République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Draia Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Présenté par

BEKRAOUI Zahia

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Applications

THÈME

SUR LE (p,q)-CALCUL FRACTIONNAIRE

Evalué par le jury composé de:

Mr. GASMI Laid	Université d'Adrar	Président
Mr. DEFFA Ahmed	Université d'Adrar	Examinateur
Mr. KHALLADI Mohammed Taha	Université d'Adrar	Rapporteur

Année Université : 2021/2022

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أحمد دراية- أدرار
المكتبة المركزية
مصلحة البحث البيبليوغرافي

Ministry of Higher Education and Scientific Research
University Ahmed Draia of Adrar
The central library

شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذ(ة) : خلادي محمد طه

المشرف على مذكرة الماستر الموسومة بـــ : Sur le (p,q)-calcul fractionnaire

من إنجاز الطالب(ة): بكراوي زهية

و الطالب(ة): ....

كلية : العلوم و التكنولوجيا

القسم : الرياضيات و الإعلام الآلي

التخصص: رياضيات

تاريخ تقييم / مناقشة: 21 جوان 2022

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقييم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.
وبإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والاليكترونية (PDF).

- امضاء المشرف:

ادرار في : 06 JUIL. 2022

مساعد رئيس القسم:

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ★ جامعة أدرار ★ كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم الرياضيات والإعلام الآلي

مساعد رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي
مكلف بالتدريس والتعليم في التدرج
مازوزي حساج

ملاحظة :لاتقبل أي شهادة بدون التوقيع والمصادقة.

Dédicaces

je dédie ce modeste travail:

À ma mère source d'amour de tendresse, de sécurité .

À mon cher époux.

mon cher fils Djawad, que Dieu le protège.

Mes frères et mes soeurs qui sont mon soutien.

Aux bourgeons Noureddine, Nadjib, Zakaria, Med Cheikh, Iyad, Imran, Aya, Bouchra et Hiba.

Pour chacun de la familles BEKRAOUI et BEKRI.

Mon professeur superviseur KHELLADI Mohamed Taha .

Tous mes enseignants.

Mes amis sans exception

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu ‹Allah›, mon créateur de m'avoire donné, la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

A mon cher époux, je dédie cette humble recherche, en guise d'expression de mes remerciements envers lui; Pour être à mes côtés pour réaliser mon ambition scientifique.

Je tiensà remercier chaleureusement mon encadreur Mr. KHALLADI Mohammed Taha Pour sa son enthousiasme dans la supervision de cette mémoire, avec beaucoup de patience et de gentillesse, et pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail. Il a les plus hautes expressions d'appréciation et de respect.

Je remercie égallement les professeurs du jury Mr. GASMI Laid et Mr. DEFFA Ahmed, et tous les professeurs de la département des mathématiques et informatique de Université Ahmed Draia Adrar, qui ont eu le mérite de ce que j'ai atteint aujourd'hui.

je remercie, Ma sœur Fatima pour son aide pour rédéger mon mémoire.

je remercie ma généreuse famille qui attendait ma réussite avec impatience

Enfin, je remercie tous ceux qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Résumé : Le but principal de ce mémoire consiste en l'étude de concepts et résultats les plus importants de la théorie du (p,q)-calcul fractionnaire en étudiant notament la (p,q)-dérivée fractionnaire et la (p,q)-intégrale fractionnaire ainsi que leurs propriétés élémentaires. on donne également une application aux équations aux q-dérivées partielles ainsi qu'une application de la (p,q)-transformation de Laplace à certaines équations aux (p,q)-différentelles.

Mots clés: (p,q)-calcul fractionnaire, (p,q)-dérivée fractionnaire, (p,q)-intégrale fractionnaire, (p,q)-Inégalité intégrale de Hölder, (p,q)-Inégalité intégrale d'Hermite-Hadamard, (p,q)-transformation de Laplace, Equation aux q-dérivées partielles, Equation (p,q)-différentelle.

Abstract: The main purpose of this thesis consists in the study of the most important concepts and results of the theory of (p,q)-fractional calculus by studying in particular the (p,q)-fractional derivative and the (p,q)-fractional integral and their basic properties. we also give an application to partial q-derivative equations as well as an application of the (p,q)-Laplace transformation to certain (p,q)-differential equations.

Key words: (p,q)-fractional calculus, (p,q)-fractional derivative, (p,q)-fractional integral, (p,q)-Hölder integral inequality,(p,q)-Hermite-Hadamar integral inequality, (p,q)-Laplace transformation, Partial q-derivative equation,(p,q)-differential equation.

Tableau de notations

$\mathbb{N}$	:	$\{0, 1, ...\}$
$\mathbb{R}$	:	Le corps des numbres réels
$\mathbb{C}$	:	Le corps des numbres complexes
$D^{\alpha}_{p,q}$	:	Opérateur de (p, q)-dérivation fractionnaire
$(\cdot \ominus \cdot)^{n}_{p,q}$	:	(p, q)-puissance
$\circ$	:	Opérateur de composition
$\mathcal{L}_{p,q}$	:	Opérateur de (p, q)-transformation de Laplace
$I^{\alpha}_{p,q}$	:	Opérateur de (p, q)-intégration fractionnaire
∂	:	Opérateur de dérivation partielle

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est une extension des notions classiques de dérivation et primitive d'ordre entier non nul à tout ordre réel. Bien que la dérivation fractionnaire a été définie par plusieurs approches aux noms de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo, cette notion a été introduite en 17ème siècle lorsque Gottfried Leibniz a défini le symbole de la dérivation d'ordre entier positif, Guillaume l'Hôspital l'a posé des questions et hypothèses sur la possibilité d'avoir une dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$. Cette question a attiré l'attention des mathématiciens comme Euler et Lagrange au 18ème siècle, Liouville en 1837, Riemann en 1847 ainsi que Grünwald en 1867 et Letnikov en 1868. En fait, la théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, et ses origines remontent à la fin du 17ème siècle, à l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n-ème dérivée d'une fonction f, avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$. Quand il a annoncé cette notation dans une lettre à l'Hôpital, ce dernier a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui acceptée comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital ait spécifiquement supposé que $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette branche des mathématiques. D'autre part, cette théorie peut être considérée comme un nouveau sujet. En effet, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un ouvrage sur le calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration qui a debuté en 1968. Pour plus de détails sur ce contexte historique, on peut consulter ([2], [4], [14], [20]). Le calcul fractionnaire fait l'objet de nombreux travaux scientifiques théoriques et pratiques, tels que l'apprentissage automatique, l'analyse stochastique, le calcul quantique, le calcul combinatoire ...etc.

Le q-calcul qui est étroitement lié au calcul quantique remonte aux années 1908, grâce aux travaux de Frank Hilton Jackson. En tant que lien entre les mathématiques et la physique, le q-calcul a joué un rôle très important dans les phénomènes physiques; par exemple, le physicien Fock a étudié la symétrie des atomes d'hydrogène en utilisant l'équation q-différence.

En outre, les mathématiciens et les ingénieurs ont récemment accordé une grande attention au q-calcul et notament aux équations q-différentielles fractionnaires. Dans ce contexte du q-calcul des équations q-differentielles ont été établies comme outil déscriptif pour certains processus physiques spéciaux qui apparaissent dans la dynamique quantique, les systèmes dynamiques discrets et les processus stochastiques discrets, etc. Il convient de souligner que ces équations q-différentielles sont généralement définies sur une échelle de temps T_q, où q est l'indice d'échelle. Le développement de cette théorie a contribué à l'introduction et à l'étude de plusieurs nouveaux concepts tels que la transformation de q-Laplace, les fonctions q-Gamma et q-Bêta, le développement de q-Taylor, etc..., Voir[**5**], [10] .

La théorie du q-calcul fractionnaire en tant que nouvelle généralisation du calcul fractionnaire classique préserve beaucoup de propriétés de base. Elle s'articule autour des dérivées d'ordre réel α (ou même complexe) arbitraire, définies par un paramètre donné q. En tant que domaine de développement intensif du calcul au cours des deux dernières décennies, il offre de nouvelles approches pour la recherche et devient ainsi de plus en plus utilisé dans diverses applications.

L'étude du calcul fractionnaire dans des contextes discrets a été initiée dans [45–47]. Agarwal et Al-Salam [46] ont introduit le q-calcul des différences fractionnaires.

Le q-calcul fractionnaire

Au cours des trois dernières décennies, les applications du q-calcul ont été étudiées de manière intensive. Inspirés et motivés par ces applications, de nombreux chercheurs ont généralisé et développé la théorie de ce calcul quantique basée sur un entier à deux paramètres (p, q) qui est utilisé efficacement dans de nombreux domaines tels que les équations aux différences, le groupe de Lie, les séries hypergéométriques.

Le (p, q)-calcul ou le calcul post-quantique a été étudié pour la première fois dans les algèbres quantiques par Chakrabarti et Jagannathan. [2] [12]

En 2016, M. Tunç et E. Göv [40,41] ont défini la (p, q)-dérivée et la (p, q)-intégrale sur des intervalles finis et prouvé certaines de ses propriétés. Plus tard, ils ont également étendu certaines des nouvelles inégalités intégrales importantes sur des intervalles finis au (p, q)-calcul.

Le (p, q)-calcul fractionnaire a été introduit et étudier récemment en 2020 par J. Soontharanon et T. Sitthiwirattham en introduisant le nouveau concept d'opérateurs de (p, q)-différences sur un intervalle fini, et ont étudié quelques propriétés du (p, q)-calcul fractionnaire au sens des opérateurs de (p, q)-différence, en particulier, ils ont proposé l'opérateur de (p, q)-différence fractionnaire de type Riemann-Liouville etde type Caputo.

En 2021, de nombreuses inégalités (p, q)- intégrales fractionnaires sur des intervalles finis ont été prouvées dans [3] par P. Neang, K. Nonlaopon, J. Tariboon et S. K. Ntouyas, telles que la (p, q)-inégalité intégrale fractionnaire de Hö■lder,la (p, q)-inégalité intégrale fractionnaire d'Hermite-Hadamard, la (p, q)-inégalité intégrale fractionnaire de Korkine, la (p, q)-inégalité intégrale fractionnaire de Grüss, la (p, q)-inégalité intégrale fractionnaire de Grüss–Chebyshev et la (p,q)-inégalité intégrale fractionnaire de Polya–Szeq.

Le but principal de ce mémoire consiste en l'étude de concepts et résultats les plus importants de la théorie du (p,q)-calcul fractionnaire en étudiant notament la (p,q)-dérivée fractionnaire et la (p,q)-intégrale fractionnaire ainsi que leurs propriétés élémentaires. En fait, notre objectif essentiel de cette étude est de rendre cette nouvelle théorie plus facile et accessible à la plupart des différentes catégories d'utilisateurs scientifiques que sont soit des ingénieurs, des chercheurs, ainsi que tous ceux qui s'intéressent à ce type de questions.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est un rappel de quelques notions et résultats généraux sur le calcul fractionnaire.

Le deuxième chapitre est une étude bien détaillée du (p,q)-calcul et en particulier du (p,q)-calcul fractionnaire, en donnant d'abord les notions de base et les propriétés fondamentales du (p,q)-calcul, à savoir; la (p,q)-dérivation, la (p,q)-intégration, quelques (p,q)- inégalitées intégrales telles que la (p,q)-inégalité intégrale de Hölder et la (p,q)-inégalité intégrale d'Hermite-Hadamarder et en fin la (p,q)-transformation intégrale de Laplace. Ensuite, nous allons étudier la (p,q)-analogue de la dérivation et de l'intégration dans le contexte fractionnaire.

Dans le dernier chapitre, on donne une application aux équations aux q-dérivées partielles ainsi qu'une application de la (p,q)-transformation de Laplace à certaines équations aux (p,q)-différentelles.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre rappele quelques notations, concepts et résultats généraux concernant la théorie du q-calcul fractionnaire. Ces notions de base et résultats sont bien connus dans la littérature et seront utiles pour ce travail, voir ([10], [17] , [18]).

1.1 q-Calcul fractionnaire

Afin de rappeler les notions de base de la théorie du q-calcul fractionnaire, commençons d'abord par l'aperçu suivant qui résume le q-calcul.

1.1.1 q-Calcul

La base principale sur laquelle repose la q-théorie classique est le concept du q-analogue. En mathématiques, un q-analogue (ou q-extension ou q-généralisation) d'un théorème, d'un objet ou d'une expression est une généralisation paramétrée par une quantitée q qui renvoie le théorème, l'objet ou l'expression d'origine quand $q \longrightarrow 1$. En général, les mathématiciens s'intéressent aux

q-analogues qui apparaissent naturellement, plutôt qu'à la construction arbitraire de q-analogues de résultats connus. Le premier q-analogue étudié en détail est la série hypergéométrique de base qui a été introduite au 19ème siècle.

Les q-analogues sont le plus souvent étudiés dans les domaines mathématiques de la combinatoire, les fonctions spéciales, la géométrie hyperbolique, la théorie ergodique, les intégrales elliptiques, les formes modulaires, les groupes quantiques et dans les superalgèbres q-déformées.

Le q-calcul classique commence par les q-analogues des nombres entiers non négatifs.

