République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Univérsité D'Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et d'Informatique

جامعة أحمد دراية.أدرار-الجزائر
Université Ahmed Draia.Adrar -Algérie

# MEMOIRE

présenté par

**ABDELLAOUI Fatima**

pour obtenir

**Le grade de Master**

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème

---

**Sur La Dérivée Fractionnaire Du Caputo et Application Sur Les équations Différentielles Fractionnaires**

---

| | | |
|---|---|---|
| Président : | Mr. DEFFA Ahmed | MA (A) à l'université d'ADRAR |
| Examinateurs : | Mr. BALIKI Abdessalam | Mc (A) à l'université d'ADRAR |
| Encadreur : | Mm. ROUMMANI Bahya | MC (B) à l'université d'ADRAR |
| Co-Encadreur : | Mr. BOUDAOUI Ahmed | MC (A) à l'université d'ADRAR |

2O20 - 2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République algérienne populaire et démocratique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

| | |
|---|---|
| UNIVERSITE AHMED DRAYA - ADRAR | جامعة احمد دراية - ادرار |
| BIBLIOTHÈQUE CENTRALE | المكتبة المركزية |
| Service de recherche bibliographique | مصلحة البحث البيبليوغرافي |
| N°......................B.C/S.R.B//U.A/2021 | الرقم...........م/م.ب.ب /ج.أ/2021 |

# شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذ(ة): بوداوي أحمد

المشرف مذكرة الماستر.

الموسومة بــ : Sur la Dérivée Fractionnaire Du Caputo et Application Sur les équations Différentielles Fractionnaires

من إنجاز الطالب(ة): عبد اللاوي فاطمة

و الطالب(ة): /

كلية : العلوم والتكنولوجيا

القسم : رياضيات وإعلام آلي

التخصص: تحليل دالي وتطبيقات

تاريخ تقييم / مناقشة: 2021 / 06 / 27

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقييم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.

وبإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والاليكترونية (PDF).

12 JUIL. 2021

ادرار في:..............................

امضاء المشرف:

- مساعد رئيس القسم:

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

مساعد رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي مكلف بما بعد التدرج والبحث العلمي بكلية العلوم والتكنولوجيا

ملاحظة :لاتقبل أي شهادة بدون التوقيع والمصادقة.

# Remerciements

Une fois arrivée la fin de ce travail je teins a remercier a tous ceux qui directe ou indirectement ont contribué a sa réalisation.

Je remercie mon regretté professeur, le noble professeur **Rommani Bahya**, pour avoir soulevé ce sujet intéressant et pour tous les efforts considérables qu'elle a déployés tout au long de la saison universitaire. Je la remercie pour le soutien matériel et moral. Merci, mon estimé professeur, pour tout ce que j'ai n'oublierai jamais. Peut-être que ces mots n'exprimeront pas tout ce que j'ai, mais j'ai eu l'honneur de travailler sur ma mémoire sera votre dernière réalisation.

Je remercier **Mr. Boudaoui Ahmed** d'avoir accepté de mener à bien le projet de mémoire avec moi. Merci pour le soutien qu'il m'a apporté et son suivi constant, merci pour m'avoir donné le privilége de travailler sous sa direction, pour sa présence constante et pour tout son aide, sans laquelle il n'aurait été possible d'accomplir ce projet.

J'exprime mes sincéres remerciements a **Mr. Deffa Ahmed**, pour m'avoir fait le grand honneur de présider ce jury de thése.

Je souhaite remercier **Mr. Baliki Abdessalam**, et c'est un grand honneur pour moi il est partie du jury.

Je remercie tout les prof de dipartement mathématique et informatique.

Enfin, je remercie a toutes les personnes qui ont conribué de prés ou de loin a la réalisation de ce modeste travail.

# Dédicace

Aux deux personnes qui ont encouragé ma réussite, soutenu mon échec et m'ont accompagné dans la construction de mes rêves. Aux deux personnes, mon père bien-aimé et mon cher professeur, que Dieu ait pitié d'eux. Baba, mon amour, ta fille qui a toujours aspiré à être les meilleures filles, aujourd'hui tu réussis, tu excelles, tu relèves la tête. Mon cher professeur, j'ai toujours rêvé que tu me superviserais, je rêvais de devenir comme toi, une femme forte et confiante. La joie n'est pas complète sans vous, que Dieu vous fasse miséricorde.

A' ma chère mère qui a tant travaillé avec moi, merci, ma mère, pour tout.

A' mes frères Ikram, Khaled et Manal, merci.

A' mon ami, mon amour, Abir Youssfi.

A' mon camarade de lycée, mon amour Ben Ismail Khadidja.

# Table des matières

# Introduction

En mathématiques, les inclusions différentielles sont une généralisation du concept d'équation différentielle ordinaire de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{0.1}$$

où $F$ est une application multivoque, c'est-à-dire que $F(t, x)$ est un ensemble plutôt qu'un seul point dans $\mathbb{R}^n$. Les inclusions différentielles surviennent dans de nombreuses situations, y compris les inégalités variationnelles différentielles, les systèmes dynamiques projetés, le processus de balayage de Moreau, les systèmes dynamiques de complémentarité linéaire et non linéaire, les équations différentielles ordinaires discontinues, les systèmes dynamiques de commutation et l'arithmétique des ensembles flous [29], [30].

L'objective principal de ce mémoire est l étude quelques résultats d'existences des soultios d'inclusions différentielles par la méthode de la cathégoré de Baire et ses applications dans les espaces de Banach de dimensions finies et infinies, ou $F$ n'est pas a valeur convexe [30], [24], [18].

Ce mémoire se compose de trois chapiters. Le premier chapitre sera consacré à des définitions et des notions générales dont on aura besoin dans les autres chapitres, le deuxiéme chapitre contient deux sections. Dans la premiére nous avons étudier les problèmes de Cauchy suivantes en dimension fini et infini

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{0.2}$$

où $E$ est un espace de Banach réflexif séparable, $F$ un multifonction continue définie sur un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R} \times E$ avec des valeurs dans l'espace des sous-ensembles bornés convexes fermés de $E$ avec un intérieur non vide
et

$$\begin{cases} \dot{x} \in extF(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (0.3)$$

où $extF(t,x)$ désigne l'ensemble des points extrêmes de $F(t,x)$. On remarque que, en général, l'ensemble $extF(t,x)$ n'est pas fermé et la fonction $(t,x) \to extF(t,x)$ n' est pas continue.

Par exemple Plis, l'ensemble des solutions $\mathcal{M}_{extF}$ de (2.1) est en général, non dense dans l'ensemble des solutions $\mathcal{M}_F$ de (2.2). Cependant, nous montrerons que $\mathcal{M}_{extF}$ n'est pas vide et se rapproche de certains sous-ensembles significatifs de $\mathcal{M}_F$. Plus spécifiquement, nous doit prouver que, pour toute sélection $f$ de F dans une classe admissible, qui comprend localement les sélections de $\alpha$ -Lipschitz, si l'on note $P_f$, l'ensemble des solutions de problème du Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (0.4)$$

alors nous avons que l'ensemble $\mathcal{M}_{extF}$ a une intersection non vide avec chaque quartier de $P_f$.

En dimension finie ce type de résultat d'approximation a été établi par Pianigiani [38], en utilisant la technique d'Antosiewicz et Cellina [1]. Pour des résultats antérieurs voir Filippov [24] et Wazcwski [43].

L'approche utilisée ici est une variante de la méthode des catégories de Baire introduit dans [15], [16], [17] afin de prouver l'existence de solutions pour inclusions différentielles en absence de convexité, dans les espaces de Banach. Nous mentionnons que récemment, cette méthode a été améliorée par Bressan et Colombo [6], qui ont obtenu un théorème d'existence contenant a la fois le théorème d'existence de [17] et théorème de Filippov [25]. dans le deuxiéme Nous avons etudier les même problèmes de la section précédente avec $F$ est compact, on montre que l'ensemble $\mathcal{M}_{extF}$ des solutions du problème (2.1) n'est pas

vide. Notons d'ailleurs que, comme $extF(t,x)$ n'est pas forcément fermé,
le théorème d'existence mentionné ci-dessus est nouveau également en dimension finie, Théoréme de Filippov. En fait, l'existence de solutions au problème découle aussitôt d'un résultat de densité qui est d'un intérêt indépendant (voir Théoréme 2.3 ). Ces théorèmes de densité se révèlent utiles. En effet, en les utilisant, il est possible de montrer que sous une condition d'invariance sur le flux, l'inclusion différentielle (2.1) admet une solution périodique qui réglé une question retour a Cellina [7].

Dans le trois-iéme chapitre, ona deux sections la premiére conserne la condition que $F$ est Caratheodory, le deuxiéme prouve quelques extensions et applications [37].

**Les Mots clés :** inclusion différentielle, espace de Baire, les ponts extrêmes, la fonction de choquet.

**ملخص**

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود حلول الاحتواء التفاضلي في ابعاد منتهية وغير منتهية بشروط مختلفة على متعدد الوظائف وتطبيق هذه النتائج على بعض المشاكل .

**الكلمات المفتاحية** الاحتواء التفاضلي , فضاء بير , النقاط المتطرفة , دالة شوكي .

**Résume**

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence des solutions d'inclusions différentielles en dimension finie et infinie avec différentes conditions sur un multifonction F et applique ces résultats sur quelques problèmes.

**Les mots clés :** inclusion différentielle, espace de Baire, les points extrêmes, la fonction de choquet.

**Abstracts**

The objective of this thesis is to study the existence of the solutions of différential inclusions in finite and infinite dimension with different conditions on a multifunction F and apply these results on some problems.

**Key words :** differential inclusion, Baire space, extreme points, the choquet function.

## 0.1 Notations mathématique

$extF(t,x)$ l'ensemble des points extrêmes de $F(t,x)$.
$\mathcal{M}_F$ l'ensemble des soulutions de

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{0.5}$$

$\mathcal{M}_{extF}$ l'ensemble des soulutions de

$$\begin{cases} \dot{x} \in extF(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{0.6}$$

$P_f$ l'ensemble des soulutions de

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{0.7}$$

$B(x_0, r)$ la boule ouvert de center $x_0$ et de rayon $r$.
$\tilde{B}(x_0, r)$ la boule fermé de center $x_0$ et de rayon $r$.
$S(x_0, r)$ la sphére de center $x_0$ et de rayon $r$.
$G_\delta$ est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts.
$\mathcal{P}(Y) = \{A \subset Y,\ A \neq \emptyset\}$.
$\mathcal{H}(Y) = \{A \subset \mathcal{P}(Y),\, A \text{ est fermé }\}$.
$\mathcal{H}^c(Y) = \{A \subset \mathcal{P}(Y),\ A \text{ est fermé, convexe }\}$. $\partial F(t,x)$ désigne la frontiére de $lF(t,x)$.
$coF$ l'envlope convexe de $F$.
$\mathcal{M}_F$ l'ensemble de toutes les mesures de Radon sur $K$.
$E(f)$ désigne l'epigraphe de $f$.
$\mathcal{A}$ désigne l'ensemble de toutes les fonctions continues affines.

Chapitre 1

# Préliminaire

## 1.1 Quelques notions topologiques

**Définition 1.1.** (**Espace topologique**[37])
Une topologie sur un ensemble $X$ est la donnée d'un ensemble $\tau$ de parties de $X$, i.e. $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\emptyset$, $X \in \tau$ ;

(ii) Si $U, V \in \tau$, alors $U \cap V \in \tau$ ;

(iii) Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de $X$ appartenant à $\tau$, alors $\underset{i\in I}{\cup} U_i \in \tau$.
L'ensemble $X$, muni de la topologie $\tau$, est appelé espace topologique. On notera quelque fois $(X, \tau)$ un tel espace.

