montrer que pour tout t

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t)$$

En effet, nous avons, par définition, que

$$\int_0^t W_s dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Ensuite, en utilisant l'identité

$$2\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}}^2 - W_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^t W_s dW_s &= \frac{1}{2}\left(W_t^2 + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(W_t^2 - t) \end{aligned}$$

Car d'après Proposition 3.10 le terme

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$$

converge dans L^2 vers la variation quadratique sur $[0, t]$ du mouvement brownien qui vaut t.

3.4.2 Formules d'Itô

Une nouvelle classe de processus sera introduite, par rapport à laquelle une intégrale stochastique sera définie : il s'agit de la famille des processus d'Itô. Cette classe permet d'établir plusieurs formules pratiques qui forment la base du calcul différentiel et intégral stochastique. Nous débutons avec la première formulation de formule d'Itô .

Théorème 3.13. *[52] Toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$, telle que f'' est bornée, satisfait presque sûrement,*

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f^{'}(W_r)dW_r + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(W_r)dr$$

Exemple 3.2.

Si $f(x) = x^2$ nous avons d'après le Théorème 3.13 que :

$$W_t^2 - W_0^2 = \int_0^t 2W_r dW_r + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds = 2\int_0^t W_r dW_r + t$$

Ainsi, nous déduisons que

$$\int_0^t W_r dW_r = \frac{1}{2}W_t^2 - t$$

3.4.3 Processus d'Itô

On définit le processus d'Itô.

- **Cas un-demension**

Définition 3.40. [9]
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration et $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien un-demensionnel. On appelle processus d'Itô un-demensionnel, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

où les processus H_s et K_s sont adaptés continus et vérifient pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}\int_0^t \left[H_s^2 + |K_s|\right] ds < +\infty$$

L'équation précédente est notée de manière infinitésimale par

$$dX_t = K_t dt + H_t dw_t \quad et \quad X_0 = Z$$

Définition 3.41.
Soient X_t et Y_t des processus d'Itô. Alors

- Les variations quadratiques sur $[0, t]$ sont données par

$$< X >_t = \int_0^t H_{s,1}^2 ds \quad et \quad < Y >_t = \int_0^t H_{s,2}^2 ds$$

- La covariation quadratique entre X_t et Y_t est donnée par

$$< X, Y >_t = \int_0^t H_{s,1} H_{s,2} ds$$

où

$$dX_t = K_{s,1} ds + H_{s,1} dW_s \quad et \quad dY_t = K_{s,2} ds + H_{s,2} dW_s$$

La conclusion est obtenue en notant que $< X >_t = < X, X >$

Définition 3.42.

L'intégrale stochastique d'un processus ϕ_t par rapport à un processus d'Itô

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t$$

est définie par :

$$\int_0^t \phi_s dX_s = \int_0^t \phi_s H_s dW_s + \int_0^t \phi_s K_s ds$$

Par la suite, une formule importante d'intégration stochastique par rapport aux processus d'Itô sera établie.

Théorème 3.14. *[32]*

Si $f \in C^2$, alors

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d < X >_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds \end{aligned}$$

Proposition 3.15.

Soient X_t et Y_t des processus d'Itô. Nous avons

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + d < X, Y >_s$$

Preuve Comme on a :

$dX_t^2 = 2X_t dX_t + d < X >_t$

$dY_t^2 = 2Y_t dY_t + d < Y >_t$

$d(X+Y)_t^2 = 2(X_t + Y_t) d(X+Y)_t + d < X + Y >_t$

donc :

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= \frac{1}{2}(d(X+y)_t^2 - d < X >_t^2 - dY_t^2) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2}(d < X + Y >_t - d < X >_t - d < Y >_t) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d < X, Y >_t \end{aligned}$$

- **Cas multivarié**

Définition 3.43.

Soit $W_t = (W_t^1, W_t^2, \ldots, W_t^d)$ un mouvement brownien s-dimensiennel dont les composantes sont d mouvement brownien indépendants à trajectoires continues.

Nous appellerons processus d'Itô r-dimensiennel un prcessus X_t à valeurs $\mathbb{R}^r$ donnt chaque composante est de la forme

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{m=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,m} dW_s^m$$

où les processus $H_s^{i,m}$ et K_s^i sont adaptés continus et vérifient

$$\mathbb{E} \int_0^t \left[(H_s^{i,m})^2 + |K_s^i| \right] ds < +\infty \quad \forall m = 1, \ldots, d_i \quad i = 1, \ldots, r$$

On pose :

$$< X^i, X^i >_t = \sum_{m=1}^{d} \int_0^t (H_s^{j,m})^2 ds$$

Et

$$< X^i, X^j >_t = \sum_{m=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds$$

Proposition 3.16. *[9]*

Soit X un processus d'Itô à valeurs $\mathbb{R}^r$ et f une application de $\mathbb{R}^r$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées alors on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_i^s + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{r} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d < X, Y >_s$$

où

$$dX_i^s = H_s^{i,1} dW_s^1 + \ldots + H_s^{i,d} dW_s^d + K_s^i ds$$

Chapitre 4

Equations différentielles stochastiques(EDS)

On rappelle dans cette chapitre quelques résultats sur les équations différentielles stochastiques (EDS) à coefficients aléatoires par rapport à mouvement brownien.

4.1 Définition

Définition 4.1. Une équation différentielle stochastique sur $\mathbb{R}^d$ de coefficient de dérive b et de diffusion σ est donnée sous la forme :

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad \forall t \in [0, T] \\ X_0 &= \xi \end{cases} \tag{4.1}$$

où

- T est un réel strictement positif.
- $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ sont deux fonctions boréliennes.
- $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard sur $\mathbb{R}^d$ défini sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.
- ξ est une variable aléatoire quelconque indépendante du $M.B$ appartient $\mathbb{R}^n$.

Nous allons préciser les notions d'existence et d'unicité des solutions d'une E.D.S.

Définition 4.2. (Solution forte d'EDS)[5]
Une solution forte de l'EDS (4.1) est un processus vectoriel $X = (X^1, \ldots, X^n)$ progressif tel que l'on ait :

$$\int_0^t \mid b(t, X_t) \mid ds + \int_0^t \mid \sigma(t, X_t) \mid^2 dW_s < \infty \quad \mathbb{P} - p.s \quad \forall\, 0 \leq t \in T$$

et que les relations

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(u, X_u)du + \int_0^t \sigma(u, X_u)dW_u < \infty \quad \mathbb{P} - p.s \quad \forall\, 0 \leq t \in T$$

i.e.

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(u, X_u)du + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_{ij}(u, X_u)dW_u^j < \infty \quad \mathbb{P} - p.s \quad \forall\, 0 \leq t \in T, 1 \leq i \leq n$$

soient vraies p.s.

Définition 4.3. (Solution faible d'EDS)[31]
Une solution faible de (4.1) est la donnée d'un triplet (X, W), $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_t)$ où :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration de cet espace.
- W est un mouvement brownien de dimension d tel que (W_t) est une martingale relativement a la filtration $(\mathcal{F}_t)$:
- X est un processus adapté a la filtration $(\mathcal{F}_t)$:
- On a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(u, X_u)du + \int_0^t \sigma(u, X_u)dW_u < \infty \quad \mathbb{P} - p.s \quad \forall\, 0 \leq t \in T$$

On dira alors que le couple (W_t, X_t) est une solution faible de (4.1).

Il est clair, par définition, une solution forte est aussi une solution faible.

Définition 4.4. [31]
L'équation différentielle stochastique (4.1) est dit bien posée si, pour toute condition initiale $\xi \in \mathbb{R}^n$, elle admet une solution faible qui est unique dans le sens de la loi de probabilité.

Définition 4.5. [31]

- On dira qu'il y a unicité forte pour l'équation si, pour toutes solutions X_t et Y_t, on a :
$$\mathbb{P}\left[X_t = Y_t \quad \forall t \in [0,T]\right] = 1$$
- On dit qu'il y a unicité faible (ou en loi) des solutions de (4.1) si deux solutions faibles ont toujours même loi i.e, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, étant données deux solutions (W_t^1, X_t) et (W_t^2, Y_t) de (4.1) telles que $X_0^i = \xi$, $i = 1,2$ les processus $(X_t, t \geq 0)$ et$(Y_t, t \geq 0)$ ont même loi.
- On dit qu'il y a unicité trajectorielle des solutions de (4.1) si, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, étant données deux solutions $(W_t X_t)$ et (W_t, Y_t) de (4.1) telles $X_0^i = \xi$, $i = 1,2$ on a $X_t = Y_t$ p.s.

4.2 Existence et unicite de solutions (EDS)

Nous donnons d'abord un résultat d'existence et d'unicité d'une solution forte sous des conditions un peu restrictives sur les coefficients b et σ.

Théorème 4.1. *[3]*
Supposons que les coefficients b et σ satisfont les deux conditions suivantes : On suppose qu'il existe une constante K positive telle que pour tout $t \geq 0$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

H1 Condition de Lipschitz :

$$\mid b(t,X) - b(t,Y) \mid + \mid \sigma(t,X) - \sigma(t,Y) \mid \leq K \mid X - Y \mid$$

H2 Condition de croissance linéaire :

$$\mid b(t,X) \mid \leq K(1+ \mid X \mid) \quad , \quad \mid \sigma(t,X) \mid \leq K(1+ \mid X \mid)$$

Alors EDS (4.1) admet, pour toute condition initiale ξ de carrée intégrable ($\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right) < \infty$), une solution forte $(X_t)_{t\in[0,T]}$, presque sûrement continue. Cette solution est unique, de plus *cette solution vérifie :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^2\right|\right) < \infty$$

Pour démontrer l'unicité, on utilise le lemme de Gronwall :

Lemme 4.2. *(Lemme de Gronwall)[3]*
Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds \quad , a \in \mathbb{R}, \quad b \geq 0$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) \leq ae^{(bt)}$$

Preuve On pose $G(t) = a + b\int_0^t g(s)ds$ alors $g(t) \leq G(t)$: Si g est continue, G est une fonction dérivable et

$$\left(e^{-bt}G(t)\right)' = -be^{-bt}G(t) + e^{-bt}G'(t) = -be^{-bt}G(t) + be^{bt}g(t) \leq 0$$

donc $e^{-bt}g(t) \leq e^{-bt}G(t) \leq G(0) = a$.
Si g est seulement mesurable bornée, G est continue et vérifie

$$G(t) = a + b\int_0^t g(s)ds \leq a + b\int_0^t G(s)ds$$

donc la même conclusion est vraie. □

Noter que l'espace vectoriel $\mathcal{X}_T$ muni de la norme $||\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^2|\right)||$ est complet, où : $\mathcal{X}_T = \left\{(X_t, t \in [0,T])\right.$ processus continu et adapté à $(\mathcal{F}_t)$ tel que $\left.\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^2|\right) < +\infty\right\}$

Preuve de l'unicité Soit $(W_t)_{t\geq 0}$: Considérons les deux processus (X_t) et (Y_t) :

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s$$

$$Y_t = \xi + \int_0^t b(s,Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s)dW_s$$