Tout au long de ce mémoire, on suppose, sauf indication contraire, que q est réel vérifiant $0 < q < 1$.

Définition 1.1.1 *Le q-analogue d'un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ ou le q-nombre entier (ou le q-bracket) est donné par l'égalité*

$$\lim_{q \to 1} \frac{1 - q^n}{1 - q} = n.$$

En posant

$$[n]_q := \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + ... + q^{n-1},$$

le q-analogue de la factorielle $n!$ ou le q-factorielle d'un nombre entier $n \in \mathbb{N}$, peut être défini comme suit.

Définition 1.1.2 *Le q-factorielle d'un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ est donné par la formule suivante*

$$[n]_q! := [1]_q \,.\, [2]_q \dots [n-1]_q \,.\, [n]_q \,.$$

Remarque 1.1.3 *On a*

$$\begin{aligned} [n]_q! &= [1]_q \,.\, [2]_q \dots [n-1]_q \,.\, [n]_q = \frac{1-q}{1-q} . \frac{1-q^2}{1-q} \dots \frac{1-q^{n-1}}{1-q} . \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= 1. (1+q) \dots \left(1 + q + \dots + q^{n-2}\right) \left(1 + q + \dots + q^{n-1}\right). \end{aligned}$$

À l'aide des q-factorielles, on peut définir également les q-coefficients binomiaux ou les coefficients gaussiens qui sont données par la définition suivante.

Définition 1.1.4 *Les q-coefficients binomiaux sont définies par q-analogues combinatoires*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q!.\,[n-k]_q!}.$$

Le q-exponentiel est défini comme suit.

Définition 1.1.5 *Le q-exponentiel d'un nombre réel x est défini par*

$$e_q^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}.$$

Les fonctions q-trigonométriques, q-elliptiques ainsi que la transformée q-intégrale peuvent être définies dans ce même contexte. En fait, à partir de 1904, F. H. Jackson publia un certain nombre d'articles mathématiques entièrement consacrés au q-calcul qui dureront jusqu'en 1951. Il avait étudié les fonctions elliptiques et les fonctions spéciales selon les travaux de Heine, Thomae et Rogers et a commencé à trouver des q-analogues des fonctions trigonométriques, des fonctions de Bessel, des polynômes de Legendre et de la fonction gamma ordinaire. De plus, il a expliqué en détail le lien entre la fonction q-gamma et les fonctions elliptiques. Parmi les fonctions fondamentales qui interviennent dans la définition de l'intégrale fractionnaire, les deux intégrales eulériennes qui généralisent le factoriel ordinaire d'un nombre entier, c'est-à-dire les fonctions spéciales de Gamma et Beta données par les deux formules suivantes respectivement:

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \mathrm{Re}x > 0.$$

$$B(x,t) := \int_0^1 s^{t-1}(1-s)^{x-1}ds, \ \mathrm{Re}x > 0, \mathrm{Re}t > 0.$$

Le q-analogue de la fonction Gamma est donné par la définition suivante.

Définition 1.1.6 *La fonction q-Gamma est notée et définie par*

$$\Gamma_q(x) := \begin{cases} (1-q)^{1-x} \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+x}}, & si \quad |q| < 1 \\ (q-1)^{1-x} q^{\binom{x}{2}} \frac{\left(q^{-1},q^{-1}\right)_\infty}{\left(q^{-x},q^{-1}\right)_\infty}, & si \quad |q| > 1 \end{cases},$$

où $(\cdot,\cdot)_n$ *est le symbole q-Pochhammer (ou le q-factoriel décalé) défini par les relations*

$$(a,q)_0 = 1, \ \ (a,q)_n := \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - aq^j\right) \ \ et \ \ (a,q)_\infty := \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - aq^j\right).$$

Proposition 1.1.7 *La fonction q-Gamma satisfait les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma_q(x+1) = [x]_q \Gamma_q(x)$.

2. $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \Gamma_q(n+1) = [n]_q!$.

Le q-analogue de la fonction Beta est donné par la définition suivante.

Définition 1.1.8 *La fonction q-Beta est défnie par l'intégrale suivante*

$$B_q(x,t) := \frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(t)}{\Gamma_q(x+t)}.$$

Dans ce qui suit, nous donnerons la définition et les propriétés les plus importantes des notions de q-dérivée et de q-primitive. Pour plus de détails sur ces concepts ainsi que les preuves, voir par exemple ([5] , [10])

La q- dérivation (ou la dérivation de Jackson) introduite par F. H. Jackson, est une q-analogue de la dérivation ordinaire

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x) := \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Définition 1.1.9 *La q-dérivée d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ est définie par*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}.$$

et

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_q f(0) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{d}{dx}\right)_q f(x).$$

Elle est notée aussi par $D_q f$.

Exemple 1.1.10 *Soit la fonction $f(x) = x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\begin{aligned} D_q f(x) &= \frac{(qx)^\alpha - x^\alpha}{(q-1).x} \\ &= \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}.x^{\alpha-1} \\ &= [\alpha]_q \, x^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

En particulier, la q-dérivée transforme naturellement un polynôme de degré n en un polynôme de degré $n-1$, i.e.,

$$D_q x^n = \frac{q^\alpha - 1}{q - 1}.x^{\alpha-1},$$

et si $P(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^j$, alors

$$D_q P(x) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} \frac{q^{j+1} - 1}{q - 1}.x^j.$$

Il est facile de prouver les formules suivantes de la q-dérivée de la somme,le produit, le quotient et la composition de fonctions.

Proposition 1.1.11 *Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{1}.\ D_q(f+g)(x) & = & D_q(f)(x)+D_q(g)(x). \\
\mathbf{2}.\ D_q(\lambda.f)(x) & = & \lambda D_q(f)(x). \\
\mathbf{3}.\ D_q(f.g)(x) & = & g(q.x).D_qf(x)+f(x).D_qg(x)=f(q.x).D_qg(x)+g(x).D_qf(x). \\
\mathbf{4}.\ D_q(\frac{f}{g})(x) & = & \frac{g(x).D_qf(x)-f(x).D_qg(x)}{g(q.x).g(x)} \\
\mathbf{5}.\ D_q(f\circ g)(x) & = & \frac{f(g(qx))-f(g(x))}{g(qx)-g(x)}.\frac{g(qx)-g(x)}{qx-x}.
\end{array}$$

Remarque 1.1.12 *Clairement, si la fonction f est différentiable au point x, la q-dérivée tend vers la dérivée ordinaire lorsque q tend vers 1.*

La définition suivante donne la notion de la q-dérivée d'ordre entier naturel $n \in \mathbb{N}$

Définition 1.1.13 *La q-dérivée d'ordre entier d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ est définie par*

$$\left(D_q^n f\right)(x) = (q-1)^{-n}\, x^{-n} q^{\,-\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q (-1)^k\, q^{\binom{k}{2}} f\left(q^{n-k}x\right),\ n \in \mathbb{N}$$

Thomae était un élève de Heine qui, en 1869, introduisit la notion de q-intégrale. La q-primitive ou la q- intégration de Jackson est définie comme l'inverse de la q- dérivée de Jackson.

Définition 1.1.14 *Soit $a \in \mathbb{R}$. La q-primitive d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ est définie par*

$$\int_a^x f(t)d_qt = (1-q)\,(x-a)\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(a+q^k\,(x-a)).$$

En particulier, pour $a=0$

$$\int_0^x f(t)d_qt = (1-q)x\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^kx).$$

Définition 1.1.15 *Soit $[a,b]$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. La q-intégrale définie d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ est donnée par*

$$\int_a^b f(t)d_qt = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(a+q^k(x-a)).$$

Pour $a=0$ et $b=1$, on obtient la q-intégrale de Thomae

$$\int_0^1 f(t)d_qt = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k).\ 0<q<1.$$

En 1910, Jackson a défini la q-intégrale générale

$$\int_a^b f(t)d_qt = \int_0^b f(t)d_qt - \int_0^a f(t)d_qt.$$

où

$$\int_a^b f(t)d_qt = a(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(aq^k),\ 0<|q|<1.$$

Il n'y a pas du choix canonique unique pour la q-intégration de 0 à $+\infty$. En effet, suivantde Jackson, on a la définition suivante

Définition 1.1.16 *La q-intégrale d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ sur $[0,+\infty[$ est donnée par*

$$\int_0^{+\infty} f(t)d_qt = (1-q)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k f(q^k),\ 0<|q|<1,$$

à condition que la somme converge absolument.

De plus, la q-intégrale bilatérale d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ est définie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)d_qt = (1-q)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^k\left[f\left(q^k\right)+f\left(-q^k\right)\right],\ 0<|q|<1.$$

Proposition 1.1.17 *Soient f, g deux fonctions définies et continues sur $[a,b]$ et $0<q<1$ Alors on a*

$$\int_a^b f(qt)D_q g(t)d_q t = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g(qt)D_q f(t)d_q t.$$

Remarque 1.1.18 *1. La q-intégrale possède toutes les propriétés générales de l'intégrale de Riemann sur des intervalles finis ou infinis.*

2. Si la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur les intervalles concernés, toutes les intégrales définies ci-dessus, tendent vers les intégrales de Riemann de f sur les intervalles correspondants lorsque q tend vers 1.

1.1.2 q-Calcul fractionnaire

Dans ce paragraphe, rappelons les définitions et quelques propriétés de la q-intégration fractionnaire et la q-dérivation fractionnaire sur un intervalle fini $[a,b]$. Commençons par la notion de q-intégrale fractionnaire.

Définition 1.1.19 *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et $\alpha > 0$, La q-intégration fractionnaire de f est définie par*

$$\left(I_q^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma_q(\alpha)} \int_a^x (x-qt)^{\alpha-1} f(t)d_q t.$$

Proposition 1.1.20 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ Alors on a*

$$\left(I_q^{\alpha} f\right)(x) = \left(I_q^{\alpha+1} D_q f\right)(x) + \frac{f(a)}{\Gamma_q(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}, \quad 0 < a < x < b.$$

Proposition 1.1.21 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ Alors on a*

$$\int_0^{\alpha} (x-qt)^{\beta-1} \left(I_q^{\alpha} f\right)(t)d_q t = 0, \quad 0 < a < x < b.$$

La notion de la q-dérivée fractionnaire et sa relation avec la q-intégrale fractionnaire sont résumées dans ce qui suit.

Définition 1.1.22 *La q-dérivée fractionnaire d'une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$ est donnée par*

$$\left(D_q^{\alpha} f\right)(x) = \begin{cases} \left(I_q^{-\alpha} f\right)(x) & , \quad \alpha < 0 \\ f(x) & , \quad \alpha = 0 \\ \left(D_q^{[\alpha]} I_q^{[\alpha]-\alpha} f\right)(x) & , \quad \alpha > 0 \end{cases} .$$

Proposition 1.1.23 *Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$. Alors $\forall x \in [a,b]$, on a*

$$\left(D_q^{\alpha} I_q^{\alpha} f\right)(x) = f(x).$$

Chapitre 2

(p, q)-Calcul fractionnaire

Afin d'introduire la notion du (p, q)-calcul fractinnaire nous définissons d'abord le cadre approprié dans lequel on peut étudier la (p, q)-dérivation fractionnaire et la (p, q)-intégration fractionnaire. Il sagit du (p, q)-calcul ou le calcul post-quantique.

2.1 (p, q)-Calcul

Le présent paragraphe donne une étude assez détaillée du (p, q)-calcul et leurs propriétés fondamentales. Voir [3] , [12] .

Le (p, q)-calcul ou le calcul post-quantique est une généralisation de la théorie du q-calcul. Il est introduit pour la premère fois par Afin d'étudier les notions de base et les propriétés caractéristiques de ce nouveau calcul, nous avons besoin de définir le concept de (p, q)-analogue.

Dans tout ce qui suit, p et q sont deux nombres réels vérifiant $0 < q < p \leq 1$.

2.1.1 (p, q)-analogue

Le nombre de base doublé ou le (p, q)-bracket est donné par le (p, q)-analogue suivant.

Définition 2.1.1 *Le (p, q)-analogue d'un nombre entier $n \in \mathbb{N}$, est donné par*

$$[n]_{p,q} := \frac{p^n - q^n}{p - q} \text{ avec } [0]_{p,q} = 1.$$

Remarque 2.1.2 *Le (p, q)-nombre est une généralisation naturelle du q-nombre, i.e.*

$$\lim_{p \to 1} [n]_{p,q} = [n]_q \,, \; q \neq 1.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

(i) $[n]_{p,q} = p^{n-1} [n]_{\frac{q}{p}}$.

(ii) $[-n]_{p,q} = -\frac{1}{(pq)^n} [n]_{p,q}$.