**Définition 1.2.** (**Espaces métriques**[37])
Une distance (ou métrique) sur un ensemble $X$ est une application :

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

possédant, pour tous $x, y, z \in X$, les propriétés suivantes :

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ ;

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

L'ensemble $X$ muni de la distance $d$ est appelé espace métrique, on notera quelque fois $(X,d)$. Le nombre réel positif $d(x,y)$ est appelé la distance entre $x$ et $y$ dans $X$.

**Définition 1.3.** [37] Soient $(X,d)$ un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.

(1) On appelle boule ouverte de centre $x_0$ et de rayon $r$ l'ensemble :

$$B(x_0,r) = \{x \in X; d(x,x_0) < r\};$$

(2) On appelle boule fermée de centre $x_0$ et de rayon $r$ l'ensemble :

$$\tilde{B}(x_0,r) = \{x \in X; d(x_0,x) \leq r\};$$

:

$$B(x_0,r) = \{x \in X; d(x,x_0) < r\};$$

(3) On appelle la Sphére de centre $x_0$ et de rayon $r$ l'ensemble :

$$\tilde{S}(x_0,r) = \{x \in X; d(x_0,x) = r\};$$

(4) Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $(X,d)$ converge vers un élément $x_0$ de $X$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on ait $d(x_n,x_0) < \varepsilon$ ;

(5) Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $(X,d)$ est dite suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n,m \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, on ait $d(x_m,x_n) < \varepsilon$.

**Définition 1.4.** (**$G_\delta$ ensemble**[25] )
Un ensemble $G_\delta$ (lire "G delta") est une intersection dénombrable d'ensembles ouverts.

**Proposistion 1.1.** [25]

(1) L'intersection dénombrable d'ensembles $G_\delta$ est un ensemble $G_\delta$.

(2) l'union finie d'ensembles $G_\delta$ est un ensemble $G_\delta$.

**Définition 1.5.** (**Espace métrique complet**[37] )
Soients $(X,d)$ un espace métrique.

(1) On dit que $(X, d)$ est complet si toute suite de Cauchy dans $(X, d)$ est convergente.

(2) Un sous-ensemble $A$ de $(X, d)$ est dit complet si $A$ muni de la distance induite est un espace métrique complet.

**Définition 1.6.** (**Espace vectoriels normés**[7])
Soit $X$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$=($\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$). On appelle norme sur l'espace vectoriel $X$ toute fonction, notée $x \longrightarrow \|x\|$ , possédant les propriétés suivantes :

(1) Posivité : $\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0$, pour $x \neq 0, \|0\| = 0$ ;

(2) Transformation par les homothéties : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ ;

(3) Inégalité de convexité : $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
Un espace X muni d'une telle norme, est appelé espace vectoriel normé.

**Définition 1.7.** (**Espace de Banach**)[9]
Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans X est convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme).

**Lemme 1.1.** ***(Lemme de Mazur, 1905-1981)****[26].*
*Soit $E$ un espace de Banach. Si $(x_n)$ converge faiblement vers $x$ dans $E$, alors pour tout $n$ il existe $y_n$, combinaison convexe des $(x_n)$, tel que la suite $(y_n)$ converge fortement vers $x$.*

## 1.2 Espace réflixif et Séparable

Soit $X$ un espace de Banach, $X'$ son dual muni de la norme duale et soit $X''$ son bidual, c'est-à-dire le dual de $X'$, muni de la norme $\|\psi\| = \sup\limits_{f \in X', \|f\| \leq 1} |\langle \psi, f \rangle|$
On considère l'injection canonique $J$ de $X$ dans $X''$ par :

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X'' \\ x &\longrightarrow J(x) = J_x \end{aligned}$$

où $J_x$ définie par :

$$J_x : X' \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longrightarrow J_x(f)$$

L'application $J$ est une isométrie injective de $X$ dans $X''$.

**Définition 1.8.** [7]
On dit que $X$ est réflexif si l'isométrie canonique $J$ est surjective de $X$ sur $X''$. Ceci signifie que pour toute application linéaire continue $\psi : X' \to \mathbb{R}$, il existe $x \in X$ tel que $\psi = J_x$, c'est-à-dire $\forall f \in X'$, $\langle \psi, f \rangle = J_x(f)$.

**Définition 1.9.** [7]
On dit qu'un espace métrique $X$ est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense.

**Définition 1.10.** (**Topologie faible**)[7] Soit $X$ un espace de Banach et soit $f \in X'$, on désigne par :

$$\varphi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'application définie par :

$$\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle .$$

Lorsque $f$ décrit $X'$ on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in X'}$ d'applications de $X$ dans $\mathbb{R}$.
La topologie faible $\sigma(X, X')$ sur $X$ est la topologie la moins fine sur $X$ rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in X'}$.

**Définition 1.11.** (**métrique de hausdorff**)[21]
Soit $(X, d)$ un espace métrique et $A$, $B$ deux sous-ensembles de $X$.
i) Pour tout $a \in X$ et $C \in \mathcal{P}(X)$ on définit la distance entre $a$ et $C$ par :

$$d(a, C) = \inf\{d(a, b) : b \in C\}, d(a, \emptyset) = +\infty.$$

ii) On définit la distance entre $A$ et $B$ par :

$$H_d^*(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}.$$

iii) On considére la distance pseudo-métrique de Hausdorff

$$H_d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

définie par :

$$H_d(A,B) = \max(H_d^*(A,B), H_d^*(B,A)).$$

Donc $(\mathcal{P}_{b,f}(\mathbb{R}^n), H_d)$ est un espace métrique et $(\mathcal{P}_f(\mathbb{R}^n), H_d)$ est un espace métrique généralisé.

D'aprés cette définition, on peux facilement vérifier les propriétés suivantes :

$-H_d(A,A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$,

$-H_d(A,B) = H_d(B,A)$, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(X)$,

$-H_d(A,B) \leq H_d(A,C) + H_d(C,B)$, pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.

**Lemme 1.2.** *(**Caractérisation de la métrique de Hausdorff**)[21]*
*Soit $(X,d)$ un espace métrique et $A$, $B$ deux parties de $X$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, considérons les ensembles :*

$$A_\varepsilon = \{a \in X : d(a,A) < \varepsilon\} \text{ et } B_\varepsilon = \{b \in X : d(b,B) < \varepsilon\}$$

*alors*

$$H_d^*(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\}, H_d^*(B,A) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\}$$

*et*

$$H_d(B,A) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon, A \subset B_\varepsilon\}.$$

## 1.3 Quelques définitions d'analyse multivoque

Soit $Y$ un espace vectoriel topologique de Hausdorff. Nous désignons par
$\mathcal{P}(Y) = \{A \subset Y,\ A \neq \emptyset\}$.
$\mathcal{H}(Y) = \{A \subset \mathcal{P}(Y),\ A \text{ est fermé }\}$.
$\mathcal{H}^c(Y) = \{A \subset \mathcal{P}(Y),\ A \text{ est fermé, convexe }\}$.

Soit X un espace topologique de Hausdorff et soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$

**Définition 1.12.** [21] Une **multi-fonction** (ou **application multivoque**) (ou **multi-application**)
$F$ d'un espace $X$ vers un espace $Y$ est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de $Y$. On notera $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ (les notations $F : X \longrightarrow 2^Y$ et $F : X \multimap Y$ sont aussi utilisées dans la littérature).

**Exemple 1.1.** [21] 1) $F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une multifonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \{1\} \ , \ x > 0 \\ \{-1, 1\} \ , \ x = 0 \\ \{1\} \ , \ x < 0 \end{cases}$$

2) $F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une multifonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \{x+1\} \ , \ x > 0 \\ [-1, 1] \ , \ x = 0 \\ \{x-1\} \ , \ x < 0 \end{cases}$$

**Définition 1.13.** [21] On appelle graphe de la multi-fonction $F$, l'ensemble

$$Graph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

$F$ est à graphe fermé si Graph$(F)$ est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est fermée.

**Définition 1.14.** [21] On appelle image de $F$ l'union des images $F(x)$

$$Im(F) = \underset{x \in X}{\cup} F(x)$$

et le domaine de $F$ l'ensemble

$$DomF = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

**Définition 1.15.** [22] On dit que $F$ est semi-continu supérieurement (s.c.s) en $x_0 \in X$ si pour tout voisinage $N$ de $F(x_0)$, il existe un voisinage $M$ de $x_0$ tel que $F(M) \subset N$.

**Définition 1.16.** [22] On dit que $F$ est semi-continu inférieurement (s.c.i) en $x_0 \in X$ si pour tout $y_0 \in F(x_0)$ et tout voisinage $U$ de $y_0$ il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que : $F(x) \bigcap U \neq \emptyset$, pour tout $x \in V$.

**Définition 1.17.** [22] Une fonction $F$ est dite continue en $x_0$ si elle est a la fois (s.c.s) et (s.c.i) en $x_0$. $F$ est continue(s.c.s) ou (s.c.i) dans un ensemble $A \subset X$ s'il en est ainsi en tout point de $A$.

**Proposistion 1.2.** [22] Soit $F : X \to \mathcal{H}(Y)$ (s.c.s) Alors le graphe de $F$ est fermé en $X \times Y$.

**Preuve** Soit $(x_n,\, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Graph(F)$ une suite convergeant vers $(x_0,\, y_0) \in X \times Y$. Soit $U$ un voisinage de $F(x_0)$. Comme $F$ est (s.c.s) il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $x_n \subset X$, $\forall n > n_0$, sa suite que $y_n \in F(x_n) \subset U$ $\forall n > n_0$. Alors $y_0 \in U$. Puisque $F(x_0) \subset U$ est arbitraire et $F(x_0)$ est fermée, on a $y_0 \in F(x_0)$. $\square$

Pour un ensemble non vide $A \subset X$, $X$ un espace métrique et $\delta > 0$, on définit $B(A,\, \delta) = \{x \in X : d(x,\, A) < \delta\}$ et $\tilde{B}(A,\, \delta) = \{x \in X : d(x,\, A) \leq \delta\}$ ou $d(x,\, A) = inf\{d(x,\, y) : y \in A\}$. Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques et soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$.

**Définition 1.18.** [22] On dit que $F$ est (s.c.s) en $x_0$ au sens $\varepsilon - \delta$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $F(x) \subset B(F(x_0), \varepsilon)$ pour tout $x \in B(x_0,\delta)$.

**Définition 1.19.** [22] On dit que $F$ est (s.c.i) en $x_0$ au sens $\varepsilon - \delta$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $F(x_0) \subset B(F(x), \varepsilon)$ pour tout $x \in B(x_0, \delta)$.

**Remarque 1.1.** Si $F$ est(s.c.s) en $x_0$, alors est aussi (s.c.s) au sens $\varepsilon - \delta$ et si $F$ est (s.c.i) en $x_0$ au sens $\varepsilon - \delta$ alors est aussi (s.c.i) au sens habituel.

**Définition 1.20.** [22] On dit que $F$ est continue au sens de Hausdorff en $x_0$ si elle est a la fois(s.c.s) et (s.c.i) au sens $\varepsilon$.
De manière équivalente, $F$ est Hausdorff continue en $x_0$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0,\, \delta)$ nous avons $D(F(x),\, F(x_0)) < \varepsilon$, ou $D$ représente la distance.

**Proposistion 1.3.** [22] Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ a valeur compacte. Alors $F$ est (s.c.s) (resp (s.c.i)) si et seulement si $F$ est (s.c.s). (resp (s.c.i)) au sens $\varepsilon - \delta$.