On va montrer que $X_t = Y_t \quad \mathbb{P}-p.s$
Ce qui revient à montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}(X_t - Y_t)^2\right] = 0 \qquad 0 \leq t \leq T$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mid X_t - Y_t \mid^2 &= \mid \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s - \int_0^t b(s,Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s)dW_s \mid^2 \\
&= \mid \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dW_s \mid^2 \\
&= 2[\mid \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds \mid^2 + \mid \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dW_s \mid^2]
\end{aligned}$$

Comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ pour $0 \leq t \leq r \leq T$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t - Y_t \mid^2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq T} [\mid \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds \mid^2 + \mid \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dW_s \mid^2]$$

En utilisant l'inégalité de Doob.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t|^2\right) &\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds\right|^2\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dW_s\right|^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds\right|^2\right] \\
&\quad +2\times 4\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dW_s\right|^2\right]
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t|^2\right) &\leq 2T\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds\right|^2\right] \\
&\quad +8\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dW_s\right|^2\right] \\
&\leq (8 \vee 2T)\mathbb{E}\left[\int_0^T |(b(s,X_s) - b(s,Y_s))|^2\, ds\right. \\
&\quad \left. + \int_0^T |(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))|^2\, dW_s\right]
\end{aligned}$$

Comme les fonctions b et σ sont Lipschitzienne en espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on obtient, pour tout

$r \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right) &\le (8\vee 2T)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t-Y_t|^2\,ds\right]\\
&\le C(T,K)\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t-Y_t|^2\,ds\right]\\
&\le C(T,K)\int_0^T \mathbb{E}\left(|X_t-Y_t|^2\right)ds\\
&\le C(T,K)\int_0^T \mathbb{E}\left(\sup_{r\le s}|X_s-Y_s|^2\right)ds
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\mid X_t-Y_t\mid^2\right)\le C(T,K)\int_0^T \mathbb{E}\left(\sup_{r\le s}|X_t-Y_t|^2\right)ds$$

Le lemme de Gronwall permet d'écrire

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right)\le 0e^{C(T,K)T}=0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\right)=0\\
&\Rightarrow \sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2=0\\
&\Rightarrow \text{unicite forte}
\end{aligned}$$

□

Preuve Existence de la solution Pour démontrer l'existence d'une solution X de l'EDS (4.1) on utilise la méthode des approximations successives dite "méthode d'itération de Picard". On définit par récurrence une suite de processus $(X^{(n)})$

$$\begin{cases}
X_t^0=\xi\\
X_t^1=\xi+\int_0^t b(s,\xi)ds+\int_0^t\sigma(s,\xi)dW_s\\
\vdots\\
X_t^{n+1}=\xi+\int_0^t b(s,X_s^n)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s^n)dW_s
\end{cases}$$

Par recurrence pour chaque n, X_t^n est continu et adapte, donc le processus $\sigma(t,X_t^n)$ l'est aussi. Fixons $T>0$ et raisonnons sur $[0,T]$, nous vérifions d'abord par recurrence sur n que

$$\exists C_n : \forall t\in[0,T]\quad \mathbb{E}\left[(X_t^n)^2\right]\le C_n \tag{4.2}$$

Pour $n = 0$, il n'y a rien a montrer.

Supposons a present que ceci est vrai a l'ordre $n-1$ et verifions que cela reste vrai a l'ordre n.

Le calcul du moment d'ordre deux de l'integrale stochastique se justifie par le fait que $\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s, X_t^{n-1})^2 ds\right] < \infty$, ce qui decoule de la croissance linèaire et de l'hypothèse de récurrence.

En utilisant encore la croissance linèaire, on ecrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_t^n)^2\right] &\leq 3(\xi^2 + \mathbb{E}\left[(\int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds)^2\right] + \mathbb{E}\left([\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dW_s)^2\right]) \\
&\leq 3(\xi^2 + t\mathbb{E}\left[\int_0^t (b(s, X_s^{n-1}))^2 ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t (\sigma(s, X_s^{n-1}))^2 dW_s\right]) \\
&\leq 3(\xi^2 + t\mathbb{E}\left[\int_0^t (K + K\left|X_s^{n-1}\right|)^2 ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t (K + K\left|X_s^{n-1}\right|)^2 dW_s\right]) \\
&\leq 3(\xi^2 + (t+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t (K + K\left|X_s^{n-1}\right|)^2 ds\right]) \\
&\leq 3\xi^2 + 3(t+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t (2K^2 + 2(K\left|X_s^{n-1}\right|^2))ds\right] \\
&\leq 3\xi^2 + 6T(t+T)(K^2 + 4C_{n-1}) := C_n
\end{aligned}$$

La majoration (4.2) et l'hypothese de croissance linéaire sur σ entrainent que la martingale locale $(\int_0^t \sigma(s, X_s^n)dW_s)$ est une vraie martingale bornée dans L^2 pour tout n. On utilisera ceci pour majorer par recurrence

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right]$$

On a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}))ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))dW_s$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right] &\le 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s (b(u,X_u^n)-b(u,X_u^{n-1}))du\right|^2\right.\\
&\quad \left.+\sup_{0\le s\le t}\left|\int_0^s (\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))dW_u\right|^2\right]\\
&\le 2\left(\mathbb{E}\left[(\int_0^t (\left|b(u,X_u^n)-b(u,X_u^{n-1})\right|)du)^2\right]\right.\\
&\quad \left.+4\,\mathbb{E}\left[(\int_0^t (\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))dW_u)^2\right]\right)\\
&\le 2\left(T\mathbb{E}\left[\int_0^t (b(u,X_u^n)-b(u,X_u^{n-1}))^2du\right]\right.\\
&\quad \left.+4\left[\int_0^t (\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))^2dW_u^2\right]\right)\\
&\le 2(T+4)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_t^n-X_t^{n-1}\right|^2du\right]\\
&\le C_T\mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{0\le r\le u}\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2du\right]
\end{aligned}$$

Avec $C_T=2(T+4)K^2$, posons

$$g_n(u)=\sup_{0\le r\le u}\left|X_r^n-X_r^{n-1}\right|^2$$

Ainsi on vient de montrer que

$$g_{n+1}(t)\le C_T\int_0^t g_n(u)du \tag{4.3}$$

D'autre part, $\forall n$, g_n est bornée sur $[0,T]$

En effet, pour $n\ge 0$:

$$\begin{aligned}
g_n(u) &\le 2(T+4)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X_u^n-X_u^{n-1}\right|^2du\right]\\
&\le 2(T+4)K^2\mathbb{E}\left[\int_0^t (2(X_u^n)^2-2(X_u^{n-1})^2)du\right]\\
&\le 4T(T+4)(C_n^2+C_{n-1}^2)
\end{aligned}$$

$g_0(t)=\xi^2$ qu'on appelle $C_T^{'}$. Une recurrence simple sur (4.3) donne :

$$g_n(t)\le C_T^{'}(C_T)^n\frac{t^n}{n!}$$

Et, en vertu du critere de D'alembert, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Comme la norme de L^1 est dominée par la norme de L^2, on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right] < \infty$$

Le theoreme de la convergence monotone nous permet de dire que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right] < \infty$$

Ce qui entraine que p.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right| < \infty$$

Mais si $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n < m$:

$$\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^m - X_t^n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t^{k+1} - X_t^k\right| < \infty \to 0$$

quand $n, m \to \infty$

Par suite, p.s. la suite $(X_t^n, 0 \leq t \leq T)_n$ converge uniformement sur $[0, T]$ vers un processus limite $X = (X_t)_{t\geq 0}$ qui est continu et adapte. En effet, on verifie par recurrence que chaque processus X_n est adapte par rapport a la filtration canonique de B, et donc X l'est aussi. On a $\mathbb{P}$.p.s.

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq s\leq T} |X_s - X_s^n| &= \lim_{m\to\infty} \sup_{0\leq s\leq T} |X_s^m - X_s^n| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{0\leq s\leq T} \left|X_s^k - X_s^{k-1}\right|
\end{aligned}$$

En introduisant la norme L^2, on trouve que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s - X_s^n|^2\right] \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} g_k(T)^{1/2}\right)^2 \to 0$$

, et on en déduit que

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dW_s$$

dans L^2

$$\int_0^t b(s, X_s)dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t b(s, X_s^n)dW_s$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s^n))dW_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s^n))^2 dW_s\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(K^2 \int_0^t |X_s - X_s^n|^2\, ds\right) \\
&\leq T^2K^2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s - X_s^n|^2\right] \to 0
\end{aligned}$$

et on procede de la même manière pour b. En passant à la limite dans l'équation de recurrence pour X^n, on trouve que X est une solution (forte) sur $[0, T]$. □

4.3 Equations différentielles stochastiques Neutre (EDSN)

Définition 4.6. [9]
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathcal{F}_t$, $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien d-dimensionnel. On appelle équations différentielles stochastiques Neutre (EDSN) n-dimensionnel l'équation se écrire sous la forme suivant :

$$d[X(t) - D(X_t)] = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t \quad \forall t_0 \leq t \leq T \tag{4.4}$$

Avec pour tout $\tau > 0$ et $0 \leq t_0 < T < \infty$ on a :

$$D : \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

$$f : [t_0, T] \times \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$$

$$g : [t_0, T] \times \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n\times d}$$

Avec la définition d'Itô, pour tout $t_0 \leq t \leq T$ l'équation diffrentielle stochastique (4.4) écrire sous la forme suivant :

$$X(t) - D(X_t) = X(t_0) - D(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t f(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s)dW_s \tag{4.5}$$

Avec le condition initialle

$$X_{t_0} = \xi = \{\xi(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\} \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T, 0]; \mathbb{R}^n) \tag{4.6}$$

où :

ξ est $\mathcal{F}_{t_0}$-mesurable et $\xi \in \mathcal{C}([-\tau, \mathbb{R}^n])$ ils variéent stochastique et $\mathbb{E}(|\xi|^2) < \infty$

Définition 4.7. Si l'équation (4.4) a la solution $X(t) \equiv 0$ correspondant à la valeur initiale $\xi = 0$. Cette solution est appelée solution triviale ou position d'équilibre.

Définition 4.8. [9]
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathcal{F}_t$, $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien d-dimensionnel. On appelle une équations différentielles stochastiques Neutre avec retard (EDSN) l'équation se écrire sous la forme suivant :

$$d[X(t) - \widetilde{D}(X(t-\tau))] = F(t, X(t), X(t-\tau))dt + G(t, X(t), X(t-\tau))dW_t \quad \forall t \in [t_0, T] \tag{4.7}$$

Avec :
$F : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$G : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$
$\widetilde{D} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
Si on définie $f(t, \varphi) = F(t, \varphi(0), \varphi(-\tau))$, $g(t, \varphi) = G(t, \varphi(0), \varphi(-\tau))$ et $D(\varphi) = \widetilde{D}(\varphi(-\tau))$ pour $\varphi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ et $t \in [t_0, T]$, alors l'équation (4.7) on peut ècrire comme l'équation (4.4)

4.4 Stabilité des équations différentielles stochastiques

En 1892 Lypunov introduit le concèpte de stabilité d'un système dynamique. Il définie la stabilité comme insensibilité de l'état du système à de petits changements dans l'état initial ou les paramètres du système. Pour une étable système, les trajectoires qui sont "proches" l'une de l'autre à un instant spécifique devraient donc rester proches l'un de l'autre à tous les instants ultérieurs. Pour rendre la théorie de stabilité stochastique plus compréhensible.