Définition 2.1.3 *Le (p, q)-analogue du factoriel $n!$ ou le (p, q)-factoriel d'un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ est défini par la formule*

$$[n]_{p,q}! := \prod_{k=1}^{n} [k]_{p,q} \quad , \; n \geq 1, \text{ avec } [0]_{p,q}! = 1.$$

Définition 2.1.4 *Les (p, q)-coefficients binomiaux sont définis par*

$$\left(\begin{array}{c} n \\ \\ k \end{array} \right)_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}!.\,[n-k]_{p,q}!}, \; 0 \leq k \leq n.$$

Remarque 2.1.5 *Notons que lorsque $p \to 1$, les (p, q)-coefficients binomiaux se réduisent aux q-coefficients binomiaux.*

Deux types de l'analogue de la fonction exponentielle classique $x \longmapsto \exp x$, sont donnés par les deux fonctions (p,q)-exponentielles suivantes

$$e_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{\binom{n}{2}}}{[n]_{p,q}!} x^n \tag{2.1}$$

et

$$E_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}}{[n]_{p,q}!} x^n \tag{2.2}$$

Ces deux formules sont très importantes pour le calcul des (p,q)-transformées de Laplace. On a les deux propriétés suivantes.

$$e_{p,q}(x)E_{p,q}(-x) = 1 \text{ et } E_{p,q}(x) = e_{p^{-1},q^{-1}}(x) \tag{2.3}$$

Le (p,q)-analogue de la fonction puissance $(x-a)^n$, où $a, x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, est donnée dans la définition suivante.

Définition 2.1.6 *La fonction (p,q)-puissance est définie par*

$$(x \ominus a)^0_{p,q} = 1 \quad et \quad (x \ominus a)^n_{p,q} = \prod_{k=0}^{n-1} (xp^k - aq^k) \quad avec\ a \in \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}.$$

Le lien entre la (p,q)-puissance et le (p,q)-factoriel d'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est donné par le résultat suivant

Proposition 2.1.7 *On a*

$$[n]_{p,q}! = \frac{(p \ominus q)^n_{p,q}}{(p-q)^n}.$$

Preuve. D'après la définition du (p,q)-analogue du factorielle $n!$, on a

$$\begin{aligned}
[n]_{p,q}! &= \prod_{k=1}^{n} [k]_{p,q} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{p^k - q^k}{p-q} \\
&= \frac{1}{(p-q)^n} \prod_{j=0}^{n-1} p^{j+1} - q^{j+1}, j = k-1 \\
&= \frac{1}{(p-q)^n} \prod_{j=0}^{n-1} \left(pp^j - qq^j\right) \\
&= \frac{1}{(p-q)^n} \left(p \ominus q\right)_{p,q}^n
\end{aligned}$$

□

Le (p,q)-analogue de la fonction Gamma est donné par la définition suivante.

Définition 2.1.8 *La fonction (p,q)-Gamma est notée et définie par*

$$\Gamma_{p,q}(x) := \begin{cases} \frac{(p\ominus q)_{p,q}^{n-1}}{(p-q)^{x-1}}, & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,...\} \\ [x-1]_{p,q}!, & si \quad x \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Proposition 2.1.9 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Gamma_{p,q}(n+1) = [n]_{p,q} \Gamma_{p,q}(n) = [n]_{p,q}!.$$

De même, le (p,q)-analogue de la fonction Beta est donné par.

Définition 2.1.10 *La fonction (p,q)-Beta est notée et définie par*

$$B_{p,q}(x,y) := p^{\frac{1}{2}(y-1)(2x+y-2)} \frac{\Gamma_{p,q}(x)\Gamma_{p,q}(y)}{\Gamma_{p,q}(x+y)}.$$

2.1.2 (p,q)-Dérivation

Dans tout ce paragraphe, $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie et continue sur$I$ à valeurs réeles.

Définition 2.1.11 *La (p,q)-dérivée de f en un point $x\in[a,b]$ est notée et définie par*

$$D_{p,q}f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{f(px+(1-p)a)-f(qx+(1-q)a)}{(p-q)(x-a)}, & si \quad x\neq a\\ f'\left(a\right) & si \quad x=a\end{cases}.$$

En particulier, pour $a=0$

$$D_{p,q}f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{f(px)-f(qx)}{(p-q)x}, & si \quad x\neq 0\\ f'\left(0\right) & si \quad x=0\end{cases}.$$

Définition 2.1.12 *Une fonction f est dite (p,q)-dérivable sur I si pour tout $x\in I$, la (p,q)-dérivée $D_{p,q}f\left(x\right)$ existe.*

Remarque 2.1.13 *(i) Pour $x=a$, on a $D_{p,q}f\left(a\right)=\lim\limits_{x\to a}D_{p,q}f\left(x\right)$.*

(ii) Si $p=1$, alors $D_{p,q}f$ coïncide avec la q-dérivée D_qf.

Afin de montrer les propriétés élémentaires de la (p,q)-dérivation, ne nous considérons que le cas $x=0$. Le cas$x=a$, s'en déduit immédiatement avec une légère modification.

Proposition 2.1.14 *L'opérateur $D_{p,q}$ est linéaire.*

Preuve. Puisque le cas $x=0$ est trivial, il suffit de montrer que $D_{p,q}$ est linéaire pour $x\neq 0$, Soient f et g deux fonctions définies sur I et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
D_{p,q}(f+g)(x) &= \frac{(f+g)(px)-(f+g)(qx)}{(p-q)x} \\
&= \frac{f(px)+g(px)-f(qx)-g(qx)}{(p-q)x} \\
&= \frac{f(px)-f(qx)}{(p-q)x}+\frac{g(px)-g(qx)}{(p-q)x} \\
&= D_{p,q}(f)(x)+D_{p,q}(g)(x),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_{p,q}(\lambda f)(x) &= \frac{\lambda f(px)-\lambda f(qx)}{(p-q)x} \\
&= \lambda\frac{f(px)-f(qx)}{(p-q)x} \\
&= \lambda D_{p,q}(f)(x).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.15 *La (p,q)-dérivée satisfait au règle du produit suivant*

$$D_{p,q}(f.g)(x)=f(px).D_{p,q}g(x)+g(qx).D_{p,q}f(x).$$

Preuve. Le cas $x=0$ est façile. En appliquant la définition, on obtient pour $x\neq 0$

$$\begin{aligned}
D_{p,q}(f.g)(x) &= \frac{(f.g)(px)-(f.g)(qx)}{(p-q)x} \\
&= \frac{f(px).g(px)-f(qx).g(qx)}{(p-q)x} \\
&= \frac{f(px).g(px)-f(qx).g(qx)-f(px).g(qx)+f(px).g(qx)}{(p-q)x} \\
&= \frac{f(px).[g(px)-.g(qx)]+g(qx)[f(px)-f(qx)]}{(p-q)x} \\
&= f(px).D_{p,q}g(x)+g(qx).D_{p,q}f(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.1.16 *La (p,q)-dérivée satisfait au règle du quotient suivant*

$$D_{p,q}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{g\left(qx\right).D_{p,q}f\left(x\right)-f\left(qx\right).D_{p,q}g\left(x\right)}{g\left(px\right)g\left(qx\right)},\ \textit{avec } g\left(px\right)g\left(qx\right)\neq 0.$$

Preuve. Le cas $x=0$ est façile. Par définition, si $x\neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
D_{p,q}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(px)-\left(\frac{f}{g}\right)(qx)}{(p-q)x} \\
&= \frac{1}{(p-q)x}\left[\frac{f\left(px\right)g\left(qx\right)}{g\left(px\right)g\left(qx\right)}-\frac{f\left(qx\right)g\left(px\right)}{g\left(px\right)g\left(qx\right)}\right] \\
&= \frac{1}{g\left(px\right)g\left(qx\right)}\left[\frac{f\left(px\right)g\left(qx\right)}{(p-q)x}-\frac{f\left(qx\right)g\left(px\right)}{(p-q)x}+\frac{f\left(qx\right)g\left(qx\right)}{(p-q)x}-\frac{f\left(qx\right)g\left(qx\right)}{(p-q)x}\right] \\
&= \frac{1}{g\left(px\right)g\left(qx\right)}\left[\frac{f\left(px\right)-f\left(qx\right)}{(p-q)x}g\left(qx\right)-\frac{g\left(px\right)-g\left(qx\right)}{(p-q)x}f\left(qx\right)\right] \\
&= \frac{g\left(qx\right).D_{p,q}f\left(x\right)-f\left(qx\right).D_{p,q}g\left(x\right)}{g\left(px\right)g\left(qx\right)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 2.1.17 *Pour $f\neq 0$ on a*

$$D_{p,q}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{-D_{p,q}f\left(x\right)}{f\left(px\right)f\left(qx\right)},\ \textit{avec } f\left(px\right)f\left(qx\right)\neq 0.$$

Preuve. Elle découle de la preuve précédente. $\square$

Exemple 2.1.18 *On peut vérifier façilement que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$*

$$D_{p,q}x^n=[n]_{p,q}\,x^{n-1}.$$

En général, si f est une fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} f: \quad [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-a)^n,\ x\neq a. \end{array},$$

alors sa (p,q)-dérivée est donnée par

$$\begin{aligned}
D_{p,q}f(x) &= \frac{((px+(1-p)a)-a)^n-((qx+(1-q)a)-a)^n}{(p-q)(x-a)} \\
&= \frac{(px+a-a.p-a)^n-(qx+a-a.q-a)^n}{(p-q)(x-a)} \\
&= \frac{(px-a.p)^n-(qx-a.q)^n}{(p-q)(x-a)} \\
&= \frac{p^n-q^n}{(p-q)}(x-a)^{n-1} \\
&= [n]_{p,q}(x-a)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.19 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$D_{p,q}(x \ominus a)^n_{p,q} = [n]_{p,q}(px \ominus a)^{n-1}_{p,q} \tag{2.4}$$

Preuve. Il est clair que pour $n = 0$, on a

$$D_{p,q}(x \ominus a)^0_{p,q} = D_{p,q}(1) = 0.$$

Si $n \geq 1$, en utilisant les définitions de la (p,q)-dérivation et de la fonction (p,q)-puissance, la preuve se fait par des calculs directs. □

Proposition 2.1.20 *Soit $n \geq 1$ un nombre naturel et $0 \leq k \leq n$. Alors on a*

$$D^k_{p,q}(x \ominus a)^n_{p,q} = p^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!}\left(p^k x \ominus a\right)^{n-k}_{p,q} \tag{2.5}$$

Preuve. Démontrons cette égalité par récurrence sur k. En effet, pour $k = 0$, on a

$$\begin{aligned}
D^0_{p,q}(x \ominus a)^n_{p,q} &= (x \ominus a)^n_{p,q} \\
&= p^{\binom{0}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n]_{p,q}!}(x \ominus a)^n_{p,q} \\
&= (x \ominus a)^n_{p,q} \ \text{ car } p^{\binom{\alpha}{k}} = 0 \text{ si } \alpha < k,
\end{aligned}$$

donc pour $k = 0$ l'égalité est vraie.

Supposons que l'égalité 2.5 est vraie pour tout k et montrons-le pour $k+1$. On a

$$\begin{aligned}
D_{p,q}^{k+1}(x \ominus a)_{p,q}^{n} &= D_{p,q}\left(D_{p,q}^{k}(x \ominus a)_{p,q}^{n}\right) \\
&= D_{p,q}\left[p^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!}\left(p^{k}x \ominus a\right)_{p,q}^{n-k}\right] \\
&= p^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!} D_{p,q}\left(p^{k}x \ominus a\right)_{p,q}^{n-k} \\
&= p^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!}\left[p^{\binom{1}{2}} \frac{[n-k]_{p,q}!}{[n-k-1]_{p,q}!}\left(pp^{k}x \ominus a\right)_{p,q}^{n-k-1}\right] \\
&= p^{\binom{k+1}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-(k+1)]_{p,q}!}\left(p^{k+1}x \ominus a\right)_{p,q}^{n-(k+1)}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que l'égalité 2.5 est vraie pour tout entier naturel k vérifiant $0 \leq k \leq n$. □

Remarque 2.1.21 *Si $n \geq 1$, l''égalité 2.4 de la proposition 2.1.19 devient un cas particulier de l''égalité 2.5 de la proposition 2.1.20 en prenant $k = 1$.*

Proposition 2.1.22 *Soient m et n deux entiers naturels. Alors on a*

$$(x \ominus a)_{p,q}^{n+m} = (x \ominus a)_{p,q}^{m}\left(p^{m}x \ominus q^{m}a\right)_{p,q}^{n}.$$

Preuve. En appliquant la définition, on obtient

$$\begin{aligned}
(x \ominus a)_{p,q}^{n+m} &= \prod_{k=0}^{n+m-1}\left(xp^{k} - aq^{k}\right) \quad x, a \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N} \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(xp^{k} - aq^{k}) \prod_{k=m}^{n+m-1}\left(xp^{k} - aq^{k}\right) \\
&= (x \ominus a)_{p,q}^{m} \prod_{j=0}^{n-1}(xp^{j+m} - aq^{j+m}), k = j+m \\
&= (x \ominus a)_{p,q}^{m} \prod_{j=0}^{n-1}(xp^{m}p^{j} - aq^{m}q^{j}) \\
&= (x \ominus a)_{p,q}^{m}\left(p^{m}x \ominus q^{m}a\right)_{p,q}^{n}.
\end{aligned}$$

□

Une version analogue de la Proposition 2.1.20 est donnée par le résultat suiavant.