**Preuve** Soit $F$ (s.c.s) au sens $\varepsilon - \delta$. Pour montrer que $F$ est (s.c.s). il suffit de observer que, comme $F(x_0)$ est compact, pour tout $U$ ouvert qui contient $F(x_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(F(x_0),\varepsilon) \subset U$. Soit $F$ (s.c.i) en $x_0$. En correspondance de $\varepsilon > 0$ et $B(y,\varepsilon/2)$, $y \in F(x_0)$, il existe un voisinage $V_y$ de $x_0$ tel que $F(x) \bigcap B(y, \varepsilon/2) \neq \emptyset$ pour tout $x \in V_y$.

Comme $y$ est compris dans $F(x_0)$, les ensembles $B(y, \varepsilon/2)$ recouvrent $F(x_0)$, un ensemble compact.
ensuite, $\{B(y_i, \varepsilon/2)\}_{i=1}^n$ est un revêtement de $F(x_0)$, pour certains $n \in \mathbb{N}$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subset V_{y_i}$, $i = 1, .. , n$. Soit $x \in B(x_0, \delta)$ et soit $y \in F(x_0)$ arbitraire. Clairement $y \in B(y_j, \varepsilon/2)$, pour certains $1 < j < n$, Comme $x \in V_{y_j}$, Il s'ensuite que $F(x) \bigcap B(y_j, \varepsilon/2) \neq \emptyset$ ce qui implique $y \in B(F(x), \varepsilon)$. Comme $x \in B(x_0, \delta)$ et $y \in F(x_0)$ arbitraire il suit $F(x_0) \subset B(F(x), \varepsilon)$. $\square$

**Définition 1.21.** [21] Une application multivoque $F$ est dite convexe (resp, fermée, compact, borné) si $F(x)$ est convexe (resp, fermée, compact, borné) pour tout $x \in X$.

**Définition 1.22.** [21] Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ une application multivoque. On dit que $F$ est totalement bornée si $F(A) = \underset{x\in A}{\cup} F(x)$ est borné dans $X$ pour tout ensemble $A \subset X$, c.à.d.

$$\sup_{x\in A}\{\sup\{\|y\| : y \in F(x)\}\} < \infty.$$

**Définition 1.23.** [21] Soit $X$ un ensemble. On considère $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de $X$. On dit que $\mathcal{M}$ est une tribu sur $X$ si :

$$\begin{aligned} &(a) \quad A \in \mathcal{M} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{M}; \\ &(b) \quad (A_n \in \mathcal{M})_{n\in\mathbb{N}} \Longrightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}; \\ &(c) \quad X \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Le couple $(X,\mathcal{M})$ est appelée espace mesurable. Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés ensembles mesurables.
une application $\mu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}^+} = [0, +\infty]$.
on dit que $\mu$ est une mesure positive si elle vérifié les conditions suivantes :

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles mesurable ($\forall n \in \mathbb{N}$, $(A_n) \in \mathcal{M}$) dont les ensembles deux à deux disjoint $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$.

**Définition 1.24.** [21] Soit $I \subset \mathbb{R}$ Lebesgue mesurable avec $\mu(I) < \infty$ et soit $Y$ un espace topologique. Une multifonction $G : I \to \mathcal{P}(Y)$ est dit mesurable (faiblement mesurable) si pour tout $U \subset Y$ fermé (ouvert) l'ensemble $G^{-}(U) = \{t \in I,\, G(t) \bigcap U \neq \emptyset\}$ est mesurable. On dit que $G$ est Lusin mesurable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $I_\varepsilon \subset I$, avec $\mu(I \backslash I_\varepsilon) < \varepsilon$, tel que la restriction de $G$ a $I_\varepsilon$ soit continue.

**Remarque 1.2.** [22] Si $Y$ est un espace séparable métrisable, alors la mesurabilité, la mesurabilité faible et la mesurabilité au sens Lusin équivalent a l'arc.

**Définition 1.25.** **(Sélection)**[21]

Soient $X$ et $Y$ deux ensembles. Une multifonction $F : X \to Y$ est une application de $X$ dans $\mathcal{P}(Y)$ l'ensemble des parties de $Y$.

on dit que $f : X \to Y$ est une sélection de $F$ si $f(x) \in F(x)$, $\forall x \in X$.

## 1.4 Théoréme de Michael

**Théorème 1.1.** *(**Michael**)[22] Soient $X$ un espace métrique, $Y$ un espace de Banach, et soit $F : X \to \mathcal{H}^c(Y)$ une multifonction (s.c.i) alors il existe une fonction continue $f : X \to Y$ qui est une sélection de $F$.*

**Preuve Étape 1 :**(construction d'une $\varepsilon$ -sélection continue).

Fixez $\varepsilon > 0$ et pour chaque $x \in X$ choisissez $y_x \in F(x)$. Puisque $F$ est (s.c.i) il existe $\delta_x > 0$ tel que $z \in B_x = B(x, \delta_x)$ implique que $y_x \in B(F(z), \varepsilon)$. Comme x gammes sur $X$ la famille $\mathcal{U} = \{B_x\}_{x \in X}$ est une couverture ouverte de $X$. Soit $\mathcal{V} = \{C_x\}_{x \in X}$, $C_x \subset B_x$, soit un recouvrement de $X$, qui est aussi un ouvert localement fini raffinement de $\mathcal{U}$. Soit $p_{x x \in X}$ une partition d'unité subordonné a $\mathcal{V}$. Définir $f_\varepsilon : X \to Y$ par $f_\varepsilon(z) = \sum_{x \in X} p_x(z) y_x$. Clairement, $f_\varepsilon$ est continue, nous affirmons que $d(f_\varepsilon(z), F(z)) < \varepsilon$, $z \in X$. En effet, soit $z \in X$, alors il existe un voisinage $U$ de $z$ ne se croisant un nombre fini de $C_x$, disons $C_{x_1}$, $C_{x_2}$, ...., $C_{x_n}$. Cela implique que pour tous les $u \in U$ que nous avons $p_x(u) = 0$ si $x \neq x_i$, $i = 1$, ..., $n$. Par conséquent $f_\varepsilon(z) = \sum_{i=1}^{n} p_{x_i}(z) y_{x_i}$. Si $P_{x_i}(z) \neq 0$ alors $z \in C_{x_i} \subset B_{x_i}$. ce qui implique $y_{x_i} \in B(F(z), \varepsilon)$. Puisque $F(z)$ est convexe, $f_\varepsilon(z) \in B(F(z), \varepsilon)$ et la revendication est prouve.

**Étape 2 :** (construction d'une sélection continue).
Nous affirmons qu'il existe une suite de fonctions continues $f_n : X \to Y$ telles que pour tout $z \in X$, on a :

(i) $f_n(z) \in B(F(z),\, 2^{-n})$.

(ii) $\|f_n(z) - f_{n-1}(z)\| < 2^{-n+2}$.

Supposons (i) et (ii) vrais jus-qu'a $(n-1)$ et considérons la fonction
$G(z) = F(z) \bigcap B(f_{n-1}(z),\, 2^{-n+2})$, $z \in X$. Clairement $G$ est (s.c.i), et a valeur convexe. Ensemble $\varepsilon = 2^{-n}$, et comme a l'étape 1, construisons $f_n$ une $\varepsilon$ -sélection de $G$. Cela implique que $f_n(z) \in B(F(z) \bigcap B(f_{n-1}(z)\ ,\ 2^{-n+2}))\ ,\ 2^{-n})$.
Par conséquent, pour chaque $z \in X$, nous avons :

$$f_n(z) \in B(F(z)\ ,\ 2^{-n})$$

$$\|f_n(z) - f_{n-1}(z)\| < 2^{-n} + 2^{-n+1} < 2^{-n+2}$$

et ainsi la réclamation est prouvée. Comme $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy des fonctions continues, il converge uniformément a une fonction continue $f$. Puisque $F$ est une valeur fermée, $f$ est une sélection de $F$. □

**Remarque 1.3.** Plus généralement, nous avons ce qui suit. Soit $F : X \to \mathcal{H}^c(Y)(s.c.i)$ et soit $C \subset X$ fermé. Supposons que $f : C \to Y$ est une sélection continue de $F$ sur $C$. Il existe alors une extension continue de $f$ au $X$ entier, qui est encore une sélection de $F$. Si $F : X \to \mathcal{H}^c(Y)$ est uniquement(s.c.s) alors les sélections continues n'ont existes pas. Cependant, nous avons le résultat d'approximation suivant au sens du graphe.

## 1.5 Théoréme de sélection de Cellina

**Théorème 1.2.** *[22](**sélection de Cellina** ) Soit $X$ un espace métrique, $Y$ un espace de Banach, et soit $F : X \to \mathcal{H}^c(Y)$ soit (s.c.s). Alors pour tout $\varepsilon$ positif, il existe une fonction $f_\varepsilon : X \to Y$ continue tel que le graphe $f_\varepsilon \subset B(GraphF, \varepsilon)$.*

**Preuve** Soient $x \in X$ et $y_x \in F(x)$. Soit $0 < \delta_x < 2\varepsilon$ tel que $F(B(x, \delta_x)) \subset B(F(x), \varepsilon/2)$. Soit $\{U_x\}_{x \in X}$, $U_x \subset B(x, \delta_x/4)$, un revêtement de $X$, qui est aussi un raffinement ouvert localement fini de $\{B(x,\ \delta_x/4)\}_{x\in X}$. Soit $\{p_x\}_{x\in X}$ une partition d'unité subordonnée a $\{U_x\}_{x\in X}$ et définie $f_\varepsilon : X \to Y$ par :

$$f_\varepsilon(z) = \sum_{x\in X} p_x(z)y_x.$$

Clairement, $f_\varepsilon$ est continue. Soit $z \in X$. Il existe un voisinage $V$ de $z$ qui intersecte seulement un nombre fini de $U_x$, disons $U_{x_1}$, ..., $U_{x_n}$ Par conséquent

$$f_\varepsilon(z) = \sum_{i=1}^{n} p_{x_i}(z)y_{x_i}.$$

Soit $j$ tel que $\delta_{x_j} = \max\{\delta_{x_i} : i = 1, \ldots, n\}$. Nous avons

$$d(x_i,\ x_j) \le d(x_i,\ z) + d(z,\ x_j) < \delta_{x_j}/4 + \delta_{x_j}/4 < 2\delta_{x_j}/4 = \delta_{x_j}/2.$$

ensuite $y_{x_i} \in F(x_i) \subset F(B(x_j,\ \delta_{x_j}/2) \subset B(F(x_j), \varepsilon/2)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Il s'ensuite que $f\varepsilon(z) \subset B(F(x_j), \varepsilon/2)$, ce qui implique l'existence de $v_j \in F(x_j)$ tel que $\|f_\varepsilon(z) - v_j\| < \varepsilon/2$. On obtient

$$d((z, f_\varepsilon(z)),(x_j, V_j)) < d(z, x_j) + \|f_\varepsilon(z) - V_j\| < \delta x_j/4 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Comme $z \in X$ est arbitraire, nous avons $Graph f_\varepsilon \subset B(Graph F, \varepsilon)$. $\square$

**Remarque 1.4.** Si les valeurs de $F$ ne sont pas convexes, il n'est pas nécessaire que les sélections continues existent comme le montrent les exemples suivants :

**Exemple 1.2.** (**Filippov**) [22] :

$$F(t) = \begin{cases} (\cos\theta, \sin\theta) : \ \frac{1}{t} \le \theta \le \frac{1}{t} + 2\pi - t & \text{si } \ t \in ]0,\ 1] \\ (\cos\theta,\ \sin\theta) \ : \ \theta \in [0,\ 2\pi] & \text{si } \ t = 0 \end{cases}$$

$F$ est clairement Hausdorff continue mais n' a pas de sélection continue.