Dans cette section on parelle de quelques types de stabilité de solutions d'équations différentielles stochastques (EDS) (4.1) à la valeur initiale ξ :

4.4.0.1 Stabilité en probabilité

Définition 4.9. [72]

(i) La solution triviale de l'équation EDS (4.1) est dite stable en probabilité ou stochastiquement stable pour $t \geq 0$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\lim_{\xi \to 0} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq 0} |X(t)| > \varepsilon \right\} = 0$$

(ii) On dit que la solution triviale est asymptotiquement stochastiquement stable si elle est stochastiquement stable et :

$$\lim_{\xi \to 0} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \to \infty} |X(t)| = 0 \right\} = 1$$

(iii) On dit que la solution triviale est asymptotiquement stochastiquement stable dans le large s'il est stochastiquement stable et pour tout $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T, 0]; \mathbb{R}^n)$ on a

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{t \to \infty} X(t) = 0 \right\} = 1$$

Définition 4.10. [9]
La solution triviale de équation EDS (4.1) est dite presque sûrement exponentiellement stable si :

$$\lim_{t \to \infty} \sup \frac{1}{t} e^{|X_t|} < 0$$

pour tout $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T, 0]; \mathbb{R}^n)$

4.4.0.2 Stabilité du p^{me}moment

Définition 4.11. [59]
Soit $p \geq 2$ on dit la solution de EDS (4.1) est stable du p^{em}moment si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tq :

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \geq 0} |X(t)|^p \right) < \epsilon \quad |\xi| < \delta$$

Définition 4.12. [59]
Soit $p \geq 2$ on dit la solution de EDS (4.1) est asymptotiquement stable du p^{em}moment si stable du p^{em}moment et pour tout $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T, 0]; \mathbb{R}^n)$ On a

$$\lim_{T \to \infty} \mathbb{E} \left(\sup_{t \geq T} |X(t)|^p \right) = 0$$

4.4.0.3 Stabilité exponentielle du p^{em}moment

Définition 4.13. [9]
La solution triviale de l'équation EDS (4.1) est dite exponentiellement stable du p^{em}moment s'il existe deux constantes positives λ et C telle que :

$$\mathbb{E}|X_t|^p \leq C|X_0|^p e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0$$

pour tout $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_{t_0}}([-T,0];\mathbb{R}^n)$
Si $p = 2$ cette solution est dite exponentiellement stable de moyenne carée.

Chapitre 5

Application : Existence, unicité et stabilité asymptotique d'une équation différentielle stochastique neutre d'ordre fractionnaire avec retard infini

5.1 Introduction

Soient H et K deux espaces de Hilbert réel séparables, leurs munissent des normes $|\cdot|_H$ et $|\cdot|_K$. Pour éviter toute confusion on utilise $< \cdot, \cdot >$ pour le produit intérieur et $|\cdot|$ pour la norme. Soit $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une base orthonormale de K. Tout au long du chapitre, on suppose que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, F)$, $(F = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ est un espace de probabilité filtré complet satisfait que $\mathcal{F}_0$ contient toute $\mathbb{P}$-ensembles nulles de $\mathcal{F}$.

Supposons $W(t) : t \geq 0$ est cylindrique $K-$mouvement brownien ,On désigne la trace par $Q = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda < \infty$ qui satisfait $Qe_i = \lambda_i e_i$. Donc, On fait, $W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} W_i e_i$ où $W_i(t)_{i=1}^{\infty}$ sont des mouvements browniens standards en 1-dimension. On définit $\mathcal{L}(K, H)$ comme l'ensemble des opérateurs borné linéaire $\mathcal{A} : K \to H$ avec la norme suivante :

$$|\mathcal{A}| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\mathcal{A}e_i|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

Il est évident que $\mathcal{L}(K, H)$ est un espace de Hilbert muni produit intérieur induite par la norme ci-dessus. Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(K, H)$ est appelé un opérateur de Hilbert-Schmidt. On suppose que $\mathcal{F}_t$ un outre filtration est engendré par le mouvement brownien cylindrique $W(\cdot)$, qui est, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s); \quad 0 \le s \le t\} \vee \mathcal{N}$ avec $\mathcal{N}$ l'ensemble de $\mathbb{P}-$nulle.

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation différentielle stochastique neutre d'ordre fractionnaire avec retard infini non linéaire sous la forme suivante [59]

$$\begin{cases} {}^cD_0^\alpha[X(t) + g(t, X(t-\tau(t)))] = \mathcal{A}X(t) + f(t, X(t-\tau(t))) + \sigma(t, X(t-\nu(t)))\frac{dW(t)}{dt} & t \ge 0 \\ X_0 = \varphi \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}([m(0), 0], H) \end{cases} \tag{5.1}$$

Où : $\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue linéaire borné $\mathcal{S}(t)$ pour tout $t \ge 0$ dans un espase de Hilbert H, $f : \mathbb{R}_+ \times H \to H$, $\sigma : \mathbb{R}_+ \times H \to \mathcal{L}(K, H)$ sont deux applications mesurables et $g : \mathbb{R}_+ \times H \to H$ est continue, ${}^cD_0^\alpha$ une dérivée fractionnelle au sense de Caputo, tele que $\alpha \in (0, 1)$ et $\tau(t), \nu(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ satisfait $t-\tau(t) \to \infty, t-\nu(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$. Soit $m(0) = \max\{\inf_{s\ge0}(s-\tau(s)), \inf_{s\ge0}(s-\nu(s))\}$. Dans cette partie $\mathfrak{B}_{\mathcal{F}}([m(0), 0], H)$ est notée à la famille des variables aléatoires, bornées presque sûrement, $\mathcal{F}_0$-mesurabeles continues $\varphi(t) : [m(0), 0] \to H$ avec la norme $|\varphi|_{\mathfrak{B}} = \sup_{m(0)\le t\le 0} \mathbb{E}|\varphi(t)|_H$. Dans ce chapitre, on suppose que $p \ge 2$ est un entier.

Soit $\mathcal{A}$ un générateur infinitésimal de semi groupe analytique $\mathcal{S}(t)$ dans H, alors pour tout $\eta > 0$ est assez grand on a $(\mathcal{A} - \eta I)$ est invérsible et generate de semi groupe analytique bornée, on peut supposer le somi-groupe $\mathcal{S}(t)$ est bornée et $\mathcal{A}$ est invérsible donc pour tout $0 < \eta \le 1$ on définie $(-\mathcal{A})^\eta$ un l'opérateur linèaire, fermé et invérsible dans le domaine $\mathcal{D}(-\mathcal{A})^\eta$ ce que dense dans H, on notée par $|H_\eta|$ à l'éspace de Banach $\mathcal{D}(-\mathcal{A})^\eta$ avec la norme $|x|_\eta = |(-\mathcal{A})^\eta x|$.

Lemme 5.1. *[70]*
On suppose que les conditions précédentes sont satisfait.

(a) *Soit $0 < \eta \le 1$ alors H_η est un espace de Banach.*

(b) *Si $0 < \nu \le \eta$ alors $H_\nu \subset H_\eta$ est compact pour tout l'opérateur résolvante de $\mathcal{A}$ est compact.*

(c) *Pour tout $\eta \in (0, 1]$, il existe un constante positive C_η telle que*

$$||\mathcal{A}^\eta \mathcal{S}(t)|| \le \frac{C_\eta}{t^\eta} \tag{5.2}$$

On va trouver la solution de l'équation (5.1)
. D'aprés la défintion de dérivée fractionnaire au sens de Caputo 2.3 dans le chapitre 2, avec $0 \leq \alpha < 1$. On a :

$$I^{1-\alpha}[\frac{d}{dt}[X(t)+g(t,X(t-\tau(t)))]] = \mathcal{A}X(t)+f(t,X(t-\tau(t)))+\sigma(t,X(t-\nu(t)))\frac{dW(t)}{dt} \tag{5.3}$$

D'aprés la défintion de l' intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouvill 2.1 dans le chapitre 2, on intégré les deux termes de l'équation (5.3) on obtient :

$$I^{\alpha}[I^{1-\alpha}(\frac{d}{dt}[X(t)+g(t,X(t-\tau(t)))])] = I^{\alpha}\left[\mathcal{A}X(t)+f(t,X(t-\tau(t)))+\sigma(t,X(t-\nu(t)))\frac{dW(t)}{dt}\right]$$

D'aprés la proposition 2.3 avec $\alpha = \alpha$ et $\alpha' = 1-\alpha$, et la linèarité de l'opérateur de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (Proposition 2.4), on obtient

$$I^{1}[\frac{d}{dt}[X(t)+g(t,X(t-\tau(t)))]] = I^{\alpha}[\mathcal{A}X(t)]+I^{\alpha}f(t,X(t-\tau(t)))+I^{\alpha}[\sigma(t,X(t-\nu(t)))\frac{dW(t)}{dt}]$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{ds}[X(s)+g(t,X(t-\tau(t)))]ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{A}X(s)ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,X(s-\tau(s)))ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[\sigma(s,X(s-\nu(s)))\frac{dW(s)}{ds}]ds\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}X(t)+g(t,X(t-\tau(t)))-[\varphi(0)+g(0,\varphi)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{A}X(s)ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,X(s-\tau(s)))ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sigma(s,X(s-\nu(s)))dW(s)\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} X(t) &= [\varphi(0)+g(0,\varphi)] - g(t,X(t-\tau(t))) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{A}X(s)ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,X(s-\tau(s)))ds \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sigma(s,X(s-\nu(s)))dW(s) \end{aligned} \tag{5.4}$$

Lemme 5.2.

Si (5.4) est vérifiée, Alors on a :

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^\infty \eta_\alpha(\theta)S(t^\alpha\theta)[\varphi(0)+g(0,\varphi)]d\theta - g(t,X(t-\tau(t))) \\ &-\alpha\int_0^t\int_0^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\eta_\alpha(\theta)\mathcal{A}\mathcal{S}((t-s)^\alpha\theta)g(s,X(s-\tau(s)))d\theta ds \\ &+\alpha\int_0^t\int_0^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\eta_\alpha(\theta)\mathcal{S}((t-s)^\alpha\theta)f(s,X(s-\tau(s)))d\theta ds \\ &+\alpha\int_0^t\int_0^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\eta_\alpha(\theta)\mathcal{S}((t-s)^\alpha\theta)\sigma(s,X(s-\nu(s)))d\theta dW(s) \end{aligned}$$

avec η_α est une fonction de densité de probabilité définie sur (0,1) telle que $\eta_\alpha(\theta) \geq 0$, $\theta \in (0,\infty)$, et $\int_0^\infty \eta_\alpha(\theta)d\theta = 1$.