Proposition 2.1.23 *Soit un nombre entier $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$ Alors on a*

$$D_{p,q}^{k}\left(a \ominus x\right)_{p,q}^{n}=\left(-1\right)^{k} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!}\left(a \ominus q^{k} x\right)_{p,q}^{n-k} \tag{2.6}$$

Preuve. On va montre cette égalité par récurrence

si $k=0$ on a

$$D_{p,q}^{0}\left(a \ominus x\right)_{p,q}^{n}=\left(a \ominus x\right)_{p,q}^{n}$$

$$\begin{aligned} D_{p,q}^{0}\left(a \ominus x\right)_{p,q}^{n} &= \left(-1\right)^{0} q^{\binom{0}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-0]_{p,q}!}\left(a \ominus q^{0} x\right)_{p,q}^{n} \\ &= \left(a \ominus x\right)_{p,q}^{n} \end{aligned}$$

donc pour $k=0$ cette égalité est vrai

on supposer que 2.6 vrai pour tout k et on montre pour $k+1$

$$\begin{aligned} D_{p,q}^{k+1}\left(a \ominus x\right)_{p,q}^{n} &= D_{p,q}\left(D_{p,q}^{k}\left(a \ominus x\right)_{p,q}^{n}\right) \\ &= D_{p,q}\left(\left(-1\right)^{k} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!}\left(a \ominus q^{k} x\right)_{p,q}^{n-k}\right) \\ &= \left(-1\right)^{k} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!} D_{p,q}\left(a \ominus q^{k} x\right)_{p,q}^{n-k} \\ &= \left(-1\right)^{k} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-k]_{p,q}!}\left(-1\right)^{1} q^{\binom{1}{2}} \frac{[n-k]_{p,q}!}{[n-k-1]_{p,q}!}\left(a \ominus q q^{k} x\right)_{p,q}^{n-k-1} \\ &= \left(-1\right)^{k+1} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_{p,q}!}{[n-(k+1)]_{p,q}!}\left(a \ominus q^{k+1} x\right)_{p,q}^{n-(k+1)} \end{aligned}$$

□

Considérons la définition de deux types de fonctions (p, q)-exponentielles 2.1 et 2.2 et en utilisant ses propriétés associées 2.3, on peut montrer façilement la proposition suivante.

Proposition 2.1.24 *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Alors on a*

$$\begin{aligned} D_{p,q}e_{p,q}(\lambda x) &= \lambda e_{p,q}(\lambda p x) \\ D_{p,q}E_{p,q}(\lambda x) &= \lambda E_{p,q}(\lambda q x) \end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la définition de (p, q)-dérivée etdéfinition (p, q)-exponentielle, on obtient

$$\begin{aligned} D_{p,q}e_{p,q}(\lambda x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{\binom{n}{2}}}{[n]_{p,q}!} D_{p,q}\,(\lambda x)^n \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[n]_{p,q}\, p^{\binom{n}{2}}}{[n]_{p,q}!}\,(\lambda x)^{n-1} \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^{\binom{n}{2}}}{[n-1]_{p,q}!}\,(\lambda x)^{n-1} \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{\binom{n}{2}}}{[n]_{p,q}!}\,(\lambda x)^{n-1} \\ &= \lambda e_{p,q}(\lambda p x) \end{aligned}$$

De la même façon on trouve

$$D_{p,q}E_{p,q}(\lambda x) = \lambda E_{p,q}(\lambda q x)$$

□

La notion de la n-ième (p, q)-dérivée ou la (p, q)-dérivée d'ordre entier naturel $n \in \mathbb{N}$ est introduite par la définition suivante.

Définition 2.1.25 *La (p,q)-dérivée d'ordre naturel $n \in \mathbb{N}$ d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ est définie par*

$$(D^n_{p,q}f)(x) = \frac{q^{-\binom{n}{2}}}{x^n(p-q)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \frac{q^{\binom{k}{2}} f(xp^k q^{n-k})}{p^{k(2n-k-1)/2}} \tag{2.7}$$

Proposition 2.1.26 *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors*

$$\begin{aligned} D^n_{p,q} e_{p,q}(\lambda x) &= \lambda^n p^{\binom{n}{2}} e_{p,q}(\lambda p^n x), \\ D^n_{p,q} E_{p,q}(\lambda x) &= \lambda^n q^{\binom{n}{2}} E_{p,q}(\lambda q^n x). \end{aligned}$$

2.1.3 (p,q)-Intégration

Afin d'énoncer la notion de la (p,q)-anti-dérivée, rappelons d'abord le théorème fondamental du calcul classique suivant

Théorème 2.1.27 *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, alors elle admet une primitive ou anti-dérivée F sur $[a,b]$. De plus, si F est une anti-dérivée quelconque de f sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

La q-version de ce théorème est la suivante.

Définition 2.1.28 *Une fonction F est dite (p,q)-anti-dérivée ou (p,q)-primitive de f si*

$$D^n_{p,q} F(x) = f(x).$$

De plus, si F est continue en $x = 0$, alors

$$\int_a^b f(x)\,d_{p,q}x = F(b) - F(a), \ \ 0 \leq a \leq b \leq \infty.$$

Remarque 2.1.29 *(i) La (p,q)-anti-dérivée n'est pas unique.*

(ii) L'unicité de la primitive au sens classique est depend a une constant, car

$$Df(x) = f'(x) = 0 \text{ si seulment si } f \equiv c.$$

Or, dans le cadre du (p,q)-calcul

$$D_{p,q}f(x) = 0 \text{ si et seulement si } f(px) = f(qx) \tag{2.8}$$

ce qui n'implique pas nécessairement que f est constante.

Si f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{2.9}$$

la condition $f(px) = f(qx)$ de 2.8 implique que $p^n c_n = q^n c_n$, ce qui est possible seulement quand $c_n = 0$, $\forall n > 1$. Par conséquent f est constante.

Donc, si f est de la forme 2.9, elle admet une (p,q)-anti-dérivée unique dependant a une constant et est donnée par

$$\int f(x)\, d_{p,q}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{[n+1]_{p,q}} + c.$$

Ceci motive la notion suivante de lac(p,q)-intégration.

Définition 2.1.30 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La (p,q)-intégrale de f sur $[a,b]$ est définie par*

$$\int_a^x f(t) d_{p,q}t = (p-q).(x-a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}}x + (1 - \frac{q^k}{p^{k+1}})a\right) \tag{2.10}$$

De plus, si $c \in [a, x]$, la (p, q)-intégrale sur $[c, x]$ est définie par

$$\int_c^x f(t)d_{p,q}t = \int_a^x f(t)d_{p,q}t - \int_a^c f(t)d_{p,q}t..$$

En particulier, si $a = 0$, on a

$$\int_0^x f(t)d_{p,q}t = (p-q).x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}}x\right). \tag{2.11}$$

Définition 2.1.31 *Si 2.10 existe pour tout $x \in [a, b]$, on dit que f est (p, q)-intégrable sur $[a, b]$.*

Remarque 2.1.32 *(i) Si $a = 0$ et $p = 1$, la (p, q)-intégrale se réduit à la q-intégrale.*

(ii) La définition précédente est formelle, car la convergence de la série, du membre droit de la formule 2.10*, n'est pas garentie.*

Le résultat suivant, donne une condition suffisante pour l'existence d'une telle (p, q)-intégraltion.

Théorème 2.1.33 *Supposons que $0 < \frac{q}{p} < 1$. Si pour tout $0 \leq \alpha < 1$, $|f(x)x^\alpha|$ est bornée sur l'intervalle $]0, b]$; alors la (p, q)-intégrale de f converge vers la (p, q)-anti-dérivée F sur $]0, b]$. De plus, F est continue en $x = 0$ avec $F(0) = 0$.*

Montrons ce résultat seulement pour le cas particulier 2.11.

Preuve. On suppose que $|f(x)x^\alpha| < M$ sur $]0, b]$, pour tout $0 < x < b$, $j \geq 0$ on a

$$\left|f\left(\frac{q^j}{p^{j+1}}x\right)\right| < M\left(\frac{q^j}{p^{j+1}}x\right)^{-\alpha}$$

Ainsi pour $0 < x \leq b$ on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{q^j}{p^{j+1}}f\left(\frac{q^j}{p^{j+1}}x\right)\right| &< M\frac{q^j}{p^{j+1}}\left(\frac{q^j}{p^{j+1}}x\right)^{-\alpha} \\ &= Mp^{\alpha-1}x^\alpha\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{1-\alpha}\right]^j\end{aligned} \tag{2.12}$$

Car $1-\alpha>0$ et $\frac{q}{p}<1$, Ainsi, la cote droite de **2.10** converge à une fonction $F(x)$.De **2.10** on trouve directement $F(0)=0$. $F(x)$ est continue en $x=0$, c'est-à-dire que $F(x)$ tend vers zéro lorsque $x\to 0$,Alors en utilisant 2.12

$$\left|(p-q)\,x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}}x\right)\right|<\frac{M\,(p-q)\,x^{1-\alpha}}{p^{1-\alpha}-q^{1-\alpha}}\quad ,0<x\leq b$$

On vérifié que F est une (p,q)-anti-dérivée de f sur $]0,b]$

$$\begin{aligned}
D_{p,q}F\,(x) &= \frac{1}{(p-q)\,x}\left((p-q)\,px\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}}px\right)-(p-q)\,qx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}}qx\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^k}f\left(\frac{q^k}{p^k}\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k+1}}{p^{k+1}}f\left(\frac{q^{k+1}}{p^{k+1}}x\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^k}f\left(\frac{q^k}{p^k}x\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{p^k}f\left(\frac{q^k}{p^k}x\right)\\
&= f\,(x)
\end{aligned}$$

car la difference est converge. Donc si $x\in\,]0,b]$ et $0<\frac{q}{p}<1$, on obtient $\frac{q}{p}x\in\,]0,b]$ et F est une (p,q)-anti-dérivée de f sur $]0,b]$ □

Remarque 2.1.34 *Notons que si les hypothèses du théorème 2.1.33, ne sont pas satisfaites, alors la formule 2.10 (en particulier la formule 2.11) peut ne pas être valide.*

L'exemple suivant illustre cette affirmation.

Exemple 2.1.35 *Soit f une fonction définie par $f(x)=\frac{1}{x}$. On a*

$$D_{p,q}\ln x=\frac{\ln px-\ln qx}{(p-q)\,x}=\frac{\ln p-\ln q}{p-q}\frac{1}{x},$$

donc

$$\int f(x)d_{p,q}x = \int \frac{1}{x}d_{p,q}x = \frac{p-q}{\ln p - \ln q}\ln x.$$

Or, la formule 2.11, donne

$$\int \frac{1}{x}d_{p,q}x = (p-q)\,x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}\frac{p^{k+1}}{q^k}\frac{1}{x} = (p-q)\sum_{k=0}^{\infty}1 = \infty.$$

Remarquons que $f(x)x^{\alpha}$ n'est pas bornée pour tout $0 \leq \alpha < 1$ et que $\ln x$ n'est pas continue en $x = 0$.

En appliquant la formule 2.10, on obtient la (p,q)-intégrale définie qui est donnée par la définition suivante.

Définition 2.1.36 *Soit f une fonction arbitraire et $a \in \mathbb{R}$. Alos la (p,q)-intégrale définie de f est définie par*

$$\int_0^a f(x)d_{p,q}x = (q-p).a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{q^{k+1}}f(\frac{p^k}{p^{k+1}}a), \quad si \ \left|\frac{p}{q}\right| < 1$$

$$\int_0^a f(x)d_{p,q}x = (p-q).a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}f(\frac{q^k}{p^{k+1}}a), \quad si \ \left|\frac{p}{q}\right| > 1 \tag{2.13}$$

Remarque 2.1.37 *Pour $p = 1$, la $(1,q)$-intégrale définie 2.13 se réduite à la q-intégrale de Jackson*

$$\int_0^a f(x)d_qx = (1-q).x\sum_{k=0}^{\infty}q^kf(q^kx).$$

Définition 2.1.38 *Soient f une fonction arbitraire, a et b deux nombres positifs tels que $a < b$, alors*

$$\int_a^b f(x)d_{p,q}x = \int_0^b f(x)d_{p,q}x - \int_0^a f(x)d_{p,q}x.$$

Exemple 2.1.39 *Soient f une fonction définie sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ par $f(x)=x$. Alors, en appliquant la formule 2.10, on obtient*

$$\begin{aligned}
\int_a^x f(t) d_{p,q} t &= \int_a^x t d_{p,q} t \\
&= (q-p).(x-a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} x + (1-\frac{q^k}{p^{k+1}})a\right) \\
&= \frac{(x-a)\left(x-a\left(1-p-q\right)\right)}{p+q}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.40 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. La (p,q)-intégrale de f est un opérateur linéaire.*

Preuve. Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_a^x \left(\lambda f + g\right)(t) d_{p,q} t &= (p-q).\left(x-a\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} \left(\lambda f + g\right) \left(\frac{q^k}{p^{k+1}} x + (1-\frac{q^k}{p^{k+1}})a\right) \\
&= (p-q).\left(x-a\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} \lambda f \left(\frac{q^k}{p^{k+1}} x + (1-\frac{q^k}{p^{k+1}})a\right) \\
&\quad + (p-q).\left(x-a\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} g \left(\frac{q^k}{p^{k+1}} x + (1-\frac{q^k}{p^{k+1}})a\right) \\
&= (p-q).\left(x-a\right) \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} f \left(\frac{q^k}{p^{k+1}} x + (1-\frac{q^k}{p^{k+1}})a\right) \\
&\quad + (p-q).\left(x-a\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} g \left(\frac{q^k}{p^{k+1}} x + (1-\frac{q^k}{p^{k+1}})a\right) \\
&= \lambda \int_a^x f(t) d_{p,q} t + \int_a^x g(t) d_{p,q} t,
\end{aligned}$$

ce qui montre que la (p,q)-intégrale est linéaire. $\square$

On ne peut pas obtenir une bonne définition de la (p,q)-intégrale impropre en laissant simplement $a \to +\infty$ dans la formule2.10. Néanmoins, puisque

$$\begin{aligned}
\int_{q^{j+1}/p^{j+1}}^{q^j/p^j} f(x)d_{p,q}x &= \int_0^{\frac{q^j}{p^j}} f(x)d_{p,q}x - \int_0^{\frac{q^{j+1}}{p^{j+1}}} f(x)d_{p,q}x \\
&= (p-q)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k+j}}{p_{k+j+1}} f\left(\frac{q^{k+j}}{p^{k+j+1}}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k+j+1}}{p^{k+j+2}} f\left(\frac{q^{k+j+1}}{p^{k+j+2}}\right)\right] \\
&= (p-q)\frac{q^j}{p^{j+1}} f\left(\frac{q^j}{p^{j+1}}\right),
\end{aligned}$$

il est naturel de définir la (p,q)-intégrale impropre comme suit.