**Exemple 1.3.** [22] Soit $B$ la boule unitaire fermée de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : B \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ défini par :

$$F(x,y) = \begin{cases} (cos\omega,\ sin\omega) \ : \ \pi + \theta - \pi(1-\rho) < \omega < \pi + \theta + \pi(1-\rho) & si\ \rho \ne 0 \\ (cos\omega,\ sin\omega) \ : \ \omega \in [0,\ 2\pi] & si\ \rho = 0 \end{cases}$$

où $\rho$, $\theta$ sont les coordonnées polaires du point $(x, y)$.
La fonction $F$ est clairement continue au sens de Hausdorff. Pour voir que $F$ n'a pas des sélections continues, il suffit d'observer qu'une sélection continue de $F$ être une rétraction continue de la boule $B$ dans la sphère $S$. De plus, $F$ n'a pas des points fixes, car $F$ envoie les points de $B$ sur des sous-ensembles de $S$ et $F$ limité à $S$ est le carte antipodale.

## 1.6 Sélections et théorème de Filippov

Dans ce qui suit $E$ est un espace de Banach réel, $I = [t_0, T]$ et $F : I \times B(x_0,r) \to \mathcal{H}(E)$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

**Définition 1.26.** (**Sélection continue (mesurable)**)[21] Une sélection $f : X \longrightarrow Y$ d'une application multivoque $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite sélection continue(mesurable), si f est continue(mesurable).

**Définition 1.27.** [22] une solution de probléme (1.1), est une fonction $x : J \to E$, $J \subset I$ un intervalle non dégénéré contenant $t_0$, satisfaisant $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$, $t \in J$ p.p.

On dit que $F : I \times \tilde{B}(x_0, r) \to \mathcal{H}(E)$ satisfait l'hypothèse (1.2) si :

$$\begin{cases} F \ est \ Hausdorff \ continue \\ \|F\| < M \ i.e. \ \forall (t, x) \in I \times B(x_0, r) \ et \ v \in F(t, x) \ ona \ \|v\| < M. \\ 0 < T - t_0 < r/M. \end{cases} \tag{1.2}$$

## 1.7 Théorème de Peano

**Théorème 1.3.** *(**Peano**)[36]*
*Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors, si $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème suivant admet au moins une*

*solution $y$ de classe $C^1$ définie sur un certain intervalle dans $I$ de la forme $[t_0 - T,\, t_0 + T]$ avec $T > 0$.*

$$\begin{cases} y' = f(t,x) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F$ est une multifonction à valeur convexe satisfaisant (1.2), alors Le théorème de Michael et le théorème de Peano garantissent l'existence de solutions pour (0.2). Si $E$ est de dimension infini alors, d'après le théorème de Godunov, l'existence de les solutions pour (0.2) peuvent échouer même si $F$ est a valeur unique. Dans tous les cas, nous avons le Suivant.

**Proposition 1.4.** [22] Soit $F$ vérifie l'hypothèse (1.2). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\varepsilon$ poligonal - solution approchée de (0.2), c'est-a-dire une fonction linéaire par morceaux $x : I \to E$, avec $x(t_0) = x_0$, tel que $d(\dot{x}(t),\, F(t,\, x(t))) < \varepsilon$, p.p. $t \in I$

**Preuve** Fixez $\varepsilon > 0$. Sélectionnez $v_0 \in F(t_0,\, x_0)$ et définissez $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$, $t \in [t_0,\, t_1]$ ou $t_1 = \inf\{t > t_0 :\ d(x(t), F(t, x(t))) = \varepsilon\}$. Sélectionnez $v_1 \in F(t_1, x(t_1))$ et soit $x(t) = x(t_1) + (t - t_1)v_1, t \in [t_1,t_2]$ ou $t_2 = \inf\{t > t_1 :\ d(x(t), F(t,x(t))) = \varepsilon\}$. Nous affirmons qu'en procédant de cette maniéré, en un nombre fini d'étapes, $x$ peut être défini dans l'ensemble $I$. Supposons que pour tout $n$, $t_n < T$ et que $t^* = \sup t_n$. Comme $F$ est continue en $(t^*,\, x(t^*))$ il existe $\delta > 0$ tel que : $|t - t^*| < \delta$ et $\|y - x(t^*)\| < \delta$ implique $d(F(t, y),\, F(t^*,\, x(t^*)) < \varepsilon/4$. Soit $n_0$ tel que pour $n > n_0$ les points $(t_n,x(t_n))$ satisfont $|t_n - t^*| < \delta$ et $\|x(t_n) - x(t^*)\| < \delta$. Il s'ensuite que $d(F(t_n,\, x(t_n)),\, F(t^*,\, x(t^*))) < \delta/4$ et $v_n \in F(t_n,\, x(t_n)) \subset B(F(t^*,\, x(t^*)),\, \varepsilon/4)$ pour $n > n_0$. Donc, pour tout $t > t_{n_0}$ on a $d(v_n,\, F(t,\, x(t))) < d(v_n,\, F(t^*\ ,\, x(t^*))) + d(F(t,\, x(t)),\, F(t^*,\, x(t*))) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4$ est une contradiction. $\square$

Pour les équations différentielles sous hypothèses de continuité, la convergence uniforme des solutions approchées $x_n$ implique la convergence p.p. de la suite des dérivées $\dot{x}_n$. Plus précisément, soit $\|\dot{x}_n(t) - f(t\ ,\ x_n(t))\| < \varepsilon_n$ p.p. et $x_n \to x$. ensuite $\|\dot{x}_n(t) - f(t\ ,\, x(t))\| < \varepsilon_n + \|f(t, x_n(t)) - f(t\ ,\, x(t)\|$ p.p. Comme $f$ est continue, le couté droit passe a zéro, et donc $\dot{x}_n(t)$ converge p.p vers $f(t, x(t)) = \dot{x}(t)$. Pour les équations différentielles a valeurs multiples, la convergence uniforme de la suite des solutions approchées n'implique

pas la convergence de la suite des dérivés. C'est une difficulté majeure dans les problèmes a plusieurs valeurs.
Prenons l'exemple suivant

$$\begin{cases} \dot{x} \in \{-1,1\} \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Ici on peut construire facilement une suite des solutions $x_n$ convergeant uniformément vers $x(t) = 0$ avec $|\dot{x}_n(t)| = 1$ p.p. il est clair que $\{\dot{x}_n\}$ ne converge pas vers $\dot{x}$ p.p ; de plus $x$ n'est pas une solution. En particulier, l'ensemble de solutions n'est pas fermé.
Cependant, si $F$ est fermé a valeur convexe, alors l'ensemble de solutions de (0.2) est fermé dans l'espace de Banach $C(I,\, E)$ des fonctions continues avec la norme de convergence uniforme.

**Proposition 1.5.** [22] Soit $E$ un espace de Banach réflexif et soit $F$ satisfait (1.2). Si $F$ a valeurs convexes alors l'ensemble de solutions de (0.2) est fermé (possible vide) en $C(I,\, E)$.

**Preuve** Soit $\{x_n\} \subset C(I,E)$une suite de solutions de 0.2 et supposons que $x_n \to x$. Par hypothèse $\|\dot{x}_n(t)\| < M$, donc $\{\dot{x}_n\}$ est une suite bornée dans $L^2(I,E)$. Comme $L^2(I,E)$ est réflexif, une sous-suite $\{\dot{x}_{n_k}\} = \{y_k\}$ converge faiblement vers un élément $\omega \in L^2(I,E)$. Par le théorème de Mazur une suite de combinaisons convexes converge fortement vers $\omega$ dans $L^2(I,E)$ donc aussi dans $L^1(I,E)$, soit $\sum_{k=0}^{rn} \lambda_k^n y_{n+k} \to \omega$ fortement dans $L^1(I,E)$. Puis une sous-suite de celui-ci converge vers $\omega$ presque partout, ce qui implique que $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} w(s)ds$, $t \in I$. Ainsi $x$ est une solution de (0.2) et l'ensemble de solutions de (0.2) est fermé. $\square$

Le problème de l'existence de solutions pour (0.2), quand $F$ n'est pas a valeur convexe, est resté ouvert pendant longtemps jusqu'à ce que Filippov [25] le résolve en construire une suite de solutions approchées convergeant conjointement avec le dérivés. Plus tard Kaczynski et Olech [30] et Antosiewicz et Cellina [1] ont prouvé quelques extensions du théorème de Filippov par différentes méthodes.
Dans un certain sens, l'approche d'Antosiewicz et de Cellina est analogue a la méthode du point fixe que l'on utilise pour prouver le théorème de Peano. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et considérons

le problème

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

où $f : I \times E \to E$ est continue et bornée par une constante $M$.

Soit $K = \{x \in C(I,E) : x(t_0) = x_0 \text{ et } \|\dot{x}(t)\| \leq M \ p.p, \ t \in I\}$, $K$ est un sous-ensemble convexe compact de $C(I,E)$. Pour $x \in K$ définissent $T : \ K \to C(I,E)$ par :

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \, x(s))ds.$$

Comme $T$ est continue et $T(K)$, $T$ a un point fixe $x$, qui est un solution de notre problème. Considérons maintenant le problème (0.2) et définissons $\mathcal{F} : K \to \mathcal{P}(K)$ par

$$\mathcal{F}(x) = \{z \in K : \dot{z}(t) \in F(t, \, x(t)) \ p.p, \ t \in I\}.$$

On voit facilement que si $F$ est a valeurs compacte et convexe, il en va de même pour $\mathcal{F}$. Si $F$ n'est pas a valeur convexe alors $\mathcal{F}$ n'est en général ni convexe ni a valeur fermé. comme nous montrera, $\mathcal{F}$ a un point fixe. En fait $\mathcal{F}$ admet une sélection continue $h : K \to K$. Alors, si $u$ est un point fixe de $h$, on a $u = h(u) \in \mathcal{F}(u) = \{z \in K : \ \dot{z}(t) \in F(t, u(t)) \ p.p\}$, et donc $\dot{u}(t) \in F(t, u(t))$ p.p.

**Théorème 1.4.** *[21](**théorème de sélection de Kuratowski-Ryll-Nardzewski 1965**) Soit $\Omega$ un espace mesurable. soit $Y$ un espace métrique complet séparable, alors toute multifonction mesurable $F : \Omega \to \mathcal{P}(Y)$ admet une sélection mesurable.*

## 1.8 Lemme de Filippov

**Lemme 1.3.** *(**Filippov**)[22] : Soit $F : I \to \mathcal{H}(E)$ mesurable et compacte. Soit $v : I \to E$ mesurable. Alors il existe une sélection mesurable $f$ de $F$ satisfaisant $\|v(t) - f(t)\| = d(v(t), \, F(t))$, $t \in I$.*

**Preuve** Soit $\ell(t) = d(v(t), \, F(t))$ et posons $G(t) = F(t) \bigcap \tilde{B}(v(t), \, \ell(t))$. Comme $F(t)$ est compact l'ensemble $G(t)$ est non vide pour tout $t \in I$. Alors $G$ est mesurable comme intersection des multifonctions mesurables. Par le théorème de Kuratowski - Ryll, il existe une sélection mesurable $f$ de $G$. Clairement $f(t) \in F(t)$ et $\|f(t)-v(t)\| = d(v(t), F(t))$, $t \in I$. □

La construction d'une sélection $h$ de $\mathcal{F}$ donnée par Antosiewicz et Cellina est basé sur les lemmes suivants :

**Lemme 1.4.** *[22] Soit $E = \mathbb{R}^n$et soit $F$ satisfait (1.2). Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g^0 : K \to L^1(I, E)$ telle que, pour chaque $u \in K$, on a*
*$d(g^0(u)(t), F(t, u(t))) < \varepsilon$ p.p, $t \in I$.*

**Preuve** Puisque $F$ est continue sur l'ensemble compact $I \times \tilde{B}(x_0, r)$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x - y\| < \delta$ implique $D(F(t, x), F(t, y)) < \varepsilon$ pour tout $t \in I$. Soit $\{U_i\}_{i=1}^m$une couverture ouverte de $K$ avec $diam\{U_i\} < \delta$ et soit $\{p_i\}_{i=1}^m$ une partition d'unité subordonnée a $\{U_i\}_{i=1}^m$. Pour chaque $i = 1, .., m$. choisissez $u_i \in U_i$ et soit $v_i(t) \in F(t, u_i(t))$, $t \in I$, mesurables.