Preuve

Soit $\lambda > 0$, et on pose que

$$\vartheta(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}X(s)ds \qquad \chi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} g(s,X(s-\tau(s)))ds$$

et

$$\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(s,X(s-\tau(s)))ds \qquad \rho(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\sigma(s,X(s-\tau(s)))dW(s)$$

On applique la transformée de Laplace sur les deux termes de (5.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \vartheta(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}[\varphi(0)+g(0,\varphi)] - \chi(\lambda) + \frac{1}{\lambda^\alpha}\mathcal{A}\vartheta(\lambda) + \frac{1}{\lambda^\alpha}\omega(\lambda) + \frac{1}{\lambda^\alpha}\rho(\lambda) \\ &= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - \mathcal{A})^{-1}[\varphi(0)+g(0,\varphi)] - \lambda^\alpha(\lambda^\alpha I-\mathcal{A})^{-1}\chi(\lambda) \\ &\quad +(\lambda^\alpha I-\mathcal{A})^{-1}\omega(\lambda) + (\lambda^\alpha I-\mathcal{A})^{-1}\rho(\lambda) \\ &= \lambda^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}\mathcal{S}(s)[\varphi(0)+g(0,\varphi)]ds - \lambda^\alpha\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}\mathcal{S}(s)\chi(\lambda)ds \\ &\quad +\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}\mathcal{S}(s)\omega(\lambda)ds + \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}\mathcal{S}(s)\rho(\lambda)ds \end{aligned}$$

$$(5.5)$$

Où I l'opérateur identité en H, on considére

$$\psi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-n\alpha-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin(n\pi\alpha)$$

la transformée de Laplace de ψ est donnée par

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\theta}\psi_\alpha(\theta)d\theta = e^{-\lambda^\alpha} \tag{5.6}$$

où $\alpha \in (0,1)$

D'apèrs (5.6), on a

$$\begin{aligned}
\lambda^{\alpha-1}\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}\mathcal{S}(s)[\varphi(0)+g(0,\varphi)]ds &= \int_0^\infty \alpha(\lambda t)^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha s}\mathcal{S}(t^\alpha)[\varphi(0)+g(0,\varphi)]dt \\
&= \int_0^\infty -\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}[e^{-(\lambda t)^\alpha s}]\mathcal{S}(t^\alpha)[\varphi(0)+g(0,\varphi)]dt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \theta\psi_\alpha(\theta)e^{-\lambda t\theta}\mathcal{S}(t^\alpha)[\varphi(0)+g(0,\varphi)]d\theta dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{S}(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha})[\varphi(0)+g(0,\varphi)]d\theta\right]dt
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}\mathcal{S}(s)\omega(\lambda)ds \\
&= \int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha}\mathcal{S}(t^\alpha)\omega(\lambda)dt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha}\mathcal{S}(t^\alpha)e^{-\lambda s}f(s,X(s-\tau(s)))dsdt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\psi_\alpha(\theta)e^{-(\lambda t\theta)}\mathcal{S}(t^\alpha)e^{-\lambda s}t^{\alpha-1}f(s,X(s-\tau(s)))d\theta dsdt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\psi_\alpha(\theta)e^{-\lambda(t+s)}\mathcal{S}(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha})\frac{t^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}f(s,X(s-\tau(s)))d\theta dsdt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{S}(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha})f(s,X(s-\tau(s)))\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}d\theta ds\right]dt
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}\mathcal{S}(s)\rho(\lambda)ds \\
&= \int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha}\mathcal{S}(t^\alpha)\rho(\lambda)dt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha}\mathcal{S}(t^\alpha)e^{-\lambda s}\sigma(s,X(s-\tau(s)))dW(s)dt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\psi_\alpha(\theta)e^{-(\lambda t\theta)}\mathcal{S}(t^\alpha)e^{-\lambda s}t^{\alpha-1}\sigma(s,X(s-\tau(s)))d\theta dW(s)dt \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\psi_\alpha(\theta)e^{-\lambda(t+s)}\mathcal{S}(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha})\frac{t^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}\sigma(s,X(s-\tau(s)))d\theta dW(s)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[\alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{S}(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha})\sigma(s,X(s-\tau(s)))\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}d\theta dW(s)\right]dt
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Et

$$\begin{aligned}
&\textstyle\lambda^\alpha\int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s}\mathcal{S}(s)\chi(\lambda)ds \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha\lambda^\alpha t^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha}\mathcal{S}(t^\alpha)e^{-\lambda s}g(s,X(s-\tau(s)))dsdt \\
&= \int_0^\infty\left[\int_0^\infty -\mathcal{S}(t^\alpha)e^{-\lambda s}g(s,X(s-\tau(s)))ds\right]de^{-(\lambda t)^\alpha} \\
&= \left(e^{-(\lambda t)^\alpha}\int_0^\infty -\mathcal{S}(t^\alpha)e^{-\lambda s}g(s,X(s-\tau(s)))ds\right)\Big|_{t=0}^\infty \\
&+ \int_0^\infty\int_0^\infty \alpha t^{\alpha-1}e^{-(\lambda t)^\alpha}\mathcal{A}\mathcal{S}(t^\alpha)e^{-\lambda s}g(s,X(s-\tau(s)))dsdt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left[g(t,X(t-\tau(t)))+\alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{A}\mathcal{S}(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha})g(s,X(s-\tau(s)))\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}d\theta ds\right]dt
\end{aligned} \tag{5.10}$$

D'après (5.5) et (5.7)-(5.10) on a :

$$
\begin{aligned}
\vartheta(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Bigg[\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{S}(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha})[\varphi(0)+g(0,\varphi)]d\theta \\
&- g(t,X(t-\tau(t))) - \alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{AS}(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha})g(s,X(s-\tau(s)))\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}d\theta ds \\
&+ \alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{S}(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha})f(s,X(s-\tau(s)))\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}d\theta ds \\
&+ \alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{S}(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha})\rho(s,X(s-\tau(s)))\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}d\theta dW(s)\Bigg]dt
\end{aligned}
$$

On applique l'inversion de transformation de Laplace, on obtient :

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{S}(\frac{t^\alpha}{\theta^\alpha})[\varphi(0)+g(0,\varphi)]d\theta \\
&+ g(s,X(s-\tau(s))) + \alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{AS}(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha})g(s,X(s-\tau(s)))\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}d\theta ds \\
&+ \alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{S}(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha})f(s,X(s-\tau(s)))\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}d\theta ds \\
&+ \alpha\int_0^t\int_0^\infty \psi_\alpha(\theta)\mathcal{S}(\frac{(t-s)^\alpha}{\theta^\alpha})\rho(s,X(s-\tau(s)))\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\theta^\alpha}d\theta dW(s) \\
&= \int_0^\infty \eta_\alpha(\theta)S(t^\alpha\theta)[\varphi(0)+g(0,\varphi)]d\theta - g(t,X(t-\tau(t))) \\
&\quad -\alpha\int_0^t\int_0^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\eta_\alpha(\theta)\mathcal{AS}((t-s)^\alpha\theta)g(s,X(s-\tau(s)))d\theta ds \\
&\quad +\alpha\int_0^t\int_0^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\eta_\alpha(\theta)\mathcal{S}((t-s)^\alpha\theta)f(s,X(s-\tau(s)))d\theta ds \\
&\quad +\alpha\int_0^t\int_0^\infty \theta(t-s)^{\alpha-1}\eta_\alpha(\theta)\mathcal{S}((t-s)^\alpha\theta)\sigma(s,X(s-\nu(s)))d\theta dW(s)
\end{aligned}
$$

où $\eta_\alpha(\theta) = \frac{1}{\alpha}\theta^{-1-\frac{1}{\alpha}}\psi_\alpha(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}) \geq 0$ est une fonction de densité de probabilité définie sur $(0,\infty)$. $\square$

D'après le lemme (5.2), nous présentons la définition suivante de solution milde d'équation (5.1) comme suite :

Définition 5.1. Le processus stochastique $\{X(t) : t \in [0,T], 0 \leq T < \infty\}$ est appelé la solution milde d'équation (5.1) si

(i) $X(t)$ est $\mathcal{F}_t$-adaptée, $t \geq 0$.

(ii) $X(t) \in H$ est càdlàg sur $t \in [0,T]$ presque sûrement et pour chaque tout $t \in [0,T]$ la fonction $(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{A}\mathcal{T}_\alpha(t-s)g(s, X(s-\tau(s)))$ est intégrable, de telle sorte que

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathcal{S}_\alpha(t)[\varphi(0)+g(0,\varphi)] - g(t, X(t-\tau(t))) \\ &\quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{A}\mathcal{T}_\alpha(t-s)g(s, X(s-\tau(s)))ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)f(s, X(s-\tau(s)))ds \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)\sigma(s, X(s-\nu(s)))dW(s) \end{aligned} \tag{5.11}$$

(iii) $X_0(.) = \varphi \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}([m(0),0], H)$

où

$$\mathcal{S}_\alpha(t)X = \int_0^\infty \eta_\alpha(\theta)\mathcal{S}(t^\alpha\theta)Xd\theta$$

$$\mathcal{T}_\alpha(t)X = \alpha\int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)\mathcal{S}(t^\alpha\theta)Xd\theta$$

On mentionne quelques proprétes de $\mathcal{S}_\alpha(t)$ et $\mathcal{T}_\alpha(t)$ suivants :

Lemme 5.3.
Si les hypothèses précédentes sur $\mathcal{S}(t)$, $t \geq 0$ et $\mathcal{A}$ sont vérifiée on a :

(i) $\mathcal{S}_\alpha(t)$ et $\mathcal{T}_\alpha(t)$ sont fortement continues c'est à dire, pour tout $X \in E$, et $0 \leq t' < t''$ on a. $\left|\mathcal{S}_\alpha(t'')X - \mathcal{S}_\alpha(t')X\right| \to 0$ et $\left|\mathcal{T}_\alpha(t'')X - \mathcal{T}_\alpha(t')X\right| \to 0$, lorsque $t'' - t' \to 0$

(ii) pour tout $X \in H$, $\beta \in (0,1)$ et $\eta \in (0,1]$ on a :

a)

$$\mathcal{A}\mathcal{T}_\alpha(t)X = \mathcal{A}^{1-\beta}\mathcal{T}_\alpha(t)\mathcal{A}^\beta X \tag{5.12}$$

b)

$$|\mathcal{A}^\eta\mathcal{T}_\alpha(t)| \leq \frac{\alpha C_\eta}{t^{\alpha\eta}}\frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(1+\alpha(1-\eta))} \quad t \in [0,T]$$

Preuve (i) pour tout $X \in E$ et $0 \leq t^{'} < t^{''}$, on a :
$\left|\mathcal{T}_\alpha(t^{''})X - \mathcal{T}_\alpha(t^{'})X\right|$

$$\begin{aligned}
&= \left|\alpha\int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)\mathcal{S}((t^{''})^\alpha\theta)Xd\theta - \alpha\int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)\mathcal{S}((t^{'})^\alpha\theta)Xd\theta\right| \\
&= \left|\alpha\int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)[\mathcal{S}((t^{''})^\alpha\theta) - \mathcal{S}((t^{'})^\alpha\theta)]Xd\theta\right| \\
&\leq \alpha M\int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)\left|[\mathcal{S}((t^{''})^\alpha\theta - (t^{'})^\alpha\theta) - I]X\right|d\theta
\end{aligned}$$

D'après la continuité forte de $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ on a $\left|\mathcal{T}_\alpha(t^{''})X - \mathcal{T}_\alpha(t^{'})X\right| \to 0$ lorsque $t^{''} - t^{'} \to 0$, donc $\{\mathcal{T}_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ est continue forte, et on prouve de la même manière pour $\{\mathcal{S}_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$.