Définition 2.1.41 *La (p,q)-intégrale impropre d'une fonction f sur $[0,+\infty[$ est donnée par*

$$\int_0^{\infty} f(x)d_{p,q}x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}/p^{j+1}}^{q^j/p^j} f(x)d_{p,q}x = (p-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{q^j}{p^{j+1}} f\left(\frac{q^j}{p^{j+1}}\right), \ \ si \ \ 0 < \frac{q}{p} < 1, \quad (2.14)$$

ou

$$\int_0^{\infty} f(x)d_{p,q}x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^j/p^j}^{q^j+1/p^j+1} f(x)d_{p,q}x, \quad si \ \frac{q}{p} > 1.$$

La convergence de l'intégrale (p,q)-impropre est donnée par résultat suivant donne .

Proposition 2.1.42 *Supposons que $0 < \frac{q}{p} < 1$. L'intégrale (p,q)-impropre de la fonction f est converge si $x^{\alpha} f(x)$ est borné au voisinage de $x = 0$ avec $\alpha < 1$ et pour x suffisamment grand avec $\alpha > 1$.*

Preuve. En appliquant la formule 2.14 de la (p,q)-intégrale impropre, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(x)d_{p,q}x &= (p-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{q^j}{p^{j+1}} f\left(\frac{q^j}{p^{j+1}}\right) \\
&= (p-q)\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^j}{p^{j+1}} f\left(\frac{q^j}{p^{j+1}}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{-j}}{p^{-j+1}} f\left(\frac{q^{-j}}{p^{-j+1}}\right)\right].
\end{aligned}$$

La convergence de la première somme est assurée par le théorème 2.1.33. Pour la deuxième somme, supposons que pour x assez grand, il exite $M > 0$ tel que

$$|x^{\alpha} f(x)| < M, \text{ avec } \alpha > 1.$$

Alors, on a pour j suffisamment grand

$$\begin{aligned}
\left|\frac{q^{-j}}{p^{-j+1}} f\left(\frac{q^{-j}}{p^{-j+1}}\right)\right| &= p^{\alpha-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{j(\alpha-1)}\left|\left(\frac{q^{-j}}{p^{-j+1}}\right)^{\alpha} f\left(\frac{q^{-j}}{p^{-j+1}}\right)\right| \\
&< Mp^{\alpha-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{j(\alpha-1)},
\end{aligned}$$

ce qui signifie que la deuxième somme est également majourée par une série géométrique convergente, et donc converge. Par conséquent, l'intégrale (p,q)-impropre est convergente. □

Remarque 2.1.43 *Une proposition similaire peut être formulée lorsque* $\frac{q}{p} > 1$.

La proposition 2.1.42 motive la définition suivante.

Définition 2.1.44 *Soit f une fonction arbitraire et un nombre réel positif, alors on a*

$$\int_a^{\infty} f(x) d_{p,q}x := \begin{cases} (p-q).a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{-k}}{q^{-(k+1)}} f(\frac{p^{-k}}{q^{-(k+1)}}a), & si \quad \left|\frac{p}{q}\right| < 1, \\ (p-q).a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{-k}}{p^{-(k+1)}} f(\frac{q^{-k}}{p^{-(k+1)}}a), & si \quad \left|\frac{p}{q}\right| > 1. \end{cases}$$

D'une façon similaire aux cas du calcul classique et du $q-$calcul, nous avons le théorème fondamental suivant du (p,q)-calcul suivant qui donne la formule de (p,q)-Newton-Leibniz.

Théorème 2.1.45 *Si F est (p,q)-anti-dérivée de f et si F est continue en $x = 0$, alors*

$$\int_a^b f(x) d_{p,q}x = F(b) - F(a)\ t, \quad où\ 0 \leq a < b \leq \infty.$$

Preuve. Comme F est continue en $x = 0$, alors F est donnée par la formule

$$F(x) = (p-q)x \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^j}{p^{j+1}} f\left(\frac{q^j}{p^{j+1}} x\right) + F(0),$$

et puisque par définition, on a

$$\int_0^a f(x) d_{p,q} x = (p-q)a \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^j}{p^{j+1}} f\left(\frac{q^j}{p^{j+1}} a\right),$$

alors

$$\int_0^a f(x) d_{p,q} x = F(a) - F(0).$$

De même, on a, pour un réel b fini

$$\int_0^b f(x) d_{p,q} x = F(b) - F(0).$$

Ainsi

$$\int\limits_a^b f(x) d_{p,q} x = \int_0^b f(x) d_{p,q} x - \int_0^a f(x) d_{p,q} x = F(b) - F(a).$$

□

Corollaire 2.1.46 *Si la dérivée ordinaire $f'(x)$ existe au voisinage de $x = 0$ et est continue en $x = 0$, alors on a*

$$\int\limits_a^b D_{p,q} f(x) d_{p,q} x = f(b) - f(a).$$

Supposons maintenant que f et g sont deux fonctions dont les dérivées ordinaires existent au voisinage de$x = 0$. En utilisant la règle du produit 2.1.15 pour la (p,q)-dérivée, on obtient

$$D_{p,q} \left(f(x) g(x)\right) = f\left(px\right) D_{p,q} g(x) + g\left(qx\right) D_{p,q} f(x).$$

Puisque le produit de fonctions dérivables est également dérivable dans le calcul classique, en appliquant le corollaire 2.1.46, on a le résultat suivant qui donne la (p,q)-intégration par partie.

Théorème 2.1.47 *On a*

$$\int_a^b f(px)\, D_{p,q}g(x)d_{p,q}x = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b g(qx)\, D_{p,q}f(x)d_{p,q}x.$$

2.2 (p,q)-Inégalités intégrales

Les inégalités mathématiques jouent un rôle important dans de nombreuses branches des mathématiques, en particulier, dans l'analyse, les équations différentielles, la géométrie, etc. Ces dernières années, les q-inégalités intégrales et certaines de ces généralisations de type quantique ont été étudiées par de nombreux auteurs, voir [10]. Dans ce paragraphe, nous allons étudier certaines de ces inégalités intégrales sur des intervalles finis via le (p,q)-calcul.

2.2.1 (p,q)-Inégalité intégrale de Hölder

La (p,q)-Inégalité intégrale de Hölder a été démontré récament en 2021, par M. Tunç et E. Göv, [18] . Définissons d'abord, la (p_k,q_k)-dérivée et la (p_k,q_k)-intégrale d'une fonction sur un intervalle fini $I_k = [y_k, y_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$, où q_k et p_k, sont des constants réels vérifiant $0 < q_k < p_k \leq 1$.

Définition 2.2.1 *Soit f une fonction défini sur I_k, on suppose que $y \in I_k$. Alors on a*

$$D_{p_k,q_k} f(y) = \frac{f(p_k y + (1-p_k)\, y_k) - f(q_k y + (1-q_k)\, y_k)}{(p_k - q_k)(y - y_k)}, \ \ si\ y \neq y_k,$$

et $D_{p_k,q_k} f(y_k) = \lim\limits_{y \to y_k} D_{p_k,q_k} f(y)$

La (p_k, q_k)-intégration comme un inverse de la (p_k, q_k)-dérivation est donnée par la définition suivante.

Définition 2.2.2 *Soit $f : I_k \to \mathbb{R}$, une fonction définie et continue sur I_k et supposons que $0 < q_k < p_k \leq 1$ et $y \in I_k$. Alors a (p_k, q_k)-intégrale de f pour $y \in I_k$ est définie par*

$$\int_{y_k}^{y} f(x)\, d_{p_k,q_k}x = (p_k - q_k)(y - y_k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_k^n}{p_k^{n+1}} f\left(\frac{q_k^n}{p_k^{n+1}} y + \left(1 - \frac{q_k^n}{p_k^{n+1}} \right) y_k \right)$$

Rappelons l'inégalité intégrale classique de Hö■lder sur un intervalle fini $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Théorème 2.2.3 *Soit f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et soient $s_1, s_2 > 1$ tels que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1$. Alors*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^{s_1} dx \right)^{\frac{1}{s_1}} . \left(\int_a^b |g(x)|^{s_2} dx \right)^{\frac{1}{s_2}} .$$

En particulier, pour $s_1 = s_2 = 2$, on obtient l'inégalité intégrale de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Le résultat suivant est une (p, q)-généralisation du théorème 2.2.3.

Théorème 2.2.4 *Soient f et g deux fonction définies sur $[a, b]$, $0 < q < p \leq 1$ et s_1,$s_2 > 0$ tels que $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1$. Alors*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, d_{p,q}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^{s_1} d_{p,q}x \right)^{\frac{1}{s_1}} . \left(\int_a^b |g(x)|^{s_2} d_{p,q}x \right)^{\frac{1}{s_2}} .$$

Preuve. De la définition 2.2.2 et l'Inégalité de Hölderer discrète classique, on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |f(x) g(x)| \, d_{p,q}x \\
= \;& (p-q)(b-a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} \left| f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} b + \left(1 - \frac{q^k}{p^{k+1}}\right) a\right) g\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} b + \left(1 - \frac{q^k}{p^{k+1}}\right) a\right) \right| \\
= \;& (p-q)(b-a) \sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} b + \left(1 - \frac{q^k}{p^{k+1}}\right) a\right) \left(\frac{q^k}{p^{k+1}}\right)^{\frac{1}{s_1}} \right| \\
& \times \left| g\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} b + \left(1 - \frac{q^k}{p^{k+1}}\right) a\right) \left(\frac{q^k}{p^{k+1}}\right)^{\frac{1}{s_2}} \right| \\
\leq \;& \left((p-q)(b-a) \sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} b + \left(1 - \frac{q^k}{p^{k+1}}\right) a\right) \right|^{s_1} \left(\frac{q^k}{p^{k+1}}\right)^{\frac{1}{s_1}} \right) \\
& \times \left((p-q)(b-a) \sum_{k=0}^{\infty} \left| g\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} b + \left(1 - \frac{q^k}{p^{k+1}}\right) a\right) \right|^{s_2} \left(\frac{q^k}{p^{k+1}}\right)^{\frac{1}{s_2}} \right) \\
= \;& \left(\int_a^b |f(x)|^{s_1} \, d_{p,q}x \right)^{\frac{1}{s_1}} . \left(\int_a^b |g(x)|^{s_2} \, d_{p,q}x \right)^{\frac{1}{s_2}}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Comme conséquence, le corollaire suivant qui donne la (p,q)-Inégalité intégrale de Cauchy-Schwarz.

Corollaire 2.2.5 *Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent, en prenant $s_1 = s_2 = 2$, on obtient*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, d_{p,q}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, d_{p,q}x \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_a^b |g(x)|^2 \, d_{p,q}x \right)^{\frac{1}{2}} .$$

2.2.2 (p,q)-Inégalité intégrale d'Hermite-Hadamard.

Rappelons d'abord, la définition d'une fonction convexe sur un intervalle fini $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.2.6 *Une fonction définie sur $[a,b]$ est dite convexe, si pour tout $x, y \in [a,b]$ et tout*

$t \in [0,1]$ *on a*

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

Rappelons aussi, l'Inégalité intégrale d'Hermite-Hadamard classique.

Théorème 2.2.7 *Si* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable et convexe sur* $[a,b]$*, alors*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.15}$$

En 2018, Kunt et al. [17] ont donné la formule correcte de l'inégalité d'Hermite-Hadamard dans le (p,q)-calcul..