Définir $\tau_i : K \to I$ par $\tau_0(u) = t_0$, $\tau_i(u) = \tau_{i-1}(u) + p_i(u)(T - t_0)$, $i = 1, ..., m$. Clairement, les fonctions $\tau_i$ sont continues et $\tau_m(u) = t_0 + \sum_{i=1}^m p_i(u)(T - t_0) = T$. Pour chaque $u \in K$ mettre $J_i(u) = [\tau_{i-1}(u), \tau_i(u)]$ $i = 1, ..., m$ et définir $g^0 : K \to L^1(I,E)$ par

$$g^0(u)(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{J_i}(u)(t) v_i(t).$$

Prouvons que $g$ est continue. Soit $\sigma > 0$. Pour $u, w \in K$ nous avons

$$g^0(u)(t) - g^0(w)(t) = \sum_{i=1}^{m} (\chi_{J_i}(u)(t) - \chi_{J_i}(w)(t)) v_i(t).$$

ou $\chi_{J_i}(u)(t) \neq \chi_{J_i}(w)(t)$ si seulement si $t \in J_i(u) \Delta J_i(w)$, les fonctions $\tau_i$ sont continues il existe $\delta_1 > 0$ telles que $\mid \tau_i(u) - \tau_i(w) \mid < \sigma/4mM$ pour $\|u - w\| < \delta_1$, $i = 1, ..., m$.
Il s'ensuite que

$$\mu(J_i(u) \Delta J_i(w)) <\mid \tau_i(u) - \tau_i(w) \mid + \mid \tau_{i-1}(u) - \tau_{i-1}(w) \mid < \sigma/2mM.$$

D'ou

$$\mu(\{t \in I : \; g^0(u)(t) \neq g^0(w)(t)\}) < \mu(\bigcup_{i=1}^{m} (J_i(u) \Delta J_i(w))) < \sigma/2M.$$

ce qui implique

$$\int_I \|g^0(u)(t) - g^0(w)(t)\| dt < 2M\sigma/2M = \sigma.$$

et donc $g^0$ est continue. Prouvons que pour tout $u \in K$ on a $d(g^0(u)(t),\, F(t,\, u(t))) < \varepsilon$ p.p. Fixez $u \in K$ et $t \in I$. Puisque $\{J_i(u)\}_{i=1}^{n}$ est une partition de $I$, $t$ appartient exactement a un $J_i(u)$, ce qui implique que $p_i(u) \neq 0$ donc $u \in U_i$. en suite

$$d(g^0(u)(t),\, F(t,\, u(t))) < d(v_i(t),\, F(t,\, u_i(t))) + d(F(t,\, u_i(t)),\, F(t,\, u(t))) < \varepsilon.$$

comme $\|u - u_i\| < diamU_i < \delta$. □

On démontre maintenant l'existence d'un $g$ continue tel que $g(u)(t) \in F(t,u(t))$.

**Lemme 1.5.** *[22] Sous les hypothèses du lemme 1.3, il existe une fonction $g : K \to L^1(I, E)$ telle que, pour chaque $u \in K$ on a $g(u)(t) \in F(t, u(t))$, p.p, $t \in I$.*

**Preuve** Définissez $\varepsilon_n = 2^{-n}$. On prétend que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g^n :\ K \to L^1(I, E)$ avec les propriétés suivantes :

(i) $d(g^n(t),\, F(t,\, u(t))) < \varepsilon_{n+1}$ pour tout $u \in K$ p.p, $t \in I$.

(ii) $\exists \delta_n > 0 : \|u - w\| < \delta_n$ implique $\mu(\{t : |g^n(u)(t) - g^n(w)(t)| > 0\}) < \varepsilon_{n+1}$.

(iii) $\mu(\{t : |g^n(u)(t) - g^{n_1}(u)(t)| > \varepsilon_n\}) < \varepsilon_n$, *pour tout* $u \in K$.

Supposons que $g^0, ..., g^{n-1}$ satisfasse (i), (ii), (iii) et soit $0 < \delta < \delta_{n-1}$ tel que $\|x - y\| < \delta$ implique $D(F(t,\, x),\, F(t,\, y)) < \varepsilon_{n+1}$.

Soit $\{U_i^n\}_{i=1}^{m_n}$ un ouvert recouvrement de $K$ avec $diamU_i^n < \delta$. Choisissez $u_i^n \in U_i^n$ et laissez

$v_i^n(t) \in F(t,\, u_i^n(t))$ une fonction mesurable satisfaisant :

$$\|v_i^n - g(u_i^n)(t)\| = d(g^{n-1}(u_i^n)(t),\, F(t,\, u_i^n(t))). \tag{1.6}$$

Soit $\{p_i^n\}_{i=1}^{m_n}$ une partition d'unité subordonnée a $\{U_i^n\}_{i=1}^{m_n}$ et définissons $\tau_i^n :\ K \to I$ par $\tau_i^0(u) = t_0$, $\tau_i^n(u) = \tau_i^{n-1}(u) + p_i^n(u)(T - t_0)$, $i = 1, .., m$. Maintenant, définir $g^n : K \to L^1(I,E)$ par

$$g^n(u)(t) = \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{J_n(u)}(t) v_i^n(t).$$

d'après le lemme 1.3, il existe $0 < \delta_n < \delta$ tel que $\|u - w\| < \delta_n$ implique $\mu(J_i^n(u) \Delta J_i^n(w)) < \frac{\varepsilon_{n+1}}{2m_n M}$, Il suit que $\mu(\{t :\ \|g^n(t) - g^n(w)(t)\| > 0\}) < \varepsilon_{n+1}$ et donc $g^n$ satisfait (ii). Fixez $u \in K$ et $t \in I$. Depuis $\{J_i^n(u)\}_{i=1}^{m_n}$ . est une partition de $I$, il existe $i$ tel que $t \in J_i^n(u)$.

D'ou $p_i^n(u) \neq 0$ et donc $u \in U_i^n$. On a
$d(g^n(u)(t),\, F(t,\, u(t)) < d(v_i^n(t),\, F(u_i^n(t))) + d(F(t,\, u_i^n(t)),\, F(t,\, u(t))) < \varepsilon_{n+1}$
comme $\|u - u_i^n\| < diam U_i^n < \delta$, et aussi (i) est prouvé.
Pour prouver (iii), soit $t \in J_i^n(u)$. Nous avons $\|g^n(u)(t) - g^{n-1}(u)(t)\| < \|v_i^n(t) - g^{n-1}(u_i^n)(t)\| + \|g^{n-1}(u_i^n)(t) - g^{n-1}(u)(t)\|$. De (1.6) et de l'hypothèse d'induction (i), il s'ensuite que $\|g^n(u)(t) - g^{n-1}(u)(t)\| < \varepsilon_n + \|g^{n-1}(u_i^n)(t) - g^{n-1}(u)(t)\|$
Par conséquent

$$I_n(u) = \{t :\ \|g^n(t) - g^{n-1}(u)(t)\| > c_n\} \subset \{t :\ \|g^{n-1}(u_i^n)(t) - g^{n-1}(u)(t)\| > 0\}.$$

Par l'hypothèse d'induction (ii), la mesure du dernier ensemble est plus petite que $\varepsilon_n$ D'ou $\mu(I_n(u)) < \varepsilon^n$, qui prouve (iii) et la revendication.
La suite $g^n$ des fonctions continues $g^n : K \to L^1(I,\, E)$ est de Cauchy. Dans fait, pour tout $u \in K$ et p, q > n on a

$$\begin{aligned}
\int_I \|g^P(u)(t) - g^q(u)(t)\|\, dt &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_I \|g^k(u)(t) - g^{k-1}(u)(t)\|\, dt \\
&< \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{I_k(u)} 2M\, dt + \int_{I \setminus I_k} \varepsilon_k\, dt \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2M\varepsilon_k + \varepsilon_k |I| \\
&\leq 2M + |I| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k \\
&= (2M + |I|)\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Ainsi $\{g^n\}$ converge vers une fonction continue $g : K \to L^1(I,\, E)$. De plus, pour tout $u \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons
$\int_I d(g(u)(t),\, F(t,\, u(t))\, dt \leq \int_I d(g^n(u)(t),\, F(t,\, u(t))\, dt + \int_I \|g(u)(t) - g^n(u)(t)\|\, dt.$
En laissant $n \to \infty$, on a $\int_I d(g(u)(t),\, F(t,\, u(t))\, dt = 0$, et ainsi $g(u)(t) \in F(t,\, u(t))$ p.p.$\square$

**Théorème 1.5.** *(théorème du point fixe de Schauder (1930))[21]*
*Soit $E$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, $C$ une partie non vide de $E$, compact et convexe. Si $T$ est une application continue de $C$ dans $C$ telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors $T$ a un point fixe.*

**Théorème 1.6.** *[22] Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $F$ satisfait (1.2). Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

*a des solutions.*

**Preuve** Par le lemme 1.4, il existe $g : K \to L^1(I,E)$ continue telle que pour tout $u \in K$ on a $g(u)(t) \in F(t,u(t))$ p.p.
Définir $h : K \to K$ par : $h(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(u)(s)\ ds$.
Il est clair que $h$ est continue et mappe $K$ en lui-même. Ensuite, par le théorème du point fixe de Schauder, $h$ a un point fixe $u^* \in K$, soit $u^*(t) = g(u^*)(t) \in F(t,\ u^*(t))$ p.p, $t \in I$.
Ceci complété la démonstration. $\square$

Le point de départ de cette méthode est l'observation suivante en raison de Cellina [12]. Considérez l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} \in \{-1{,}1\} \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} \dot{x} \in\in [-1,1] \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Comme le montre [12], l'ensemble de solutions de (1.8) est un $G_\delta$ sous-ensemble dense dans l'ensemble de solutions de (1.9). Pour le prouver, soit $K \subset C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ l'ensemble des solutions de (1.9). Clairement $K$ est un sous-ensemble compact de $C([0,\ 1],\ \mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon$ positif $K_\varepsilon = \{x \in K :\ \int_0^1 (1-|\dot{x}(t)|)\ dt < \varepsilon\}$.
Nous affirmons que $K_\varepsilon$ est ouvert et dense dans K.

(i) $K_\varepsilon$ est dense : Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$. Soit $y_\varepsilon$ construit comme suit. Pour $t > 0$ définir $y_\varepsilon(t) = (-1)t$ jusqu'à ce que $y_\varepsilon(t) - x(t) = \varepsilon$. Appelez $t_1$ un tel $t$ et, pour $t > t_1$ définir $y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(t_1) + (1)(t - t_1)$ jusqu'à ce que $y_\varepsilon(t) - x(t) = -\varepsilon$ et ainsi de suite. Bien sur $y_\epsilon \in K_\varepsilon$ et $\|y_\varepsilon - x\| < \varepsilon$.