(ii) Pour tout $X \in E, \beta \in (0,1)$ and $\eta \in (0,1]$,

a) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathcal{T}_\alpha(t)X &= \alpha\int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)\mathcal{A}\mathcal{S}(t^\alpha\theta)Xd\theta \\
&= \alpha\int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)\mathcal{A}^{1-\beta}\mathcal{S}(t^\alpha\theta)\mathcal{A}^{1-\beta}Xd\theta \\
&= \mathcal{A}^{1-\beta}\mathcal{T}_\alpha(t)\mathcal{A}^\beta X
\end{aligned}$$

b) Comme

$$\int_0^\infty \frac{1}{\theta^\nu}\psi_\alpha(\theta)d\theta = \frac{\Gamma(1+\frac{\nu}{\alpha})}{\Gamma(1+\alpha)}$$

Alors

$$\int_0^\infty \theta^\nu\eta_\alpha(\theta)d\theta = \int_0^\infty \theta^{-\alpha\nu}\psi_\alpha(\theta)d\theta = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\alpha\nu)} \qquad \square$$

Et d'après (5.2), on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}^\eta\mathcal{T}_\alpha(t)| &= \left|\alpha\int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)\mathcal{A}^\eta\mathcal{S}(t^\alpha\theta)Xd\theta\right| \\
&\leq \alpha\int_0^\infty \theta\eta_\alpha(\theta)\frac{C_\eta}{(t^\alpha\theta)^\eta}|X|\,d\theta \\
&\leq \frac{\alpha C_\eta|X|}{(t^\alpha\eta)^\eta}\int_0^\infty \theta^{1-\eta}\eta_\alpha(\theta)d\theta \\
&\leq \frac{\alpha C_\eta}{t^{\alpha\eta}}\frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(1+\alpha(1-\eta))}|X| \quad t \in [0,T]
\end{aligned}$$

Dans cete chapitre, nous démontrons l'existence, l'unicité et la stabilité de solution d'équations différentielles stochastiques (5.1), on utilisant la théorème de point fixe de Banach 1.9.

Pour obtient l'existence et la stabilité de la solution à (5.1), On suppose les hypothèses suivantes :

(H_1) Ils existent deux constantes $M \geq 1$ et $a > 0$ tel que $|S(t)| \leq Me^{-at}$

(H_2) Il existe une constante positive L_1, pour tout $t \geq 0$ et $X,Y \in H$ telle que

$$\begin{aligned} |f(t,X) - f(t,Y)| &\leq L_1|X-Y| \\ |\sigma(t,X) - \sigma(t,Y)| &\leq L_1|X-Y| \end{aligned} \tag{5.13}$$

(H_3) Il existe $0 < \beta < 1$ telle que g appartient à H_β, où $(-\mathcal{A})^\beta g$ est continue et il existe un constant positive M_g telle que

$$\left|(-\mathcal{A})^\beta g(t,X) - (-\mathcal{A})^\beta g(t,Y)\right| \leq M_g|X-Y| \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad t \geq 0 \quad \textit{et} \quad X,Y \in H \tag{5.14}$$

(H_4)

$$\begin{aligned} \theta &= \Big[4^{(p-1)}|(-A)^{(-\beta)}|^p M_g^p + 4^{p-1}M_g^p k(\alpha,\beta)(\frac{T^{\alpha\beta}}{\alpha\beta})^p + 4^{p-1}\alpha^p M^p L_1^p L^p \\ &\qquad + 4^{p-1}C_p\alpha^p M^p L_1^p L'^{\frac{p}{2}}\Big] \\ &< 1 \end{aligned}$$

Avec $C_p = (\frac{p(p-1)}{2})^{\frac{p}{2}}$, $M_t = \int_0^t \theta\eta_\alpha(\theta)e^{-at^\alpha\theta}d\theta$, $L = \int_0^T M_{t-s}(t-s)^{\alpha-1}ds$ et $\int_0^T [M_{t-s}(t-s)^{\alpha-1}]^2 ds$.

(H_5) $g(t,0) = 0$, $f(t,0) = 0$, $\sigma(t,0) = 0$

Il est évident que d'équation (5.1) admet un solution trivial si $\varphi = 0$ dans l'hypothèse (H_5).

Lemme 5.4. *[59]*

Soient $p \geq 2$, $t > 0$ et $\Phi \in \mathcal{L}(K,H)$ telle que $\mathbb{E}\int_0^t |\Phi(s)|_{\mathcal{L}}^p ds < \infty$ telle que

$$\sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}\left|\int_0^s \Phi(u)dW(u)\right|^p \leq \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_0^t (\mathbb{E}\,|\Phi(s)_{\mathcal{L}}^p|)^{\frac{2}{p}} ds\right)^{\frac{p}{2}}$$

5.2 Existence et l'unicité de la solution

Dans cette partie nous allons montrer l'existence et l'unicité de la solution de l' équation (5.1).

Théorème 5.5. *Soit $p \geq 2$ un entier. on supposons que les conditions (H_1)-(H_4) sont vérifiée, alors l'équations différentielle stochastiques neutre d'ordre fractionnaire non linèaire (5.1) admet une et une seule solution.*

Preuve On note par $\mathbb{B}$ l'espace des processus $\mathcal{F}_0$-adaptée, $\phi(t,w) : [m(0),0] \times \Omega \to \mathbb{R}$, continue presque sûrement pour w fixé et elle vérifiant $\phi(t,w) = \phi(t)$ pour $t \in [m(0),0]$ et $\mathbb{E}|\phi(t,w)|^p \to 0$ lorsque $t \to \infty$, $\mathbb{B}$ est un espce de Banach muni de la norm definit par $|\varphi|_{\mathbb{B}} = \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}|\varphi(t)|_H^p$, on définit un opérateur non linèaire $\Psi : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ telle que $(\Psi X)(t) = \varphi(t)$, $t \in [m(0),0]$ et pour $t \geq 0$.

$$\begin{aligned}(\Psi X)(t) &= \mathcal{S}_\alpha(t)[\varphi(0) + g(0,\varphi)] - g(t, X(t-\tau(t)))\\ &\quad - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{A}\mathcal{T}_\alpha(t-s)g(s, X(s-\tau(s)))ds\\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)f(s, X(s-\tau(s)))ds\\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)\sigma(s, X(s-\nu(s)))dW(s)\end{aligned} \tag{5.15}$$

Il suffit de montrer que l' opérateur Ψ a un point fixe en H. Pour prouver ce résultat, on utilise le théorème de point fixe.

D'abord on va vérifier que $\Psi(\mathbb{B}) \in \mathbb{B}$ c'est à dire

i) Ψ est continue du p^{em}moment sur l'intérvalle $[0,\infty)$.

ii) $\mathbb{E}|(\Psi X)(t)|^p \to 0$, lorsque $t \to \infty$.

i) On va montre que Ψ est continue du p^{em}moment sur l'intérvalle $[0,\infty)$: Soit $X \in \mathfrak{B}$, pour $t_1 \geq 0$, et pour $|h|$ est suffisamment petit, on obtient

$$\mathbb{E}\left|(\Psi X)(t_1+h) - (\Psi X)(t_1)\right|^p \leq 5^{p-1}\sum_{i=1}^{5}\mathbb{E}\left|F_i(t_1+1) - F_i(t_1)\right|^p \tag{5.16}$$

On note

$$\mathbb{E}\left|F_1(t_1+h)-F_1(t_1)\right|^p=\mathbb{E}\left|(\mathcal{S}_\alpha(t_1+1)-\mathcal{S}_\alpha(t_1))[\varphi(0)-g(0,\varphi)]\right|^p \tag{5.17}$$

La continuité forte de $\mathcal{S}_\alpha(t)$ est impliqué que la côté droite de (5.17) tend vers 0 lorsque $|h|\to 0$, et d'après le lemme 5.3 et l'inégalité de Hõlder 3.3 avec $q=\frac{p}{p-1}$ et $p=p$, le troisième terme de (5.16) devient :
$\mathbb{E}\left|F_3(t_1+h)-F_3(t_1)\right|^p$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left|\int_0^{t_1+h}(t+h-s)^{\alpha-1}(-\mathcal{A})\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)g(s,X(s-\tau(s)))ds\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}(-\mathcal{A})\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)g(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_{t_1}^{t_1+1}(t_1+h-s)^{\alpha-1}(-\mathcal{A})\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)g(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p\\
&\quad+3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^{t_1}[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}](-\mathcal{A})\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times g(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p\\
&\quad+3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}(-\mathcal{A})[\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)-\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)]\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times g(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_{t_1}^{t_1+h}(t+h-s)^{\alpha-1}\left|(-\mathcal{A})^{1-\beta}\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\right|\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\left|(-\mathcal{A})^{\beta}g(s,X(s-\tau(s)))\right|ds\right)^p\\
&\quad+3^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^{t_1}[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]\right.\\
&\qquad\left.\times\left|(-\mathcal{A})^{1-\beta}\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\right|\times\left|(-\mathcal{A})^{\beta}g(s,X(s-\tau(s)))\right|ds\right)^p\\
&\quad+3^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\left|(-\mathcal{A})^{1-\beta}\right|\times\left|\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)-\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)\right|\right.\\
&\qquad\qquad\left.\times\left|(-\mathcal{A})^{\beta}g(s,X(s-\tau(s)))\right|ds\right)^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \ 3^{p-1}k(\alpha,\beta)M_g^p\left(\int_{t_1}^{t_1+1}(t+h-s)^{\alpha\beta-1}ds\right)^{p-1}\\
&\qquad\times\int_{t_1}^{t_1+1}(t+h-s)^{\alpha\beta-1}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p ds\\
&\quad+3^{p-1}k(\alpha,\beta)M_g^p\times\left(\int_0^{t_1}\frac{(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}}{(t+h-s)^{\alpha(\beta-1)}}ds\right)^{p-1}\\
&\qquad\times\int_0^{t_1}\frac{(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}}{(t+h-s)^{\alpha(\beta-1)}}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p ds\\
&\quad+3^{p-1}\epsilon^p M_g^p\left|(-\mathcal{A})^{1-\beta}\right|^p\left(\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}ds\right)^{p-1}\\
&\qquad\times\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \ 3^{p-1}k(\alpha,\beta)M_g^p\left(\frac{h^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\right)^{p-1}\\
&\qquad\times\int_{t_1}^{t_1+h}(t_1+h-s)^{\alpha\beta-1}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p ds\\
&\quad+3^{p-1}k(\alpha,\beta)M_g^p\times\left(\int_0^{t_1}\frac{(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}}{(t_1+h-s)^{\alpha(\beta-1)}}ds\right)^{p-1}\\
&\qquad\times\int_0^{t_1}\frac{(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}}{(t+h-s)^{\alpha(\beta-1)}}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p ds\\
&\quad+3^{p-1}\epsilon^p M_g^p\left|(-\mathcal{A})^{1-\beta}\right|^p\left(\frac{t_1^{\alpha}}{\alpha}\right)^{p-1}\\
&\qquad\times\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p ds
\end{aligned} \tag{5.18}$$

où : $k(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^p\Gamma^p_{1+\beta}C^p_{1-\beta}}{\Gamma^p_{(1+\alpha\beta)}}$. Etant donné que ϵ est suffisamment petit, le côté droit de l'équation (5.18) tend vers zéro lorsque $|h|\to 0$.