Théorème 2.2.8 *Si* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction* (p,q)*-dérivable et convexe sur* $[a,b]$*, alors*

$$f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{p(b-a)}\int_a^{pb+(1-p)a} f(x)\,d_{p,q}x \leq \frac{qf(a)+pf(b)}{p+q} \tag{2.16}$$

Preuve. Puisque f est une fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe une droite tangente pour la fonction f au point $\frac{qa+pb}{p+q} \in \left]a,b\right[$. Cette droite tangente peut être exprimée comme une fonction de la forme

$$h(x) = f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) + \left(x - \frac{qa+pb}{p+q}\right) f'\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right).$$

Comme f est une fonction convexe sur $[a,b]$, alors on a

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b),$$

en particulier

$$h(x) \leq f(x), \text{ pour tout } x \in [a,b]. \tag{2.17}$$

La (p,q)-intégration de l'inégalité 2.17 sur $[a, pb+(1-p)a]$ donne

$$\int_{a}^{pb+(1-p)a} h(x)\, d_{p,q}x = p(b-a) f\left(\frac{qa+pb}{p+q}\right) \leq \int_{a}^{pb+(1-p)a} f(x)\, d_{p,q}x \tag{2.18}$$

D'autre part, la ligne droite reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ peut être exprimée comme une fonction de la forme

$$k(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Puisque f est une fonction convexe sur $[a,b]$, alors on a l'inégalité suivante

$$f(x) \leq k(x), \text{ pour tout } x \in [a,b]. \tag{2.19}$$

Une (p,q)-intégration de l'inégalité 2.19 sur $[a, pb+(1-p)a]$ donne

$$\int_{a}^{pb+(1-p)a} k(x)\, d_{p,q}x = p(b-a)\frac{qf(a)+pf(b)}{p+q} \geq \int_{a}^{pb+(1-p)a} f(x)\, d_{p,q}x. \tag{2.20}$$

De 2.18 et 2.20 on obtient la (p,q)-Inégalité intégrale d'Hermite-Hadamard 2.16. $\square$

2.2.3 (p,q)-Transformation de Laplace

Rappelons les deux types de fonctions (p,q)-exponentielles 2.1 et 2.2 pour une variable complexe $x \in \mathbb{C}$

Définition 2.2.9 *Soit $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| < 1$. Alors les deux formes de fonctions (p,q)-exponentielles sont définies par*

$$\begin{cases} e_{p,q}(x) = & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{\binom{n}{2}}}{[n]_{p,q}!} x^n \\ E_{p,q}(x) = & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}}}{[n]_{p,q}!} x^n \end{cases},$$

et les propriétés suivantes

$$e_{p,q}(x)E_{p,q}(-x) = 1 \text{ et } E_{p,q}(x) = e_{p^{-1},q^{-1}}(x).$$

Rapellons aussi les résultats suivants.

Proposition 2.2.10 *Soit λ un nombre complexe. Alors*

$$\begin{aligned} D_{p,q}e_{p,q}(\lambda x) &= \lambda e_{p,q}(\lambda p x), \\ D_{p,q}e_{p-1,q-1}(\lambda x) &= \lambda e_{p-1,q-1}(\lambda q x). \end{aligned}$$

Utilisant la définition 2.2.9, on obtient les relations (p,q)-trigonométriques suivantes.

Proposition 2.2.11 *Soit n un entier positif. Alors*

$$\cos_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p^{\binom{2n}{2}}}{[2n]_{p,q}!} x^{2n}, \tag{2.21}$$

$$\sin_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n p^{\binom{2n+1}{2}}}{[2n+1]_{p,q}!} x^{2n+1}. \tag{2.22}$$

Définition 2.2.12 *Soit f une fonction donnée. Alors la (p,q)-transformée de Laplace de première espèce de la fonction f est définie par*

$$F(s) = \mathcal{L}_{p,q}\left\{f'(x)\right\}(s) = \int_0^{\infty} f(x)e_{p^{-1},q^{-1}}(-sx)d_{p,q}x, \quad s > 0.$$

Quelques propriétés de la (p,q)- transformée de Laplace sont résumées dans ce qui suit.

Proposition 2.2.13 *Soient α, β deux nombres complexes et f, g deux fonctions données. Alors*

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{\alpha f'(x) + \beta g(x)\right\}(s) = \alpha\mathcal{L}_{p,q}\left\{f'(x)\right\}(s) + \beta\mathcal{L}_{p,q}\left\{g(x)\right\}(s)$$

Preuve. Par définition on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p,q}\left\{\alpha f'(x)+\beta g(x)\right\}(s) &= \int_0^\infty (\alpha f'(x)+\beta g(x))e_{p^{-1},q^{-1}}(-sx)d_{p,q}x \\
&= \alpha\int_0^\infty f'(x)e_{p^{-1},q^{-1}}(-sx)d_{p,q}x+\beta\int_0^\infty g(x)e_{p^{-1},q^{-1}}(-sx)d_{p,q}x \\
&= \alpha\mathcal{L}_{p,q}\left\{f'(x)\right\}(s)+\beta\mathcal{L}_{p,q}\left\{g(x)\right\}(s).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la (p,q)- transformation de Laplace est linéaire. □

Théorème 2.2.14 *Soit α un nombre complexe non nul. Alors on a*

$$f'(\alpha x)=\frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha}).$$

Preuve. De la définition 2.2.12, on a

$$\begin{aligned}
F(\frac{s}{\alpha}) &= \int_0^\infty e_{p^{-1},q^{-1}}(-\frac{s}{\alpha}x)f(x)d_{p,q}x \\
&= \alpha\int_0^\infty e_{p^{-1},q^{-1}}(-sx)f(\alpha x)d_{p,q}x,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha}) &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e_{p^{-1},q^{-1}}(-\frac{s}{\alpha}x)f(x)d_{p,q}x \\
&= \int_0^\infty e_{p^{-1},q^{-1}}(-sx)f(\alpha x)d_{p,q}x.
\end{aligned}$$

Ce qui donne $f'(\alpha x)=\frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha})$. □

Théorème 2.2.15 *Soit $\alpha>-1$, on a*

$$\mathcal{L}_{p,q}\left(t^\alpha\right)=\frac{q^{\alpha+1}}{p^{\binom{\alpha+1}{2}}s^{\alpha+1}}\Gamma_{p,q}\left(\alpha+1\right).$$

Preuve. De la définition 2.2.12, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p,q}\left\{t^{\alpha}\right\}(s) &= \int_0^{\infty} t^{\alpha} E_{p,q}(-qsx)d_{p,q}x \\
&= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} E_{p,q}(-qx)t^{\alpha} d_{p,q}x \\
&= \frac{1}{p^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} s^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} p^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} t^{(\alpha+1)-1} E_{p,q}(-qx)t^{\alpha} d_{p,q}x \\
&= \frac{\Gamma_{p,q}(\alpha+1)}{p^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} s^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.16 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{e_{p,q}(\alpha x)\right\}(s) = \tfrac{pq}{ps-\alpha q}, \quad \tfrac{aq}{ps} < 1,$$
$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{E_{p,q}(\alpha x)\right\}(s) = \tfrac{1}{s}\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\tfrac{p}{q}\right)^{\binom{k}{2}} \left(\tfrac{\alpha}{ps}\right)^k$$

Preuve. De2.1, 2.2 et la définition 2.2.12, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p,q}\left\{e_{p,q}(\alpha x)\right\}(s) &= \int_0^{\infty} E_{p,q}(-qsx)e_{p,q}(\alpha x)d_{p,q}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k p^{\binom{k}{2}}}{[k]_{p,q}!} \int_0^{\infty} E_{p,q}(-qsx)x^k d_{p,q}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k p^{\binom{k}{2}}}{[k]_{p,q}!} \frac{[k]_{p,q}!}{p^{\binom{k+1}{2}} s^{k+1}} \\
&= \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{ps}\right)^k \\
&= \frac{p}{ps-\alpha}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p,q}\left\{E_{p,q}(\alpha x)\right\}(s) &= \int_0^\infty E_{p,q}(-qsx)E_{p,q}(\alpha x)d_{p,q}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\alpha^k q^{\binom{k}{2}}}{[k]_{p,q}!}\int_0^\infty E_{p,q}(-qsx)x^k d_{p,q}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\alpha^k q^{\binom{k}{2}}}{[k]_{p,q}!}\frac{[k]_{p,q}!}{p^{\binom{k+1}{2}}s^{k+1}} \\
&= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{q}{p}\right)^{\binom{k}{2}}\left(\frac{\alpha}{ps}\right)
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.17 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ Alors on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p,q}\left\{\cos_{p,q}(\alpha x)\right\}(s) &= \frac{p^2 s}{(ps)^2+\alpha^2}, \\
\mathcal{L}_{p,q}\left\{\sin_{p,q}(\alpha x)\right\}(s) &= \frac{p\alpha}{(ps)^2+\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Preuve. d'apres 2.21 et 2.22 on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p,q}\left\{\cot_{p,q}(\alpha x)\right\}(s) &= \int_0^\infty E\left(-qsx\right)\cos_{p,q}(\alpha x)d_{p,q}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \alpha^{2k} p^{\binom{2k}{2}}}{[2k]_{p,q}!}\int_0^\infty E_{p,q}(-qsx)x^{2k}d_{p,q}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k \alpha^{2k} p^{\binom{2k}{2}}}{[2k]_{p,q}!}\frac{[2k]_{p,q}!}{p^{\binom{2k+1}{2}}s^{2k+1}} \\
&= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\alpha}{ps}\right)^{2k} \\
&= \frac{p^2 s}{(ps)^2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p,q}\left\{\sin_{p,q}(\alpha x)\right\}(s) &= \int_0^\infty E\left(-qsx\right)\sin_{p,q}(\alpha x)d_{p,q}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\alpha^{2k+1}p^{\binom{2k+1}{2}}}{\left[2k+1\right]_{p,q}!}\int_0^\infty E_{p,q}(-qsx)x^{2k+1}d_{p,q}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\alpha^{2k}p^{\binom{2k+1}{2}}}{\left[2k+1\right]_{p,q}!}\frac{\left[2k+1\right]_{p,q}!}{p^{\binom{2k+2}{2}}s^{2k+2}} \\
&= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\alpha}{ps}\right)^{2k+1} \\
&= \frac{p\alpha}{\left(ps\right)^2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

□

La (p,q)-transformée de Laplace de la dérivée est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2.2.18 *Soit α un nombre complexe non nul. Alors*

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{D_{p,q}f(\alpha x)\right\}(s) = \frac{s}{\alpha^2 pq}F\left(\frac{s}{\alpha p}\right) - \frac{1}{\alpha}f(0).$$

La formule d'inversion de la transformation de (p,q)-Laplace est donnée dans la définition suivante.

Définition 2.2.19 *La transformation de (p,q)-Laplace inverse est notée et définie par*

$$f(s) = \mathcal{L}_{p,q}^{-1}\left\{F(x)\right\}(s) = \int_0^\infty F(x)e_{p^{-1},q^{-1}}(-sx)d_{p,q}x, \quad s>0.$$

2.3 (p,q)-Calcul fractionnaire

2.3.1 (p,q)-Intégrale fractionnaire

Dans ce paragraphe, nous exposons et étudions la notion de la (p,q)-intégrale fractinnaire introduite par J. Soontharanon et T. Sitthiwirattham dans [15]

Définition 2.3.1 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, $\alpha > 0$ et $0 < q < p \leq 1$. La (p,q)-intégrale fractinnaire de f est définie par*

$$\begin{aligned} I_{p,q}^{\alpha} f(x) \quad &: \quad = \frac{1}{p^{\binom{\alpha}{2}} \Gamma_{p,q}(\alpha)} \int_0^x (x-qs)_{p,q}^{\alpha-1} f\left(\frac{s}{p\alpha-1}\right) d_{p,q}s \\ &= \frac{(p-q)\,x}{p^{\binom{\alpha}{2}} \Gamma_{p,q}(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} \left(x - \left(\frac{q}{p}\right)^{k+1} x\right)_{p,q}^{\alpha-1} f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}} x\right) \end{aligned}$$

et $(I_{p,q}^0 f)(x) = f(x)$.

Quelques propriétés de la (p,q)-intégration fractinnaire sont données par les résultats suivants.