(ii) $K_\varepsilon$ est ouvert : Nous prouvons que $K \backslash K_\varepsilon$ est fermé. Soit $x_n \subset K \backslash K_\varepsilon$ converger vers $x$. Par définition nous avons
$\int_0^1 (1-|\dot{x}_n(t)|)\ dt \geq \varepsilon$. Par contre $x_n \to x$ implique que la suite $\{\dot{x}_n\}$ des dérivées converge faiblement dans $L^1([0,1],\mathbb{R})$ vers $\dot{x}$. Puisque $\int_0^1 |\dot{x}_n(t)| dt \leq 1-\varepsilon$ il s'ensuite que $\int_0^1 |\dot{x}(t)| dt \leq 1-\varepsilon$, d'ou $x \in K \backslash K_\varepsilon$.
En prenant $\varepsilon = 1/n$ on obtient une suite $\{k_n\}$ de sous-ensembles ouverts et denses de $K$. Puisque $K$ est un espace métrique complet par le théorème de catégorie de Baire, il suit que $\bigcap K_n$ est un $G_\delta$ sous-ensemble dense dans $K$. Si $x \in \bigcap K_n$, alors $\int_0^1 (1-|\dot{x}(t)|)\ dt = 0$. Puisque $|\dot{x}(t)| \leq 1$, nous avons $|\dot{x}(t)| = 1$ p.p. et donc $x$ est une solution de (1.8). Ce résultat peut être facilement étendu a la boule unitaire d'un Banach réflexif espace $E$.

Plus généralement, considérons les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} \in \partial F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.11}$$

où $\partial F(t,x)$ désigne la frontière de $F(t,x)$.

## 1.9 Espace de Baire

**Proposistion 1.6.** [37]
Soit $A$ un sous-ensemble d'un espace topologique $X$. Alors on a :

$$\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash A}} = X\backslash \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{X\backslash A} = X\backslash \overset{\circ}{A}$$

où $X\backslash A$ est le complémentaire de $A$ par rapport à $X$.

**Théorème 1.7.** *(**théorème de cantor**)[37]*
*Soit $(X,d)$ un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

*(i)* *L'espace $(X,d)$ est complet.*

*(ii)* *L'intersection de toute suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de parties fermées non vides de $(X,d)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta(F_n)=0$ contient un point et un seul. Où $\delta(F_n)$ est le diamétre de $F_n$ et $\delta(F_n)=sup\{d(x,y);\ x,y\in F_n\}$*

*(iii)* *Toute famille filtrante croissante de Cauchy dans $(X,d)$ est convergente.*

**Proposistion 1.7.** [37]
Soit $X$ un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) Pour toute famille dénombrable $(F_n)_{n\geq 0}$ de fermés de $X$ telle que $X=\bigcup\limits_{n\geq 0}F_n$, la réunion des intérieurs $\bigcup\limits_{n\geq 0}\overset{\circ}{F}_n$ est dense dans X.

(2) La réunion de toute famille dénombrable de fermés de $X$ d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

(3) L'intersection de toute famille dénombrable d'ouvertes de $X$ et denses dans $X$ est dense dans $X$.

**Définition 1.28.** [37] Un espace topologique $X$ est dit espace de Baire si $X$ vérifie l'une des propriétés de la proposition précédente.

**Théorème 1.8.** ***(théorème de Baire)****[37]*
*Soit $(X,d)$ un espace métrique complet. Alors $X$ est un espace de Baire.*

**Preuve**
Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts de $X$ et denses dans $X$. Pour montrer que $\bigcap\limits_{n\geq 0}U_n$ est dense dans $X$, il suffit de montrer que pour tout ouvert non vide $V$ de $X$, $V\cap\bigcap\limits_{n\geq 0}U_n\neq\emptyset$.
Comme $U_0$ est dense dans $X$, alors $V\cap U_0\neq\emptyset$. et soit $x_0\in V\cap U_0$. Comme $V\cap U_0$ est un ouvert de $X$, il existe $r_0>0$ tel que $r_0\leq 1$ et $B(x_0,2r_0)\subset V\cap U_0$.
On construit, par récurrence sur $n$, une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $X$ et une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels strictement positifs tels que $r_n\leq 2^{-n}$ et $B(x_n,2r_n)\subset U_n\cap B(x_{n-1},r_{n-1})$, pour tout $n\geq 1$.
En effet, on a déjà construit $x_0$ et $r_0$ et supposons $x_n$ et $r_n$ construits ; comme $U_{n+1}$ est dense dans $X$, il existe $x_{n+1}\in U_{n+1}\cap B(x_n,r_n)$. Comme $U_{n+1}\cap B(x_n,r_n)$ est ouvert, il

existe $0 < r_{n+1} \leq 2^{-n-1}$ tel que $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$.
Soit $B_n = B'(x_n, r_n)$, on a $B_{n+1} \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \subset B_n$. Comme l'espace $(X, d)$ est complet et les $B_n$ forment une suite décroissante de fermés non vides dont les diamétres tendent vers 0, d'aprés le théorème de **Cantor** (théorème1.7), on a $\bigcap_{n\geq 0} B_n \neq \emptyset$.
Or $B_0 \subset V$ et, pour tout $n \geq 0$, on a $B_n \subset U_n$, donc $\bigcap_{n\geq 0} B_n \subset V \cap \bigcap_{n\geq 0} U_n$.
Par conséquent, on a $V \cap \bigcap_{n\geq 0} U_n \neq \emptyset$. Donc $\bigcap_{n\geq 0} U_n$ est dense dans $X$. □

**Théorème 1.9.** *[22] Soit $E$ un espace de Banach réflexif. Soit $F : I \times B(x_0, r) \to \mathcal{H}^c$ continue et $\|F\| \leq M$. De plus, supposons que pour tout $(t,x) \in I \times B(x_0, r)$ l'ensemble $F(t, x)$ a un intérieur non vide. Alors les problèmes de Cauchy (1.10) et (1.11) ont des solutions et l'ensemble de solutions de (1.10) est un $G_\delta$ sous-ensemble dense dans l'ensemble de solutions de (1.11).*

Nous esquissons l'idée de la preuve.
Définir $\mathcal{M}_F = \{x \in C(I,E) : \ x \text{ est une solution de } (1.11)\}$. $\mathcal{M}_F$ avec la métrique de $C(I, E)$ est un espace métrique complet. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note

$$\mathcal{M}_n = \{x \in \mathcal{M}_F : \int_I d(\dot{x}(t), \partial F(t,x(t)))\, dt < 1/n\}.$$

L'étape principale est de prouver que chaque $\mathcal{M}_n$ est un sous-ensemble ouvert et dense de $\mathcal{M}_F$.
Ensuite, par le théorème de catégorie de Baire, il s'ensuite que $\bigcap \mathcal{M}_n$ est un $G_\delta$ sous-ensemble dense dans $\mathcal{M}_F$. Si $x \in \bigcap \mathcal{M}_n$ alors $\int_I d(\dot{x}(t), \partial F(t, x(t)))\, dt = 0$, soit $\dot{x}(t) \in \partial F(t,x(t))$ p.p. Considérons maintenant les problèmes :

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} \dot{x} \in \overline{co}F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

D'après le théorème précédent, nous savons que si $F$ est la frontière de $\overline{co}F$ et l'intérieur de $\overline{co}F$ n'est pas vide, alors les deux problèmes ont des solutions et l'ensemble de solutions du problème (1.12) est un $G_\delta$ sous-ensemble dense dans l'ensemble des solutions du problème (1.13). En général, cette résultat n'est pas vrai, comme le montre l'exemple suivantt.

**Exemple 1.4.** **(Plis)**[22] : On considére

$$\begin{cases} \dot{x} \in \{-1,\, 1\} & x(0) = 0 \\ \dot{y} = |x| + \sqrt{|y|} & y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} \dot{x} \in [-1,\, 1] & x(0) = 0 \\ \dot{y} = |x| + \sqrt{|y|} & y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

Alors $x(t) = y(t) \equiv 0$ est une solution de (1.15) mais n'appartient pas a la fermeture du ensemble de solutions de (1.14).
En effet, soit $(x(t), y(t))$ une solution arbitraire de (1.14), soit $\dot{x}(t) \in \{-1,\, 1\}$ et $\dot{y}(t) = |x(t)| + \sqrt{|y(t)|}$. Pour tout $r > 0$, il existe $t^* \in [0,\, r]$ tel que $|x(t^*)| > 0$. Alors on a $\dot{y}(t) \geq \sqrt{|y(t)|}$, $\dot{y}(t^*) > 0$ ce qui implique $y(t) \geq (t - t^*)^2/4$ pour $t > t^*$. comme $t^* > 0$ est arbitraire, on a $y(t) \geq t^2/4$, $t \geq 0$, d'ou la déclaration découle aussitôt.

Cet exemple montre qu'une nouvelle difficulté survient dans l'application de la catégorie méthode aux inclusions différentielles non convexes. En fait, considérons le problème de convexité et notons $\mathcal{M}$ son ensemble de solutions, qui, sous des hypothèses appropriées, est un sous-ensemble fermé de $C(I,E)$. On peut essayer de construire une suite ouverte et dense sous-ensembles $\mathcal{M}_n$de $\mathcal{M}$ tels que $\bigcap \mathcal{M}_n$ serait l'ensemble de solutions de problème original. Ceci est en général impossible, car sinon $\mathcal{M}_n$ serait dense dans $\mathcal{M}$,
ce qui est exclu par l'exemple Plis.
Pour monter cette difficulté due au manque de densité, on peut considérer la manière suivantes :

(i) d'introduire un sous-espace $\acute{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ commode de sorte que dans une telle densité d'espace plus petit soit assuré.

(ii) conserver l'espace $\mathcal{M}$ et utiliser une notion plus faible de densité compatible avec le phénomène de Plis.

Dans la direction (i), nous avons le théorème suivant.

**Théorème 1.10.** *[22]. Soit $E$ un espace de Banach réflexif et séparable et soit $F$ satisfait l'hypothèse (1.2). De plus, supposons que pour tout $(t,x) \in I \times B(x_0,r)$, l'ensemble $\overline{co}F(t,x)$ a un intérieur non vide. Alors le problème*

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.16}$$

*a des solutions.*

Esquisse de la preuve. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble de solutions du problème de convexité

$$\begin{cases} \dot{x} \in \overline{co}F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.17}$$

on note $\grave{\mathcal{M}} = cl \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathcal{M} : \ d(\dot{x}(t), \partial\overline{co}F(t,x(t))) \geq 1/n \ p.p\}$.
Ici "cl A" désigne la fermeture de l'ensemble $A \subset C(I, E)$. $\grave{\mathcal{M}}$ n'est pas vide, et avec la métrique de $C(I, E)$ est un espace métrique complet. Ensuite, nous construisons une suite de sous-ensembles ouverts et denses $\grave{\mathcal{M}}_n$ dans $\grave{\mathcal{M}}$ et nous montrons que
$\bigcap \mathcal{M}_n \subset \{x \in \grave{\mathcal{M}} : \ \dot{x} \in F(t, x), x(t_0) = x_0\}$.
Il s'avoir que la méthode (ii) est plus flexible et peut être appliquée a certains cas intéressants. Cependant, avant d'aller dans cette direction, nous avons besoin des outils qui seront donnés dans la section suivante.