On considére que

$\mathbb{E}\left|F_4(t_1+h)-F_4(t_1)\right|^p$

$$\begin{aligned}
&= \ \mathbb{E}\left|\int_0^{t_1+h}(t+h-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\times f(s,X(s-\tau(s)))ds\right.\\
&\qquad\left.-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)f(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\ & 3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_{t_1}^{t_1+h}(t_1+h-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\right. \\
& \qquad \times f(s,X(s-\tau(s)))ds|^p \\
& +3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^{t_1}[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]\right. \\
& \quad \times\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)f(s,X(s-\tau(s)))ds|^p \\
& +3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}[\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)-\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)]f(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p \\
\leq\ & 3^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_{t_1}^{t_1+h}(t_1+h-s)^{\alpha-1}\left|\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\right|\times\left|f(s,X(s-\tau(s)))\right|ds\right)^p \\
& +3^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^{t_1}[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]\right. \\
& \quad \times\left|\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\right|\times\left|f(s,X(s-\tau(s)))\right|ds)^p \\
& +3^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\left|\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)-\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)\right|\right. \\
& \qquad \times\left|f(s,X(s-\tau(s)))\right|ds)^p
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Hõlder 3.3 avec $q=\frac{p}{p-1}$ et $p=p$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\leq\ & 3^{p-1}L_1^pM^p\alpha^p\left(\int_{t_1}^{t_1+h}M_{t_1+h-s}(t_1+h-s)^{\alpha-1}ds\right)^{p-1} \\
& \quad \times\int_{t_1}^{t_1+h}M_{t_1+h-s}(t_1+h-s)^{\alpha-1}\times\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^pds \\
& +3^{p-1}L_1^pM^p\alpha^p\times\left(\int_0^{t_1}M_{t_1+h-s}\left[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]ds\right)^{p-1} \\
& \quad \times\int_0^{t_1}M_{t_1+h-s}\left[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^pds \\
& +3^{p-1}\epsilon^pL_1^p\left(\frac{t_1^\alpha}{\alpha}\right)^{p-1}\times\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^pds
\end{aligned}$$

Par conséquence, le côté droit de l' équation ci-dessus tend vers zéro lorsque $|h|\to 0$ et ϵ suffisamment petit. De plus, on a

$\mathbb{E}\left|F_5(t_1+h)-F_5(t_1)\right|^p$

$$\begin{aligned}
=\ & \mathbb{E}\left|\int_0^{t_1+h}(t+h-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\times\sigma(s,X(s-\nu(s)))dW(s)\right. \\
& \left.-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)\sigma(s,X(s-\nu(s)))dW(s)\right|^p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq \quad & 3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_{t_1}^{t_1+h}(t_1+h-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\right. \\
& \qquad \times\sigma(s,X(s-\nu(s)))dW(s)|^p \\
& +3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^{t_1}[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]\right. \\
& \qquad \times\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\sigma(s,X(s-\nu(s)))dW(s)|^p \\
& +3^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}[\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)-\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)]\right. \\
& \qquad \times\sigma(s,X(s-\nu(s)))dW(s)|^p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq \quad & 3^{p-1}C_p\mathbb{E}\left(\int_{t_1}^{t_1+h}(t_1+h-s)^{2(\alpha-1)}\left[\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\right|^2\right. \\
& \qquad \left.\times\left|\sigma(s,X(s-\nu(s)))\right|^2ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
& +3^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^{t_1}[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]^2\times\left|\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)\right|^2\right. \\
& \qquad \left.\times\left|\sigma(s,X(s-\nu(s)))\right|^2ds\right)^{\frac{P}{2}} \\
& +3^{p-1}C_p\mathbb{E}\left(\int_0^{t_1}(t_1-s)^{2(\alpha-1)}\times\left|\mathcal{T}_\alpha(t_1+h-s)-\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)\right|^2\right. \\
& \qquad \left.\times\left|\sigma(s,X(s-\nu(s)))\right|^2ds\right)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}
$$

D'aprés l'inégalité de Hõlder 3.3 avec $q=\frac{p}{p-2}$ et $p=\frac{p}{2}$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\leq \quad & 3^{p-1}C_pL_1^pM^p\alpha^p\times\left(\int_{t_1}^{t_1+h}(M_{t_1+h-s}(t_1+h-s)^{\alpha-1})^{\frac{p}{(p-2)}}ds\right)^{\frac{p-2}{2}} \\
& \times\int_{t_1}^{t_1+h}(M_{t_1+h-s}(t_1+h-s)^{\alpha-1})^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^pds \\
& +3^{p-1}C_pL_1^pM^p\alpha^p \\
& \times\left(\int_0^{t_1}(M_{t_1+h-s}\left[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right])^{\frac{p}{p-2}}ds\right)^{\frac{p-2}{2}} \\
& \times\int_0^{t_1}M_{t_1+h-s}\left[(t_1+h-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right])^{\frac{p}{2}}\times\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^pds \\
& +3^{p-1}\epsilon^pC_pL_1^p\left(\frac{t_1^{\frac{p\alpha-2}{p-2}}}{\frac{p\alpha-2}{p-2}}\right)^{\frac{(p-2)}{2}}\times\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\frac{p(\alpha-1)}{2}}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^pds
\end{aligned}
$$

Donc le côté droit de l'équation ci-dessus tend vers zéro lorsque $|h|\to 0$, en même façon on montre que $F_2\to 0$ lorsque $|h|\to 0$. Ainsi $\Psi(\mathfrak{B})$ est continue du p^{em}moment en $[0,\infty)$.

ii) On va montre que $\mathbb{E}|(\Psi X)(t)|^p \to 0$, lorsque $t\to\infty$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|(\Psi X)(t)|^p \;\leq\;& 6^{p-1}\mathbb{E}\,|\mathcal{S}_\alpha(t)\varphi(0)|^p + 6^{p-1}\mathbb{E}\,|\mathcal{S}_\alpha(t)g(0,\varphi)|^p \\
&+6^{p-1}\mathbb{E}\,|g(t,X(t-\tau(t)))|^p \\
&+6^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}(-\mathcal{A})\mathcal{T}_\alpha(t_1-s)\times g(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p \\
&+6^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)f(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p \\
&+6^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^{t}(t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)\times\sigma(s,X(s-\nu(s)))dW(s)\right|^p
\end{aligned} \tag{5.19}$$

En utilisant les hypothèses (H_1), (H_3) et (H_4) pour on montre que $\mathbb{E}\,|(\Psi X)(t)|^p\to 0$ lorsque $t\to\infty$. On a :

$$6^{p-1}\mathbb{E}\,|\mathcal{S}_\alpha(t)\varphi(0)|^p \leq 6^{p-1}M^p\left(\int_0^\infty \eta_\alpha(\theta)e^{-\alpha t^\alpha\theta}d\theta\right)^p |\varphi|^p_{\mathfrak{B}}\to 0 \quad \text{lorsque} \quad t\to\infty$$

$$6^{p-1}\mathbb{E}\,|\mathcal{S}_\alpha(t)\varphi(0,\varphi)|^p \leq 6^{p-1}M^p\left(\int_0^\infty \eta_\alpha(\theta)e^{-\alpha t^\alpha\theta}d\theta\right)^p \left|(-\mathcal{A}^{-\beta})\right|^p M_g^p\,|\varphi|^p_{\mathfrak{B}}$$

$\to 0$ lorsque $t\to\infty$

$$6^{p-1}\mathbb{E}\,|g(t,X(t-\tau(t)))|^p \leq 6^{p-1}\left|(-\mathcal{A}^{-\beta})\right|^p M_g^p\mathbb{E}\,|X(t-\tau(t))|^p \tag{5.20}$$

Pour $X(t)\in\mathfrak{B}$ et pour $\epsilon>0$ il existe $t_1>0$ telle que $\mathbb{E}\,|X(t-\tau(t))|^p\leq\epsilon$ pour $t\geq t_1$. Donc

$$6^{p-1}\mathbb{E}\,|g(t,X(t-\tau(t)))|^p \to 0 \quad \text{lorsque} \quad t\to\infty \tag{5.21}$$

Pour le quatrième côté de (5.19) on a :

$$\begin{aligned}
&6^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(-\mathcal{A})\mathcal{T}_\alpha(t-s)g(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p \\
&\quad \leq \; 6^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|(-\mathcal{A})^{1-\beta}\mathcal{T}_\alpha(t-s)\right|\right. \\
&\qquad \times \left|(-A^\beta)g(s,X(s-\tau(s)))\right| ds\Big)^p \\
&\quad \leq \; 6^{p-1}k(\alpha,\beta)M_g^p\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha\beta-1}\right)^{p-1} \\
&\qquad \times \int_0^{t_1+h}(t-s)^{\alpha\beta-1}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p \\
&\quad \leq \; 6^{p-1}k(\alpha,\beta)M_g^p\left(\frac{T^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\right)^{p-1} \\
&\qquad \times \int_0^{t_1+h}(t-s)^{\alpha\beta-1}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p ds \\
&\qquad \to 0 \quad si \quad t\to\infty
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Pour le cinquième côté de (5.19) on a :

$$\begin{aligned}
&6^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)f(s,X(s-\tau(s)))ds\right|^p \\
&\quad \leq \; 6^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|\mathcal{T}_\alpha(t-s)\right|\right. \\
&\qquad \times \left|f(s,X(s-\tau(s)))\right| ds)^p \\
&\quad \leq \; 6^{p-1}L_1^pM^p\alpha^p\times\left(\int_0^t M_{t-s}(t-s)^{\alpha-1}ds\right)^{p-1} \\
&\qquad \times \int_0^t M_{t-s}(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p ds
\end{aligned}$$

Pour le sixième côté de (5.19) on a

$$\begin{aligned}
&6^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s)\times\sigma(s,X(s-\nu(s)))dW(s)\right|^p \\
&\quad \leq \; 6^{p-1}C_p\mathbb{E}\left|\int_0^t (t-s)^{2(\alpha-1)}\left|\mathcal{T}_\alpha(t-s)\right|^2\right. \\
&\qquad \times \left.\left|\sigma(s,X(s-\nu(s)))\right|^2 ds\right|^{\frac{p}{2}} \\
&\quad \leq \; 6^{p-1}C_pL_1^pM^p\alpha^p \\
&\qquad \times\left(\int_0^t [M_{t-s}(t-s)^{\alpha-1}]^{\frac{p}{p-2}}ds\right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&\qquad \times \int_0^t M_{t-s}(t-s)^{\alpha-1}\mathbb{E}\left|X(s-\tau(s))\right|^p ds
\end{aligned}$$