Théorème 2.3.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Alors on a*

$$I_{p,q}^{\alpha} f(x) = I_{p,q}^{\alpha+1} \left[D_{p,q} f(x)\right] + \frac{f(0)}{p^{\binom{\alpha}{2}} \Gamma_{p,q}(\alpha+1)} x^{\alpha}.$$

Preuve. Elle découle de la Proposition 2.1.19 et la (p,q)-intégration par partie de Théorème 2.1.47. $\square$

Nous avons besoin du Lemme suivant

Lemme 2.3.3 *Pour $\mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ on a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{\alpha k} \frac{\left(1-\mu q^{1-k}\right)_q^{\alpha-1} \left(1-\mu q^{1+k}\right)_q^{\beta-1}}{(1-q)_q^{\alpha-1} (1-q)_q^{\beta-1}} = \frac{(1-\mu q)_q^{\alpha+\beta-1} \left(1-\mu q^{1+k}\right)_q^{\beta-1}}{(1-q)_q^{\alpha+\beta-1}}.$$

Théorème 2.3.4 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $\alpha,\beta>0$. Alors*

$$I_{p,q}^{\alpha}\left[I_{p,q}^{\beta}f(x)\right]=I_{p,q}^{\beta}\left[I_{p,q}^{\alpha}f(x)\right]=I_{p,q}^{\alpha+\beta}f(x).$$

Preuve. Pour tout $x\in[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}
I_{p,q}^{\alpha}I_{p,q}^{\beta}f(x) &= \frac{1}{p^{\binom{\alpha}{2}+\binom{\beta}{2}}\Gamma_{p,q}(\alpha)\Gamma_{p,q}(\beta)}\int_0^x\int_0^{\frac{t}{p^{\alpha-1}}}(x-qt)_{p,q}^{\alpha-1}\left(\frac{t}{p^{\alpha-1}}-qs\right)_{p,q}^{\beta-1}f\left(\frac{s}{p^{\beta-1}}\right)d_{p,q}s\,d_{p,q}t\\
&= \frac{(p-q)^2x^{\alpha+\beta}}{p^{\binom{\alpha+\beta}{2}}\Gamma_{p,q}(\alpha)\Gamma_{p,q}(\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^{k+h+k\beta}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k+1}\right)_{p,q}^{\alpha-1}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{h+1}\right)_{p,q}^{\beta-1}\\
&\quad\times f\left(\frac{q^{k+h}}{p^{k+h+\alpha+\beta}}\right)\\
&= \frac{(p-q)\,x^{\alpha+\beta}}{p^{\binom{\alpha+\beta}{2}}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{q^h}{p^{h+1}}\left[\begin{array}{c}\frac{(p-q)}{p\Gamma_{p,q}(\alpha)\Gamma_{p,q}(\beta)}\sum_{k=0}^{h}\left(\frac{q}{p}\right)^{k\beta}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k+1}\right)_{p,q}^{\alpha-1}\\ \times\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{h-k+1}\right)_{p,q}^{\beta-1}\end{array}\right]f\left(\frac{q^h}{p^{h+\alpha+\beta}}x\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\Gamma_{p,q}(\alpha+\beta)=\frac{(p-q)_{p,q}^{\alpha+\beta-1}}{(p-q)^{\alpha+\beta-1}}=\frac{\left(1-\frac{q}{p}\right)_{p,q}^{\alpha+\beta-1}}{\left(1-\frac{q}{p}\right)^{\alpha+\beta-1}}$, du lemme 2.3.3, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{h}\left(\frac{q}{p}\right)^{k\beta}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k+1}\right)_{p,q}^{\alpha-1}\times\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{h-k+1}\right)_{p,q}^{\beta-1}\\
&= p^{\binom{\alpha-1}{2}+\binom{\beta-1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^{k\beta}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k+1}\right)_{\frac{q}{p}}^{\alpha-1}\times\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{h-k+1}\right)_{\frac{q}{p}}^{\beta-1}\\
&= \Gamma_{p,q}(\alpha)\Gamma_{p,q}(\beta)\frac{\left(1-\frac{q}{p}\right)_{p,q}^{\alpha+\beta-1}}{\left(1-\frac{q}{p}\right)}\frac{\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{h+1}\right)_{p,q}^{\alpha+\beta-1}}{\left(1-\frac{q}{p}\right)_{p,q}^{\alpha+\beta-1}}\\
&= \frac{\Gamma_{p,q}(\alpha)\Gamma_{p,q}(\beta)}{p-q}\frac{\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{h+1}\right)_{p,q}^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma_{p,q}(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha}_{p,q}I^{\beta}_{p,q}f(x) &= \frac{(p-q)\,x^{\alpha+\beta}}{p^{\binom{\alpha+\beta}{2}}\Gamma_{p,q}(\alpha+\beta)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{q^h}{p^{h+1}}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{h+1}\right)_{p,q}^{\alpha+\beta-1} f\left(\frac{q^h}{p^{k+h+\alpha+\beta}}x\right)\\
&= \frac{(p-q)\,x}{p^{\binom{\alpha+\beta}{2}}\Gamma_{p,q}(\alpha+\beta)}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{q^h}{p^{h+1}}\left(x-\left(\frac{q}{p}\right)^{h+1}x\right)_{p,q}^{\alpha+\beta-1} f\left(\frac{q^h}{p^{k+h+\alpha+\beta}}x\right)\\
&= \frac{1}{p^{\binom{\alpha+\beta}{2}}\Gamma_{p,q}(\alpha+\beta)}\int_0^x (x-qt)_{p,q}^{\alpha+\beta-1} f\left(\frac{t}{p^{\alpha+\beta-1}}\right) d_{p,q}t\\
&= I^{\alpha+\beta}_{p,q}f(x).
\end{aligned}
$$

De la même façon, on trouve que $I^{\beta}_{p,q}I^{\alpha}_{p,q}f(x) = I^{\alpha+\beta}_{p,q}f(x)$. □

2.3.2 (p, q)-Dérivée fractionnaire

Dans cette section, nous introduisons les notions de la (p, q)-dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et la (p, q)- dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Ces nouvelles notions sont une généralisation de la notion de n-ième (p, q)-dérivation donnée par la formule 2.7 dans la définition 2.1.25, en remplaçant l'ordre naturel n par un réel $\alpha > 0$.

Rappelons d'abord les deux notions classiques d'intégrale fractionnaire de type Riemann-Liouville

Définition 2.3.5 *Soit f une fonction définie sur $[a; b]$ et $\alpha > 0$. l'intégrale*

$$I^{\alpha}_{a^+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}f(s)ds, x > a,$$

est appelée l'intégrale fractionnaire (à gauche) d'ordre α de Riemann-Liouville et l'intégrale

$$I^{\alpha}_{b_-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (x-s)^{\alpha-1}f(s)ds, x < b,$$

est appelée l'intégrale fractionnaire(à droite) d'ordre α de Riemann-Liouville, avec

$$I^{\alpha}_{a}f(x) = f(x).$$

La définition suivante introduit la notion de la (p,q)-dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Définition 2.3.6 *Soient $n \geq 1$, $n-1 < \alpha < n$, $0 < q < p \leq 1$ et f une fonction définie sur $[a;b]$. La (p,q)-dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est définie par*

$$D_{p,q}^{\alpha} f(x) = D_{p,q}^{n} I_{p,q}^{n-\alpha} f(x) \tag{2.23}$$

avec

$$D_{p,q}^{0} f(x) = f(x).$$

L'opérateur intégrale $I_{p,q}^{n-\alpha} f$ de la formule 2.23, est appelée la (p,q)-intégrale fractionnaire d'ordre $n-\alpha$ au sens de Riemann-Liouville.

Montrons maintenant, quelques résultats importants sur ces opérateurs fractionnaire de type Riemann-Liouville. Commençons par le résultat suivant qui donne le lien entre la (p,q)-dérivée fractionnaire $D_{p,q}^{\alpha}$ et la (p,q)-intégrale fractionnaire $I_{p,q}^{\alpha} f$.

Théorème 2.3.7 *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $0 < q < p \leq 1$ Alors on a*

$$D_{p,q}^{\alpha} I_{p,q}^{\alpha} f(x) = f(x).$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel vérifiant $n-1 < \alpha < n$. Alors

$$\begin{aligned} D_{p,q}^{\alpha} I_{p,q}^{\alpha} f(x) &= D_{p,q}^{n} I_{p,q}^{n-\alpha} I_{p,q}^{\alpha} f(x) \\ &= D_{p,q}^{n} I_{p,q}^{n} f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$\square$

Théorème 2.3.8 *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ *et* $0 < q < p \leq 1$ *Alors*

$$I_{p,q}^{\alpha} D_{p,q}^{\alpha} f(x) = f(x) + Cx^{\alpha-1}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Posons $C(x) = I_{p,q}^{\alpha} D_{p,q}^{\alpha} f(x) - f(x)$. En appliquant l'opérateur $D_{p,q}^{\alpha}$ aux deux membres de cette expression et en utilisant le Théorème 2.3.7, on obtient

$$D_{p,q}^{\alpha} C(x) = D_{p,q}^{\alpha} I_{p,q}^{\alpha} D_{p,q}^{\alpha} f(x) - D_{p,q}^{\alpha} f(x) = D_{p,q}^{\alpha} f(x) - D_{p,q}^{\alpha} f(x) = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x - qs)_{p,q}^{-\alpha} (p^{\alpha} s)^{\alpha-1} d_{p,q}s &= (p-q)\, x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} \left(x - \left(\frac{q}{p}\right)^{k+1} x \right)_{p,q}^{-\alpha} \left(\frac{q^k}{p^{k+1-\alpha}} x \right)^{\alpha-1} \\
&= (p-q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k\alpha}}{p^{(k+1)\alpha - \alpha(\alpha-1)}} \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{k+1} \right),
\end{aligned}$$

De la formule 2.23 et la définition 2.3.1, on obtient

$$\begin{aligned}
D_{p,q}^{\alpha} x^{\alpha-1} &= D_{p,q} I_{p,q}^{1-\alpha} x^{\alpha-1} \\
&= D_{p,q} \left[\frac{1}{p^{\binom{1-\alpha}{2}} \Gamma_{p,q}(1-\alpha)} \int_0^x (x - qs)_{p,q}^{-\alpha} (p^{\alpha} s)\, d_{p,q}s \right] \\
&= D_{p,q} \left[(p-q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k\alpha}}{p^{(k+1)\alpha - \alpha(\alpha-1)}} \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{k+1} \right) \right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

Ce qui donne $C(x) = Cx^{\alpha-1}$. D'où le résultat. $\square$

Maintenant, nous donnons le concept de (p, q)-dérivation fractionnaire au sens de Caputo.

Définition 2.3.9 *Soit* f *une fonction définie sur* $[a, b]$, $0 < \alpha$. *La* (p, q)*-dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par*

$$\begin{aligned}
{}^{c}D_{p,q}^{\alpha} f(x) &= I_{p,q}^{n-\alpha} D_{p,q}^{n} f(x) \\
&= \frac{1}{p^{\binom{n-\alpha}{2}} \Gamma_{p,q}(n-\alpha)} \int_0^x (1 - qs)_{p,q}^{n-\alpha-1} D_{p,q}^{n} f\left(\frac{s}{p^{n-\alpha-1}}\right) d_{q,p}s,
\end{aligned}$$

avec ${}^{c}D^{\alpha}_{p,q}f(x)=f(x)$, *pour* $n-1<\alpha<n$.

Théorème 2.3.10 *Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$ et $0<q<p\leq 1$ Alors on a*

$$ {}^{c}D^{\alpha}_{p,q}f(x)=\frac{(p-q)\,x^{n-\alpha}}{p^{\binom{n-\alpha}{2}}\Gamma_{p,q}(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{qk}{p^{k+1}}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{k+1}\right)_{p,q}^{n-\alpha-1}D^{n}_{p,q}f(\frac{q^k}{p^{k+n-\alpha}}x). $$

Preuve. De la définition 2.3.9, pour tout $x\in[a,b]$, on a

$$ \begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}_{p,q}f(x) &= \frac{1}{p^{\binom{n-\alpha}{2}}\Gamma_{p,q}(n-\alpha)}\int_0^x (1-qs)_{p,q}^{n-\alpha-1}\,D^{n}_{p,q}f(\frac{s}{p^{n-\alpha-1}})d_{q,p}s \\ &= \frac{(p-q)\,x}{p^{\binom{n-\alpha}{2}}\Gamma_{p,q}(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{k+1}\right)_{p,q}^{n-\alpha-1}D^{n}_{p,q}f(\frac{q^k}{p^{k+n-\alpha}}x) \\ &= \frac{(p-q)\,x^{n-\alpha}}{p^{\binom{n-\alpha}{2}}\Gamma_{p,q}(n-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^k}{p^{k+1}}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{k+1}\right)_{p,q}^{n-\alpha-1}D^{n}_{p,q}f(\frac{q^k}{p^{k+n-\alpha}}x). \end{aligned} $$

□

2.4 Applications

2.4.1 Application aux équations aux q-dérivées partielles

Ce paragraphe est consacré à une appliction à l'équation de la chaleur dans le cadre du (p,q)-calcul, où $p=1$ et $0<q\leq 1$.

Soit $\mathbb{T}:=\left\{q^k : k\in\mathbb{N}\right\}$ et soit u une fonction définie par

$$ \begin{array}{rccc} u: & \mathbb{T}\times\mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & u\,(t,x) \end{array}. $$

Nous avons besoin de définitions suivantes.

Définition 2.4.1 *Les q-dérivées partielles du premier ordre sont notées et définies par*

$$u_t\,(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}\,(t,x) = \frac{u(qt,x)-u(t,x)}{(q-1)t}, \tag{2.24}$$

et

$$u_x\,(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}\,(t,x) = \frac{u(t,qx)-u(t,x)}{(q-1)x}.$$

Définition 2.4.2 *La q-dérivée partielle du second ordre de u par rapport à t est notée et donnée par*

$$u_{t,t}\,(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}\,(t,x) = \frac{u_t(qt,x)-u_t(t,x)}{(q-1)t}. \tag{2.25}$$

En remplaàant 2.24 dans 2.25, la q-dérivée partielle du second ordre $u_{t,t}$ devient

$$u_{t,t}\,(t,x) = \frac{\frac{u(q^2t,x)-u(qt,x)}{(q-1)qt} - \frac{u(qt,x)-u(t,x)}{(q-1)t}}{(q-1)t}.$$

La q-dérivée partielle du second ordre $u_{x,x}$ par rapport à x de la fonction u est définie de manière similaire, i.e.,

$$u_{x,x}\,(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\,(t,x) = \frac{\frac{u(t,q^2x)-u(t,qx)}{(q-1)qx} - \frac{u(t,qx)-u(t,x)}{(q-1)x}}{(q-1)x} \tag{2.26}$$

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$t\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \tag{2.27}$$

où c est une constante donnée.