## 1.10 Les points extrêmes et la fonction de Choquet

Soit $E$ un espace vectoriel localement convexe de Hausdorff (en bref E.L.C.H),

**Définition 1.29.** (Espace vectoriel localement convexe de Hausdorff)[37] Un espace vectoriel topologique est dit **localement convexe** si chaque point a une base de voisinage convexe (autrement, si pour tout voisinage $V$ de $x$, il existe un ouvert $U$ inclus dans $V$ et conttenant $x$ qui est de plus convexe). De façon équivalent, un espace vectoriel localement convexe est un espace vectoriel dont la topologie est définie par une famille de semi-normes.

**Définition 1.30.** [31] Un espace topologique $X$ est dit de Hausdorff (séparé) si est seulement si $\forall x,y \in X$, $x \neq y$, $\exists V_x \in \mathcal{V}(x), \exists V_y \in \mathcal{V}(y)$ telle que $V_x \cap V_y = \emptyset$.

pour tout $x$, $x_1$ et $x_2 \in E$, on dit que $x$ est liée entre $x_1$ et $x_2$ si $x_1 \neq x_2$ et s'il existe un $0 < t < 1$ tel que $x = tx_1 + (1-t)x_2$.

**Définition 1.31.** (**Point extrême** )[33]
Soient $K$ sous-ensemble de $E$ et $x \in K$ est appelé un point extrême de $K$ s'il ne relie pas entre deux points distincts de $K$ c'est-à-dire qu'il n'existe pas $x_1$, $x_2 \in K$ et $0 < t < 1$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $x = tx_1 + (1-t)x_2$
l'ensemble de tous les points extrêmes de $K$ est noté par $extK$

**Définition 1.32.** (**Ensemble totalement ordonné**)[20]
Soit $P$ un ensemble ordonné i.e $(P, \preccurlyeq)$ muni par une relation d'ordre.
on dit que $P$ est totalement ordonné si $\forall a,b \in P$ alors $a \preccurlyeq b$

**Théorème 1.11.** *(**Principe maximum de Bauer**)[22]*
*Soit $E$ un E.L.C.H. Soit $K \subset E$ compact et convexe et soit $f : \ E \to \mathbb{R}$ convexe et (s.c.s) Alors il existe un point extrême de $K$ au quel $f$ atteint son maximum. Si $f$ est strictement convexe et $f(x_0)$ est le maximum, alors $x_0$ est un point extrême de $K$.*

**Preuve** Soit $\Gamma = \{F \subset K : \ F \ fermé, \ F \neq \emptyset \ et \ a, \ b \in K, \ ]a, \ b[ \bigcap F \neq \emptyset \Longrightarrow ]a, \ b[ \subset F\}$. Observez qu'un singleton $\{a\} \in \Gamma$ si et seulement si $a$ est un point extrême de $K$. $\Gamma$ est non vide puisque $K \in \Gamma$. De plus si $\{F_i\}_{i \in I} \in \Gamma$ puis $\bigcap_{i \in I} F_i \in \Gamma$ a condition que $\bigcap F_i \neq \emptyset$. Soit $G = \{x \in K : f(x) = \sup\{f(y) : y \in K\}\}$. $G$ est non vide, puisque $f$ est (s.c.s). et $K$ compact. De plus si $x_0 \in ]a,b[ \bigcap G$, $x_0 = \lambda a + (1-\lambda) b$ on a $\sup f = f(x_0) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ ce qui implique $f(a) = f(b) = f(x_0)$, d'ou $]a, b[ \subset G$.
introduisons maintenant un ordre partiel dans $\Gamma$.
en définissant $F_1 \prec F_2$ si $F_1 \subset F_2$. Si $\{F_i\}$ est un sous-ensemble totalement ordonné, il a un borne inférieure qui est $\bigcap F_i \neq \emptyset$. Soit $F_1$ un sous-ensemble totalement ordonné contenant $G$ et soit $F$ un élément minimal de $\Gamma_1$. Nous affirmons que $F = \{a\}$. Supposons $a, b \in F$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\ell \in E^*$ tel que $\ell(a) \neq \ell(b)$. L'ensemble $F_1 = \{x \in F : \ell(x) = \sup\{\ell(y) : y \in F\}\}$. Alors $F_1 \in \Gamma$ et $F_1 \prec F$, une contradiction a la

minimalité de $F$.
Si $f$ est strictement convexe et $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in K\}$ alors $x_0$ est une point extrême de $K$. Supposons en fait $x_0 = \lambda a + (1-\lambda)b$, $\lambda \in (0,1)$ et $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in K\}$ alors $f(x_0) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \leq f(x_0)$ une contradiction. $\square$

**Corollaire 1.1.** *[22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Soit $H$ un support fermé par le plan de $K$. Alors $H$ contient un point extrême de $K$.*

**Preuve** Soit $H = \{x \in E : \ell(x) = 1\}$, $\ell \in E^*$ et $K \subset \{x \in E : \ell(x) \leq 1\}$. Par le lemme précédent appliqué a $f = \ell$ il existe un point extrême $x_0 \in K$ tel que $\ell(x_0) = \max\{\ell(x) : x \in K\} = 1$. Alors $x_0 \in H$. $\square$

**Théorème 1.12.** *(**Kerin-Milman**) [22]*
*Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Soit $extK$ l'ensemble des points extrêmes de $K$. Alors $K = \overline{co}extK$.*

**Preuve** Par définition $extK \subset K$ donc $\overline{co}extK \subset K$. Supposons maintenant que il existe $x_0 \in K$ tel que $x_0 \notin \overline{co}extK$. Alors il existe $\ell \in E^*$ tel que $\ell(x_0) = \acute{\lambda} > \lambda$ et $\ell(x) \leq \lambda$ pour tout $x \in \overline{co}extK$. L'ensemble $H = \{x \in E : \ell(x) = \acute{\lambda}\}$ est un hyperplan fermé de support de $K$, donc il contient un point extrême $z$ de $K$. D'ou $\ell(z) \leq \lambda$. Par contre $\ell(z) = \acute{\lambda}$ puisque $z \in H$, une contradiction. $\square$

Soit $E$ un E.L.C.H et soit $K \subset E$ compact. Soit $C(K)$ l'ensemble de tous les fonctions continues $f : K \to \mathbb{R}$. Une mesure de Radon sur $K$ est une fonctionnel sur $C(K)$ . L'ensemble de toutes les mesures de Radon sur $K$ est noté $\mathcal{M}(K)$. une mesure $\mu$ est dite positive si $\mu(f) \geq 0$ pour toute fonction non négative $f : K \to \mathbb{R}$. l'ensemble

$$\mathcal{M}^1(K) = \{\mu \in K \ : \ \mu \ \ positif \ \ et \ \ \|\mu\| = 1\}.$$

Nous mettons sur $\mathcal{M}(K)$ la topologie faible * du dual de $C(K)$. Clairement $\mathcal{M}^1(K)$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{M}(K)$. Il est bien connu (théorème de représentation du Riesz) qu'il existe une correspondance biunivoque entre des Mesures de Borel et mesures positives du radon sur $K$. La correspondance est donnée par $L(f) = \int_K f \ d\mu$, $f \in C(K)$.

**Théorème 1.13.** ***(d'approximation)****[22]*
*Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Soit $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Alors il existe un réseau $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^1(K)$ tel que $\mu_\alpha$ est discret et $\mu_\alpha \to \mu$, c'est-a-dire $\mu_\alpha(f) \to \mu(f)$ pour chaque $f \in C(K)$.*

**Preuve** Soit $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ l'ensemble de tous les revêtements ouverts finis de $K$. Soit $\mathcal{U}_\alpha = \{U_i^\alpha\}_{i=1}^{m_\alpha}$, une couverture ouverte finie de $K$ et soit $\{g_i^\alpha\}$ une partition d'unité subordonné a lui. Pour chaque $i = 1, ..,m_\alpha$, fixez $x_i^\alpha \in S_{g_i^\alpha} \subset U_i$, ou $S_{g_i^\alpha}$ est le support de $g_i^\alpha$, et définissez

$$\mu_\alpha = \sum_{i=1}^{m} \mu(g_i^\alpha)\delta_{x_i}\alpha$$

Clairement $\mu_\alpha$ est discret et $\mu_\alpha \in \mathcal{M}^1(K)$. Si on commande $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ par raffinement, c'est $\mathcal{U}_\alpha \prec \mathcal{U}_\beta$ si $\mathcal{U}_\alpha$ est un raffinement de $\mathcal{U}_\beta$, les mesures correspondantes $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ forme un filet. Nous affirmons que la $\mu_\alpha$ converge vers $\mu$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $f \in C(K)$ il existe $\beta$ tel que pour tous les $\mathcal{U}_\alpha \prec \mathcal{U}_\beta$ nous avons $|\mu_\alpha(f) - \mu(f)| < \varepsilon$. Puisque $f$ est continue sur $K$, il existe un recouvrement ouvert fini $\mathcal{U}_\beta = \{U_i^\beta\}$ tel que$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $(x, y) \in \mathcal{U}_\beta$. Pour tout $\mathcal{U}_\alpha \prec \mathcal{U}_\beta$ nous avoir

$$\begin{aligned}
|\mu_\alpha(f) - \mu(f)| &= |\sum_{i=1}^{m\alpha} \mu(g_i^\alpha) f(x_i^\alpha) - \mu(f)| \\
&= |\sum_{i=1}^{m\alpha} \mu(g_i^\alpha f(x_i^\alpha)) - \sum_{i=1}^{m\alpha} \mu(g_i^\alpha f)| \\
&\leq |\sum_{i=1}^{m\alpha} (\mu(g_i^\alpha f(x_i^\alpha)) - \mu(g_i^\alpha f))| \\
&\leq |\sum_{i=1}^{m\alpha} \mu(g_i^\alpha (f(x_i^\alpha) - f)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m\alpha} \mu(g_i^\alpha) \|(f(x_i^\alpha) - f)\|_{S_{g_i^\alpha}}
\end{aligned}$$

ou la dernière inégalité est vraie parce que, pour tout $x \in K$, $g_i^\alpha(x)|f(x_i^\alpha) - f(x)| \leq g_i^\alpha(x)\|(f(x_i^\alpha) - f)\|_{S_{g_i^\alpha}}$. Étant $S_{g_i^\alpha} \subset U_i^\alpha$ et $\mathcal{U}_\alpha$ aucun raffinement de $\mathcal{U}_\beta$, il suit
$\|(f(x_i^\alpha) - f)\|_{S_{g_i^\alpha}} < \varepsilon$. Comme $\sum_{i=1}^{m\alpha} \mu(g_i^\alpha) = 1$ on obtient $|\mu_\alpha(f) - \mu(f)| < \varepsilon$. $\square$

**Définition 1.33.** (**L'épigraphe**)[22] Soit $E$ un espace L.C.H et $f : E \to \mathbb{R}$. un épigraphe $E(f)$ de $f$ est Défini par $E(f) = \{(x, \beta) \in E \times \mathbb{R} : \beta \geq f(x)\}$.

**Proposistion 1.8.** [22] Soit $E$ un espace L.C.H. Soit $K \subset E$ convexe et $f: \ K \to \mathbb{R}$. ensuite

(i) $f$ est (s.c.i) si et seulement si $E(f)$ est fermé.

(ii) $f$ est convexe si et seulement si $E(f)$ est convexe.