(5.23)

Alors (5.23) tend à zéro lorsque $t \to \infty$, Donc $\mathbb{E}\,|\Psi X(t)|^p \to 0$ lorsque $t \to \infty$,

En conclure que $\Psi(B) \in B$

Enfin, on va montre que Ψ est contractant. En effet, pour tout $X, Y \in \mathfrak{B}$, on a $\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\,|(\Psi X)(t) - (\Psi Y)(t)|^p$

$$\begin{aligned}
&\leq 4^{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\,|g(s, X(s-\tau(s))) - g(s, Y(s-\tau(s)))|^p \\
&+4^{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s) \times [g(s, X(s-\ tau(s))) - g(s, Y(s-\tau(s)))]ds\right|^p \\
&+4^{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s) \times [f(s, X(s-\tau(s))) - f(s, Y(s-\tau(s)))]ds\right|^p \\
&+4^{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{T}_\alpha(t-s) \times [\sigma(s, X(s-\nu(s))) - \sigma(s, Y(s-\tau(s)))]dW(s)\right|^p \\
&\leq 4^{p-1}\left|(-\mathcal{A})^{-\beta}\right|^p M_g^p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\,|X(t)-Y(t)|^p \\
&+4^{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|(-\mathcal{A})^{1-\beta}\mathcal{T}_\alpha(t-s)\right| \times \left|(-\mathcal{A})^{\beta}[g(s, X(s-\tau(s)))\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. -g(s, Y(s-\tau(s)))]\right| ds\right)^p \\
&+4^{p-1} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left|\mathcal{T}_\alpha(t-s)\right| \times |f(s, X(s-\tau(s))) - f(s, Y(s-\tau(s)))|\,ds\right)^p \\
&+4^{p-1}C_p \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left(\int_0^t (t-s)^{2(\alpha-1)}\left|\mathcal{T}_\alpha(t-s)\right|^2 \times |\sigma(s, X(s-\nu(s)))\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\sigma(s, Y(s-\nu(s)))|^2\,ds\right)^{\frac{p-2}{p}} \\
&\leq \Bigg[4^{p-1}\left|(-\mathcal{A})^{-\beta}\right|^p M_g^p + 4^{p-1}M_g^p k(\alpha,\beta)\left(\frac{T^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\right)^p \\
&+4^{p-1}L_1^pL^pM^p\alpha^p + 4^{p-1}C_pL_1^pL'^{\frac{p}{2}}M^p\alpha^p\mathbb{E}\,|X(t)-Y(t)|^p\Bigg] \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\,|X(t)-Y(t)|^p
\end{aligned}$$

(5.24)

Par conséquent, Ψ est une application contractant, donc il existe un point fixe unique, qui est une solution milde de (5.1). $\square$

5.3 Stabilité de la solution

Dans cette partie nous allons établir la stabilité asymptotique de la solution milde de l'équation (5.1).

Théorème 5.6. *Soit $p \geq 2$ un entier. on supposons que les condutions (H_1)-(H_4) sont vérifiée, alors l'équations différentielle stochastiques neutre d'ordre fractionnaire non linèaire (5.1) est assymptotiquement stable du p^{em}moment.*

Preuve

Pour montrer la stabilité asymptotique de la solution milde de (5.1), la première étape, on va montre la stabilité dans p^{em}moment.

Soit $\varepsilon > 0$, on choisis $\delta > 0$ tel que $\delta < \epsilon$ satisfait

$$\begin{aligned}\Big(6^{p-1}[M^p + M^p \left|(-\mathcal{A})^{-\beta}\right|^p M_g^p]\delta \quad &+ \quad 6^{p-1}\left[\left|(-\mathcal{A})^{-\beta}\right|^p M_g^p + M_g^p k(\alpha,\beta)\left(\frac{T^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\right)^p\right.\\ &+ \left.\quad L_1^p L^p M^p \alpha^p + C_p L_1^p L'^{\frac{p}{2}} M^p \alpha^p\right]\epsilon\Big) < \epsilon\end{aligned}$$

Si $X(t) = X(t,\varphi)$ une solution mild de (5.1) avec $|\varphi|_{\mathfrak{B}}^p < \delta$ telle que $(\Psi X)(t) = X(t)$ satisfait : $\mathbb{E}\,|X(t)|^p < \epsilon$ pour $t \geq 0$. On note que $\mathbb{E}\,|X(t)|^p < \epsilon$ pour $t \in [m(0),0]$. S'il exist $\bar{t}$, telle que $\mathbb{E}\,|X(\bar{t})|^p = \epsilon$ et $\mathbb{E}\,|X(s)|^p < \epsilon$ pour $s \in [m(0),\bar{t}]$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|X(\bar{t})|^p \quad &\leq \quad 6^{p-1}[M^p(\eta_\theta e^{-\alpha t^\alpha \theta})^p + M^p(\eta_\alpha(\theta)e^{-\alpha t^\alpha \theta})^p \left|(-\mathcal{A})^{-\beta}\right|^p M_g^p]\delta\\ &\quad +6^{p-1}\left[\left|(-\mathcal{A})^{-\beta}\right|^p M_g^p + M_g^p k(\alpha,\beta)\left(\frac{T^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\right)^p + L_1^p L^p M^p\alpha^p + C_p L_1^p L'^{\frac{p}{2}} M^p \alpha^p\right]\epsilon\\ &< \quad \epsilon\end{aligned} \tag{5.25}$$

□

Ce qui contre dit la définition de $\bar{t}$. Par conséquent, le solution milde de (5.1) est asymptotiquement stable du p^{em}moment.

En particulier, lorsque $p = 2$ du théorème 5.5, on obtenir les résultats suivants :

Théorème 5.7. *[59]*

On supposons que les conditions (H_1)-(H_3) détiennent. Alors, l'équation (5.1) est asymptotiquement stable du moyenne carré si $4M_g^2[\left|(-\mathcal{A})^{-\beta}\right|^2 + V(\alpha,\beta)\left(\frac{T^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\right)^2] + 4\alpha^p M^p L_1^2[L^2+$

$L^{'}] < 1$ *où :* $V(\alpha,\beta) = \alpha^2\Gamma^2_{(1+\beta)}C^2_{1-\beta}/\Gamma^2_{(1+\alpha\beta)}$ *lorsque* $g \equiv 0$, $p = 2$ *se réduit que (5.1) de la forme suivante*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha_0 X(t) = \mathcal{A}X(t) + f(t, X(t-\tau(t))) + \sigma(t, X(t-\nu(t)))\frac{dW}{dt} \quad t \geq 0 \\ X_0 = \varphi \in \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}([m(0), 0], H) \end{cases} \tag{5.26}$$

D'aprés des théorèmes 5.5 et 5.7 on peut facilement obtenir les résultats suivants :

Corollaire 5.8. *[59]*
On suppose qui (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées alors l'équation* (5.11) *est asymptotiquement stable du moyenne carré si* $2\alpha^2M^2L_1^2[L^2 + L^{'}] < 1$.

5.4 Exemple

Exemple 5.1. Considérons l'équation différentielle partielle fractionnée stochastique non linéaire avec retard infini sous la forme suivante

$$\begin{cases} {}^cD[u(t,y) + \hat{g}(t, u(t-\tau, y))] = \frac{\partial^2 u(t,y)}{\partial y^2} + \hat{f}(t, u(t-\tau, y)) + \hat{\sigma}(t, u(t-\tau), y)\frac{dW}{dt} \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \\ u(t,y) = \phi(t,y) \quad y \in [0,\pi], t \leq 0 \end{cases} \tag{5.27}$$

où $W(t)$ désigne un processus de Wiener cylindrique standard et un mouvement brownien un-dimensionne standard, pour écrire le système (5.27) à la forme (5.1), on considère l'éspace $H = K = L^2[0,\pi]$, on définie l'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ avec $\mathcal{A}w = w^{''}$ dans le domaine

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ w \in X; w, w^{'} \quad \textit{est} \quad \textit{absolument} \quad \textit{continue} \quad w^{''} \in X, \quad w(0) = w(\pi) = 0 \Big\}$$

$$\mathcal{A}w = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(w, w_n)w_n, w \in \mathcal{D}(A)$$

où : $w_n(s) = \sqrt{2}\sin(ns), n = 1, 2, \ldots$ est l'ensemble orthogonal de vecteurs propres de $\mathcal{A}$. On sait que $\mathcal{A}$ un générateur de semi-groupe analytique compact $\mathcal{S}(t), t \geq 0$ dans X et

$$\mathcal{S}(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t}(w, w_n)w_n$$

Il est bien connu que $|\mathcal{S}(t)| \leq e^{-\pi^2 t}$, on prend $p = 2$, $M = 1$ on peut obtenir l'inégalité $4[\left|(-\mathcal{A})^{-\beta}\right|^2 + V(\alpha, \beta)\left(\frac{\pi^{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\right)^2 + \alpha^2 L_1^2(L^2 + L^{'})] < 1$. De plus, si on suppose que des conditions appropriées de $\hat{g}$, $\hat{f}$ et $\hat{\sigma}$ pour vérifier les hypothèses de Théorème 5.7, on peut conclure que la solution milde de (5.27) est asymptotiquement stable du moyenne carré .

Conclusion

Le formalisme de la dérivation fractionnaire consiste á généraliser la notion de la dérivation aux ordres non entiers. L'étude de quelques phénomène en sciences physiques et en sciences pour l'ingénieur ont fait apparaître l'intégration d'ordre un demi dans les équations de chaleur. Dès lors, les développements ont été nombreux et différentes définitions de la dérivation non entier ont été établies, telles que la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Riemmann-liouville et au sens de Caputo.

L'approche de Caputo permet de considérer des conditions initiales faciles à interpréter, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Dans ce travail, nous avons présenté des notions générales et quelques définitions et notions préliminaires essentielles, utilisées dans la dérivation fractionnaire, et quelques propriétés de l'intégration et la dérivation de différents types d'ordre fractionnaire et calcul stochastique .

Comme application, nous avons développé un travail de Sakhtivel et al.(2012) sur l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique d'une équation différentielle stochastique neutre d'ordre fractionnaire avec retard infini.

Nous avons utilisé la théorie du point fixe de Banach et la théorie de somi groupe et le calcul stochastique pour démontrer l'existence, l'unicité, et la stabilité asymptotique de la solution.

Comme perspectives de ce travail, on peut étudier :

1. L'existence et la stabilité de la solution par le théorème de point fixe de Krasnoselskii.
2. L'existence et la stabilité de la solution pour une équation impulsive par le théorème de point fixe de Krasnoselskii.

Bibliographie

[1] Abd Elouahab. M, *Les systèmes chaotiques à dérivées fractionnaires*, Mémoire magistere, Université mentouri-cnostantine, 02-03-2009.

[2] Abd Elouahab. S, *les système chaoyiques à dérivation non entière*, Mémoire de magistère en mathématiques, Université de Constantine, 3-2009.

[3] Abi ayad. I, *Introduction aux equations differentielles stochastiques*, Mémoire Master, Université Aboubkr belkaid-Tlemcen 2012.