En substitant 2.24 et 2.26 dans l'équation 2.27, on obtient

$$\frac{u(qt,x)-u(t,x)}{t} = c^2\frac{u(t,q^2x)-u(t,qx)-qu(t,qx)+qu(t,x)}{(q-1)q}$$

Nous appliquons la méthode de séparation des variables pour l'équation de la chaleur, en posant

$$u(t,x) = f(t)\,g(x)\,,$$

$$u(qt,x) = f(qt)\,g(x)\,,$$

$$u(t,qx) = f(t)\,g(qx)\,,$$

$$u(t,q^2x) = f(t)\,g(q^2x)\,,$$

et substituons ces valeurs dans l'équation 2.26. En divisant chaque membre par le terme $f(t)\,g(x)$ et additionons les termes similaires. Puis, en fixant les deux membres égaux à une constante λ et sans perte de généralité, en posant$c = 1$, on obtient

$$\frac{(\beta-1)}{(q-1)} = \lambda. \tag{2.28}$$

En utilisant les relations

$$f(t) = \beta^{\log_q t},\quad f(qt) = \beta f(t),\ g(x) = \alpha^{\log_q x},\ g(qx) = \alpha g(x)\ \text{ et } g\left(q^2x\right) = \alpha^2 g(x)\,,$$

on obtient

$$x^2 u_{x,x} = c^2\left(\frac{g(q^2x)}{g(x)} - \frac{(1+q)\,g(qx)}{g(x)} + q\right) = \lambda q\,(q-1)\,. \tag{2.29}$$

Effectuons ces substitutions dans 2.28 et 2.29; on obtient les équations de type Euler et les équations caractéristiques correspondantes, i.e.

$$\beta = \lambda(q-1) + 1 \tag{2.30}$$

$$\alpha^2 - \alpha(1+q) + \left(q - \lambda\left(q^2 - q\right)\right) = 0 \tag{2.31}$$

De 2.30, nous obtenons la solution correspondante

$$f\left(t\right)=\left(\lambda\left(q-1\right)+1\right)^{\log_{q}t},$$

et de 2.31, les racines de α sont

$$\alpha_{1,2}=\frac{1+q\pm\sqrt{\left(1-q\right)\left(1-q-4\lambda q\right)}}{2}.$$

La forme explicite de la solution dépend du discriminant $\triangle=\left(1-q\right)\left(1-q-4\lambda q\right).$

Si $\triangle>0$, $\lambda<\frac{1-q}{4q}$ on obtient $g\left(x\right)=c_{1}\alpha_{1}^{\log_{q}x}+c_{2}\alpha_{2}^{\log_{q}x}$, ainsi, la solution est de la forme

$$u(t,x)=\left(\lambda\left(q-1\right)+1\right)^{\log_{q}t}\alpha^{\log_{q}x}.$$

Si $\triangle=0$, $\alpha=\frac{1-q}{4q}$, $0<q<1$, alors $g\left(x\right)=\left(\frac{1-q}{4q}\right)^{\log_{q}x}$ et la solution est

$$u(t,x)=f\left(t\right)g\left(x\right)=\left(\lambda\left(q-1\right)+1\right)^{\log t}\frac{1-q}{4q}^{\log_{q}x}\left(\frac{1-q}{4q}\right)^{\log_{q}x}.$$

Finalement, si $\triangle<0$, $\lambda>\frac{1-q}{4q}$, $0<q<1$, alors g est de la forme

$$g\left(x\right)=\left|\alpha\right|^{\log_{q}x}\left(c_{3}\cos\left(\theta\log_{q}x\right)+c_{4}\sin\left(\theta\log_{q}x\right)\right),$$

où $c_{3},c_{4}\in\mathbb{R}$ et $\theta=\arccos\left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\left|\alpha\right|}\right)$. Par cpnséquent, la solution est de la forme

$$u(t,x)=\left(\lambda\left(q-1\right)+1\right)^{\log_{q}t}\left(\left|\alpha\right|^{\log_{q}x}\left(c_{3}\cos\left(\theta\log_{q}x\right)+c_{4}\sin\left(\theta\log_{q}x\right)\right)\right).$$

2.4.2 Application de la transformation de (p,q)-Laplace aux équations (p,q)-différentelles

Dans ce paragraphe nous somme intéressés aux (p,q)-solutions de quelques équations différentielles en utilisant la transformation de (p,q)-Laplace (Définition 2.2.12) et son inverse (Définition 2.2.19), où $0<q<p\leq 1$.

1. Commençons d'abord par résoudre le problème du (p,q)-Couchy suivant

$$\begin{cases} D_{p,q}f(qt)+cqf(pqt)=0, \\ f(0)=1 \end{cases}, \text{ avec } c\in\mathbb{C}.$$

En appliquant la transformation de (p,q)-Laplace de premiére espéce et le théorème 2.2.18, on obtient

$$\frac{s}{pq^3}\mathcal{L}_{p,q}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(\frac{s}{pq}\right)-\frac{1}{q}f(0)+cq\mathcal{L}_{p,q}\left\{f(pqt)\right\}(s)=0.$$

Appliquons la condition initiale, on a

$$\frac{s}{pq^3}\mathcal{L}_{p,q}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(\frac{s}{pq}\right)-\frac{1}{q}+cq\mathcal{L}_{p,q}\left\{f(pqt)\right\}(s)=0.$$

Du théorème 2.2.14, on a

$$\frac{s}{pq^3}\mathcal{L}_{p,q}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(\frac{s}{pq}\right)-\frac{1}{q}+\frac{c}{p}\mathcal{L}_{p,q}\left\{f(t)\right\}\left(\frac{s}{pq}\right)=0.$$

D'où

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(\frac{s}{pq}\right)=\frac{pq^2}{s+cq^3},$$

par conséquent

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(s\right)=\frac{pq}{ps+cq^{2}}.$$

Ainsi, la formule de la transformation de (p, q)-Laplace inverse donne

$$f(t)=e_{p,q}\left(-cqt\right).$$

2. Considérons maintenant le problème du (p, q)-Cauchy

$$\begin{cases} D_{p,q}f(qt)-\lambda qf(pqt)=qe_{p,q}\left(\lambda q^{2}t\right), \\ f(0)=0 \end{cases}, \text{ avec } \lambda\in\mathbb{C}.$$

En appliquant la transformation de (p, q)-Laplace de premiére espéce et le théorème 2.2.18, on obtient

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{D_{p,q}f(qt)\right\}(s)-\lambda q\mathcal{L}_{p,q}\left\{f(pqt)\right\}(s)=\mathcal{L}_{p,q}\left\{qe_{p,q}\left(\lambda q^{2}t\right)\right\}.$$

Ce qui implique

$$\frac{s}{pq^{3}}\mathcal{L}_{p,q}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(\frac{s}{pq}\right)-\frac{1}{q}f(0)-\frac{\lambda}{p}q\mathcal{L}_{p,q}\left\{f(pqt)\right\}(s)=\mathcal{L}_{p,q}\left\{qe_{p,q}\left(\lambda q^{2}t\right)\right\}.$$

Appliquons la condition initiale, on a

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(\frac{s}{pq}\right)=\frac{p^{2}q^{5}}{\left(ps-\lambda q^{3}\right)\left(s-\lambda q^{3}\right)}.$$

En remplaçant s par pqs, on obtient

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(s\right)=\frac{p^{2}q^{3}}{\left(p^{2}s-\lambda q^{2}\right)\left(ps-\lambda q^{2}\right)}.$$

Par conséquent nous avons

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{f\left(t\right)\right\}\left(\frac{s}{pq}\right)=\frac{p^{2}q^{5}}{\left(ps-\lambda q^{3}\right)\left(p-\lambda q^{3}\right)}$$

donc

$$\mathcal{L}_{p,q}\left\{ f\left(t\right)\right\} \left(s\right)=\frac{p^{2}q^{3}}{\left(p^{2}s-\lambda q^{2}\right)\left(p-\lambda q^{2}\right)}$$

Par conséquent, en appliquant la formule de la transformation de (p,q)-Laplace inverse, la solution du ce probléme de (p,q)-Couchy est

$$f(t)=te_{p,q}\left(\lambda t\right).$$

2.5 Conclusion et Perspectives

Le but de ce mémoire a été d'éfuctuer une étude générale de la nouvelle notion du (p,q)-calcul fractionnaire, en particulier, la (p,q)-dérivation et la (p,q)-intégration au sens fractionnaire. Donc, nous espérons que ce travail donne une valeure utile pour d'autres projets de recherche dans le cadre de cette théorie.

En perspectives, nous allons introduire et étudier de novelles approches de la (p,q)-dérivation et la (p,q)-intégration au sens fractionnaire, ainsi que l'étude de solutions (p,q)-fractionnaires de quelques systèmes fractionnaires.

REFERENCES

[1] Akça H, Benbourenane J, Eleuch H. The q-Derivative and Differential Equation. Journal of Physics: Conference Series 2019 Nov; 1 (Vol.1411, No. 1, p. 012002). IOP Publishing.

[2] Arunrat N, Nakprasit KM, Nonlaopon K, Tariboon J, Ntouyas SK. On Fejér Type Inequalities via (p, q)-Calculus. Symmetry. 2021 Jun; $13(6) : 953$.

[3] Dumrongpokaphan T, Ntouyas SK, Sitthiwirattham T. Separate Fractional (p, q)-Integrodifference Equations via Nonlocal Fractional (p, q)-Integral Boundary Conditions. Symmetry. 2021 Nov; $13(11) : 2212$.

[4] Duran U, Acikgoz M, Araci S. On Generalized Some (p, q)-Special Polynomials. J. Math. Stat. $2018, 14, 129 - 140$.

[5] Kim YR, Ryoo CS. (p, q)-Lalace Transform. Journal of applied mathematics & informatics.2018;$36(5\_6), 505 - 19$.

[6] Li C, Yang D, Bai C. Some Opial Type Inequalities in (p, q)-Calculus. AIMS Mathematics. 2020 Jan $1; 5(6) : 5893 - 902$.

[7] Luangboon W, Nonlaopon K, Tariboon J, Ntouyas SK. Simpson-and Newton-Type Inequalities for Convex Functions via (p, q)-Calculus. Mathematics. 2021 Jan; $9(12), 1338$.

[8] Miller, K.S. and B. Ross: An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York 1993.

[9] Nishimoto, K. (Editor): Fractional Calculus and its Applications, Nihon University, Tokyo 1990.

[10] Neang P, Nonlaopon K, Tariboon J, Ntouyas SK. Fractional (p, q)-Calculus on Finite Intervals and Some Integral Inequalities. Symmetry. 2021 Mar; $13(3), 504$.

[11] Njionou Sadjang P. On Two (p, q)-Analogues of the Laplace Transform. Journal of Difference Equations and Applications. 2017 Sep; $2; 23(9), 1562 - 83$.

[12] Njionou Sadjang P. On the Fundamental Theorem of (p, q)-Calculus and Some (p, q)-Taylor Formulas. Results in Mathematics. 2018 Mar; $73(1) : 1 - 21$.

[13] Ross, B. Fractional Calculus and its Applications, Lecture Notes in Mathematics, 457, Springer Verlag, Berlin 1975.

[14] Rubin, B.: Fractional Integrals and Potentials, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 82, Addison Wesley Longman, Harlow 1996.

[15] Soontharanon J, Sitthiwirattham T. On fractional (p, q)-Calculus, Advances in Difference Equations. 2020 Dec; $2020(1) : 1 - 8$.

[16] Tariboon J, Ntouyas SK, Agarwal P. New Concepts of Fractional Quantum Calculus and Applications to Impulsive Fractional q-Difference Equations. Advances in Difference Equations. 2015, 1-19.

[17] Thongjob S, Nonlaopon K, Tariboon J, Ntouyas SK. Generalizations of Some Integral Inequalities Related to Hardy Type Integral Inequalities via (p, q)-Calculus. Journal of Inequalities and Applications. 2021 Dec; $2021(1) : 1 - 7$.

[18] Tunç M, Göv E. Some Integral Inequalities via (p, q)-Calculus on Finite Intervals. Filomat. $2021; 35(5), 1421 - 30$.

[19] Tunç M, Göv E. (p, q)-Integral Inequalities. RGMIA Res. Rep. Coll $2016, 19, 1 - 13$.

[20] Yu B, Luo CY, Du TS. On the Refinements of Some Important Inequalities via (p, q)-Calculus and Their Applications. Journal of Inequalities and Applications. 2021 Dec; $2021(1) : 1 - 26$.