[4] Ahmed. H, Ahmed. M, "contrôlabilité d'équations stochastique fractionnelle de retard ", *Lobatchevski Journal of Mathematics*, vol. 30, no. 3, pp. 195-202, 2009.

[5] Allaire. G et Benaïm. M,"*Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance.*

[6] Bao. J, Hou. Z and Yuan. C, "Stability in distribution of mild solutions to stochastic partial differential equations", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 138, no. 6, pp.2169-2180, 2010.

[7] Belakroum. K, *Existance et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire*,Université Bordj Mokhtar Annaba, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, 2013.

[8] Benchohra. M, Graef. J. R and Hamani. S, "Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations", *Appl. Anal.* 8, 851-863, 7-2008.

[9] Bouleau. N, *Processus stochastiques et applicaions*, Hermann, éditeurs des sciences et des arts, numéro d'édition 6406, imprimeire Barnéoud, France, 9-2004.

[10] Brezis. H, *Analyse fonctionnelle*, 2^e tirage, M assorn, Paris, page 72, 1983.

[11] Byszewski. L, *Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional differential evolution nonlocal Cauchy problem*, Selected problems of mathematics, 25-33, 50, Anniv. Cracow Univ.Technol. Anniv. Issue, 6 Cracow Univ. Technol, Krakow, 1995.

[12] Caraballo. T and Liu. K, "Exponential stability of mild solutions of stochastic partial differential equations with delays," *Stochastic Analysis and Applications*, vol. 17, no. 5, pp. 743-763, 1999.

[13] Chang.Y.-K, Zhao. Z. -H et N'Guérékata. G. M, "Squaremean almost automorphic mild solutions to non-autonomous stochastic differential equations in Hilbert spaces", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 61, no. 2, pp. 384-391, 2011.

[14] Chang. Y. -K,Zhao. Z. -H et N'Guérékata. G. M, "A new composition theorem for square-mean almost automorphic functions and applications to stochastic differential equations", *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications A*, vol. 74, no. 6, pp. 2210-2219, 2011.

[15] Chang. Y.-K,Zhao. Z.-H, N'Guérékata. G. M and Ma. R, "Stepanov-like almost automorphy for stochastic processes and applications to stochastic differential equations," *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, vol. 12, no. 2, pp. 1130-1139, 2011.

[16] Chen. H, "Impulsive-integral inequality and exponential stability for stochastic partial differential equations with delays" ,*Statistics and Probability Letters*, vol. 80, no. 1, pp. 50-56, 2010.

[17] Diethelm. K and Freed. A. D, *On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity*, In Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[18] Dubois. F, Galucio. A. C and Point. N, "Introduction à la dérivation fractionnaire," *théorie et applications. Techniques de l'Ingénieur AF*. 13, 23. 5-10-2010.

[19] El-Borai. M. M, El-Nadi. K. E. -S , Mostafa. O. L et Ahmed. H. M, " l' équations Volterra avec les intégrales stochastiques fractionnaires", *Problèmes mathématiques en génie*, vol. 2004, non. 5,pp. 453-468, 2004.

[20] El-Borai. M.M, EI-Said EI-Nadi. K. and Fouad. H.A, "On some fractional stochastic delay differential equations", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 3, pp. 1165-1170, 2010.

[21] El-Borai. M. M, Moustafa. O. L and Ahmed. H. M, "Asymptotic stability of some stochastic evolution equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 144, no. 2-3, pp. 273-286, 2003.

[22] El-Sayed. A. M. A, "Fractional order evolution equations", *J. Fract. Calc*, 89-100, 7-1995.

[23] Erdélyi. A, *Higher Transcendental Functions*, volume 2, McGraw-Hill, New York, 1955.

[24] Erdélyi. A, *Higher Transcendental Functions*, volume 3, McGraw-Hill, New York, 1955.

[25] Fu. M. M et Liu. Z. X, "Square-mean almost automorphic solutions for some stochastic differential equations", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 138, no. 10, pp. 3689-3701, 2010.

[26] Gaul. L, Klein. P and Kempfle. S, *Damping description involving fractional operators*, Mech. Systems Signal Processing, 81-88, 5-1991.

[27] G. M, *Mittag Leffler sur la nouvelle fonction*, C. R. Académie des Sciences,137, 554-558 1903.

[28] G. M, *Mittag Leffler sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogéne*, Acta Mathematica, 29, 101-182, 1905.

[29] Granas. A and Dugundji. J, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[30] Hale. J and Verduyn Lunel. S, *Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences*, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[31] Halim. A, *Mouvement Brownien Exité*, Mémoire Magistere, Université 20 Aout 55 de skikda, 2009-2010.

[32] Hammouche. S, *Identification d'un modèle fractionnaire à l'aide de réseaux de neurones*, Mémoire Magistere, Université Mouloud Mammeri,Tizi-Ouzou, 26-6-2012.

[33] Haneche. M, *processus stochastiques et equation aux derivees partielles*, Mémoire Magistere, Université m'hamed Bougara Boumerdès, 29-6-2009.

[34] Hilfer. R, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[35] Houmor.T, *Analyse du chaos dans un système d'équations différentielles fractionnaires"* , Thèse Doctorat,Université de Constantine 1, 1 30-9-2014.

[36] Ishak. D, Abdelouaheb. A and Ahcene. D,"Stability by krasnoselskii's theorem in totally nonlinear neutral differential eguations," *Opuscula Math.* 33, no. 2 pp.255-272, 2013.

[37] Jacky. C et Isabelle. G, *Contributions au calcul des variations et au Principe du Maximum de Pontryagin en calculs time scale et fractionnaire*, Thèse de doctorat, Université de pau et des pays de l'adour, 18-6-2013.

[38] Jeanblanc. M, "*Cours de calcul stchastique*, Master 2IF Evrry, 9-2006.

[39] Jean-Jacques. R et Marie-Line. C, "Rappels de probabilité", *Préparation à, l'Agrégation Bordeaux 1*, page 22, 2012-2013.

[40] Jean-Christophe. B, "Processus stochastique," *M2 Mathématiques, Université de Rennes1*,12-20013.

[41] Kheireddine. B, *Existence et positivité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire*, Thèse Doctorat, Université baddji mokhtar annaba, 2013.

[42] Kilbas. A. A, Srivastava. H. M and Trujillo. J. J, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-HollandMathematical studies 204, Ed VanMill, Amsterdam, 2006.

[43] Kilbas. A, Srivastava. H. M. and Trujillo. J. J,*Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, 2006.

[44] Leulmi. S, *Inference statistique dans les modeles lineaires a temps continu Applications aux modèles carma*, Mémoire Magistere, Université mentouri cnstantine, 2008-2011.

[45] Lin. L, Liu. X, Fang. H, "Method of Upper and Lower Solutions for Fractional Differential Equations," *Elec.J.Diff.Eqs.*, 100,1-13-2012.

[46] Ludovic Dan. L, *La formule de lie-trotter pour les semi-groupes dortement continues*, Mémoire de recherche de mathématiques pures, Université Claude Bernard Lyon 1, 4-7-2001.

[47] Ludovic. L, *Semi-groupes integres d'operateurs, l'unicite des pre-generateurs et applications*, These de docteura, Université de Blaise pascal de clermont-ferrand, 31-3-2007.

[48] Maaz. M, *Introduction à la théorie dufiltrage stochastique*, Université Mohamed Khider Biskra, 2011-2012.

[49] Medjekal. H, *Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractinnaire Impulsive de temps infini dans un espace de Banach*, Mémoire de doctorat, Université de Badji Mokhtar Annaba, 2015.

[50] Miller. K. S and Ross. B, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York, 1993.

[51] Mokhtari. S, *Analyse fractionnaire appliquée aux systèmes différentiels non linéaire*, Mémoire Magistere, Université Badji Mokhtar Annaba, 2012.

[52] Ndongo. C, *proceessus aléatoires et applications en finance*, Mémoire de master, Université du Québec à Trois-Rivières, 3-2012.

[53] Podlubny. I, *Fractional differential equation*, Matematics in science and enginneering, Volume 198, 1999.

[54] Rahou. H, *Problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires*, Mémoire Master, UniversitéAbou Bekr Belkaid-Tlemcen, 6-2015.

[55] Sabira Imène.S, *Probilites non commutatives et calcul de malliavin*, Mémoire Magistere, Université Ferhat Abbas-Setif-1, 20-10-2013.

[56] Sakthivel. R and Luo. J, "Asymptotic stability of impulsive stochastic partial differential equations with infinite delays," vol. 356, no. 1, pp. 1-6-2009.

[57] Sakthivel. R and Luo. J, "Asymptotic stability of nonlinear impulsive stochastic differential equations," *Statistics and Prob-ability Letters*, vol. 79, no. 9, pp. 1219-1223, 2009.

[58] Sakthivel. R, Ren. Yand Kim. H, "Asymptotic stability of second-order neutral stochastic differential equations," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 51, no. 5, article 005005, pp. 1-9, 2010.

[59] Sakthivel. R, Revathi. P and Mahmudov. N. I, "Asymptotic Stability of Fractional Stochastic Neutral Differential Equations with Infinite Delays", *Abstract and Applied Analysis*, 8-9- 2012.

[60] Samko S.G., Klbas A.A. and Marichev O.I.,*Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach, New York, 1993.

[61] Wan. L and Duan. J, "Exponential stability of non-autonomous stochastic partial differential equations with finite memory," *Statistics and Probability Letters*, vol. 78, no. 5, pp. 490-498, 2008.

[62] Wellbeer. M, *Efficient numerical methods for fractional différential equations and their*, Analytical Bockground, D ,Université Braunschweig, 2010.

[63] Wellbeer. M,*Efficient numerical methods for fractional differential equations and their*, Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig, 2010.

[64] Xuerong. M, *Stochastiic differentions and applications*, second Edition, published in 2007.

[65] Yang C,Zhai C.B, *Uniqueness of Positive Solutions for a Fractional Differential Equation Via a Fixed Point Theorem of a Sum Operator*, Elec.J.Diff.Eqs., 70, 1-8-2012.

[66] Ye. H,Gao. J, The Existence of a Positive Solution of $D^{\alpha}[x(t) - x(0)] = x(t)f(t, xt)$, Birkhauser Verlag Basel,Positivity 11, pp.341-350-2007.

[67] Zaidour. F, *La résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire*, Mémoire Master, Université de Djilali BounaÂma Khemis Miliana, 21-06-2015.

[68] Zeidler. E, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Fixed Point Theorems Spring-Verlag, New York, 1986.

[69] Zhao. D and Han. D,"Mean square exponential and non exponential asymptotic stability of impulsive stochastic Volterra equations," vol. 2011, article 9, 2011.

[70] Zhou.Y, and Jiao.F, "Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 59, no. 3, pp. 1063-1077, 2010.

[71] Zitouni. M, *Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades*, Mémoire Magistere,Université M'hamed bougara-boumerdes, 2009-2010

[72] Milstein. G. N. and Nevelson. M. B, *Stochastic stability of differential equations*, Second Edition,Moscow, 3- 2011.