**Preuve** Si $E(f)$ est fermé, l'ensemble $\{x \in K: \ f(x) \leq \beta\}$ est fermé. En réalité

$$\{x \in K : f(x) \leq \beta\} \times \{\beta\} = E(f) \bigcap \{(x,\lambda) \in E \times \mathbb{R}: \ \lambda = \beta\}.$$

Viceversa soit $f$ (s.c.i). et soit $\{x_\alpha, \ \beta_\alpha\} \subset E(f)$ un réseau convergent vers $(x, \ \beta)$. Puisque $f$ est (s.c.i), $f(x_\alpha) \leq \beta_\alpha$ implique $f(x) \leq \beta$, donc $E(f)$ est fermé. Maintenant, soit $f$ convexe et soit $(x_1,\beta_1), (x_2, \beta_2) \in E(f)$. Alors $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2$. Cela implique que $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2) \in E(f)$. De manière analogue , $E(f)$ convexe implique que $f$ est convexe. □

**Corollaire 1.2.** *[22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ convexe. Soit $\{f_\alpha\}$, $f_\alpha : K \to \mathbb{R}$, soit une famille de convexes, (s.c.i). fonctions telles que $f(x) = \sup f_\alpha(x) < +\infty$. Alors $f$ est convexe et (s.c.i).*

**Preuve** Par la proposition précédente, chaque $E(f_\alpha)$ est convexe et fermé et donc $E(f) = \bigcap_\alpha E(f_\alpha)$ est convexe et fermé. Cela implique que $f$ est(s.c.i) et convexe. □

**Définition 1.34.** [22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les fonctions continues affines $\alpha : K \to \mathbb{R}$. Pour $f : K \to \mathbb{R}$ borné définir $\hat{f}: \ K \to \mathbb{R}$ par $\hat{f}(x) = \sup\{\alpha(x): \ \alpha \in \mathcal{A}, \ \alpha \leq f\}$ ou par $\alpha \leq f$ on entend $\alpha(u) \leq f(u)$ pour tout $u \in K$. Les principales propriétés de $\hat{f}$ sont résumées dans la proposition suivante.

**Proposistion 1.9.** [22] Soit $E$ un espace L.C.H. Soit $K \subset E$ compact et convexe, et soit $f : K \to \mathbb{R}$ soit borné. Alors

(i) $\hat{f}$ est convexe et (s.c.i).

(ii) $\hat{f} \leq f$.

(iii) $f \to \hat{f}$ monotone et sous-linéaire, c'est-a-dire $\widehat{(f+g)} \geq \hat{f} + \hat{g}$.

(iv) $f = \hat{f}$ ssi f est convexe et (s.c.i).

(v) $E(\hat{f}) = \overline{co}E(f)$.

(vi) $Graph\hat{f} \subset \overline{co}Graphf$.

**Preuve** (i) découle du corollaire précédent.

(ii) est immédiate.

(iii) $f > g$ implique clairement $\hat{f} > \hat{g}$. Pour prouver la sous-linéarité, laissez $f$, $g$ et $\varepsilon > 0$ et soit $\alpha_\varepsilon$ , $\beta_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que : $\alpha_\varepsilon < f$, $\beta_\varepsilon < g$ et $\hat{f}(x) - \varepsilon/2 \leq \alpha_\varepsilon(x)$, $\hat{g}(x) - \varepsilon/2 \leq \beta_\varepsilon(x)$. Nous avons $\widehat{(f+g)}(x) = \sup\{\gamma(x) \ : \ \gamma \in \mathcal{A} \ , \ \gamma \leq f+g\} \geq \alpha_\varepsilon(x) + \beta_\varepsilon(x) \geq \hat{f} + \hat{g} - \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il suit $\widehat{(f+g)} \geq \hat{f} + \hat{g}$.

(iv) si $\hat{f} = f$ alors de (i) il s'ensuite que $f$ est (s.c.i) et convexe. Supposons maintenant que $f$ est (s.c.i) et convexe. Nous affirmons que $f(x) = \sup\{\alpha(x) : \alpha \in \mathcal{A}, \alpha \leq f\}$. Clairement $E(f)$ est fermé et convexe. Soit $\lambda < f(x)$, de sorte que $(x, \lambda) \notin E(f)$. Il existe $\ell \in (E \times \mathbb{R})^*$ tels que $\ell(x, \lambda) < 0$ et $\ell(z) \geq 0$ pour tout $z \in E(f)$, en particulier $\ell(y,f(y)) \geq 0$ pour tout $y \in K$. On a $\ell(y, f(y)) = \ell(y, 0) + \ell(0, f(y)) = \ell(y, 0) + f(y)\ell(0,1) = a(y) + f(y)\gamma$, ou $\gamma = \ell(0,1) \neq 0$. Puisque $\ell(x, f(x)) \neq \ell(x,\lambda)$ nous avons $a(x) + f(x)\gamma \neq a(x) + \lambda\gamma$. ce qui implique $\gamma \neq 0$. Fixer, pour tout $y \in K$, $\alpha(y) = (a(x-y) + \lambda\gamma)/\gamma$. Clairement $\alpha$ est affine et $\alpha(x) = \lambda$. Nous allons montrer que $\alpha(y) \leq f(y)$ pour tout $y \in K$. Nous avons $\alpha(y) - f(y) = (a(x-y) + \lambda\gamma - \gamma f(y))/\gamma = ((a(x) + \lambda\gamma)_{-}(a(y) + \gamma f(y)))/\gamma \leq 0$.
En fait $a(y) + \gamma f(y) \geq 0$ et $a(x) + \lambda\gamma < 0$. D'ou $\hat{f}(x) = \sup\{\gamma(x) : \ \gamma \in \mathcal{A} \ , \gamma \leq f\} \geq \alpha(x) = \lambda$. Étant $\lambda < f(x)$ arbitraire, il s'ensuite que $\hat{f}(x) \geq f(x)$.

(v) découle immédiatement de (i) et (iv).

(vi) soit $A = E(f)$ et $B = E(\hat{f})$. $B$ est un fermé et convexe $\overline{co}A \subset B$. prouvez que $\overline{co}A = B$ supposons qu'il existe $(x, \gamma) \in B$ et $(x, \gamma) \notin \overline{co}A$. Comme avant il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $\alpha(x) > \gamma \geq \hat{f}(x)$ et $\alpha(y) \leq \lambda$ pour tout $(y, \lambda) \in \overline{co}A$. en particulier $\alpha(y) \leq f(y)$ pour tout $y \in K$. Il s'ensuite que $\hat{f}(x) = \sup\{\gamma(x) : \gamma \in \mathcal{A}, \ \gamma \leq f\} \geq \alpha(x) > \gamma \geq \hat{f}(x)$, une contradiction.

(vii) supposons qu'il existe $x \in K$ tel que $(x, \hat{f}(x)) \in Graph\hat{f}$ et $(x, \hat{f}(x)) \notin \overline{co}Graphf$. Comme auparavant il existe un affine $\alpha$ tel que $\alpha(x) > \hat{f}(x)$ et $\alpha(y) \leq \gamma$. pour tout

$(y, \gamma) \in \overline{co}Graph f$. en particulier $\alpha(y) \leq f(y)$ pour tout $y \in K$.

$\hat{f} = \sup\{\gamma(x) : \gamma \in \mathcal{A}, \gamma \leq f\} \geq \alpha(x) > \hat{f}(x)$ une contradiction. $\square$

**Définition 1.35.** [22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Soit $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$. Un point $x_\mu \in E$ est appelé la résultante de $\mu$ si $\mu(\ell) = \ell(x_\mu)$ pour tout $\ell \in E^*$.

Le résultat est unique, en fait si $\mu(\ell) = \ell(x_\mu)$ et $\mu(\ell) = \ell(y_\mu)$ pour tout $\ell \in E^*$ alors $x_\mu = y_\mu$. Notez que si $\mu$ est discret alors $x_\mu$ est le barycentre de le soutien de $\mu$.

**Proposistion 1.10.** [22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Alors pour chaque $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ on a :

(i) $x_\mu \in K$.

(ii) l'application $\mu \to x_\mu$ de $\mathcal{M}^1(K)$ a $E$ est continue.

**Preuve** Supposons d'abord $\mu$ discret $\mu = \sum \lambda_i \delta_{x_i}$, On a $\mu(\ell) = \sum \lambda_i \ell(x_i) = \ell(\sum \lambda_i x_i)$, et donc $x_\mu = \sum \lambda_i x_i \in K$. Soit maintenant $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ quelconque. Par le théorème d'approximation, il existe un réseau $\{\mu_\alpha\}$ tel que $\mu_\alpha$ soit discret et $\mu_\alpha \to \mu$. Il suit $\ell(x_{\mu_\alpha}) = \mu_\alpha(\ell) \to \mu(\ell) = \ell(x_\mu)$ pour tout $\ell \in E^*$.
Donc $x_{\mu_\alpha}$ converge faiblement vers $x_\mu$ et puisque $x_{\mu_\alpha} \in K$, $K$ compact et convexe, il s'ensuite que $x_\mu \in K$. Pour prouver la continuité, soit $\mu_\alpha \in \mathcal{M}^1(K)$, $\mu_\alpha \to \mu$. Pour tout $\ell \in E^*$ nous avons $\ell(x_{\mu_\alpha}) = \mu_\alpha(\ell) \to \mu(\ell) = \ell(x_\mu)$ donc $x_{\mu_\alpha}$ converge vers $x_\mu$ faiblement et donc fortement puisque $K$ est Hausdorff compact. $\square$

Nous allons maintenant étudier les mesures $\mu$ de $x$ résultante donnée, et support $S_\mu$ contenu sur l'ensemble des points extrêmes de $K$.

**Proposistion 1.11.** [22] Soit $E$ un espace L.C.H, $K \subset E$ soit compact et convexe. ensuite

(i) Pour tout $x \in K$ il existe un réseau $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^1(K)$ tel que $S(\mu_\alpha) \subset extK$ et $\{x_{\mu_\alpha}\}$ converge vers $x$.

(ii) Pour tout $x \in K$ il existe $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ tel que $S(\mu) \subset coextK$ et $x_\mu = x$.

**Preuve** Soit $x \in K$. Par le théorème de Kerin-Milman $x \in coextK$, il existe donc un réseau $\{x_\alpha\} \subset coextK$ convergeant vers $x$. Définir $x_\alpha = \sum \lambda_j^\alpha y_j^\alpha$, $y_j^\alpha \in extK$ et définir $\mu_\alpha = \sum \lambda_j^\alpha \delta_{y_j^\alpha}$. Clairement $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, $S(\mu_\alpha) \subset extK$ et $\{x_{\mu_\alpha}\}$ converge vers $x$.
Pour prouver (ii) soit $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ un point de cluster de $\{\mu_\alpha\}$ défini ci-dessus.
Puisque $\{x_{\mu_\alpha}\}$ converge vers $x$, il s'ensuite que $x_\mu = x$. Comme $S_{\mu_\alpha} \subset extK$ on obtient $S_\mu \subset clextK$. □

**Proposition 1.12.** [22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Alors pour tout $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ il existe un réseau $\{\mu_\alpha\} \in \mathcal{M}^1(K)$ tel que $\mu_\alpha$ soit discret, $x_{\mu_\alpha} = x_\mu$ et $\{\mu_\alpha\}$ converge vers $\mu$.

**Preuve** Soit $\mathcal{U} = \{U_k\}$ une couverture ouverte finie de $K$ par convexe quartiers $U_k$ et soit $\{g_k\}$ une partition d'unité qui lui est subordonnée. Définir
les mesures $\mathcal{V}_k \in \mathcal{M}^1(K)$ par :

$$\mathcal{V}_k(f) = \begin{cases} \mu(fg_k)/\mu(g_k) & \text{si } \mu(g_k) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu(g_k) = 0. \end{cases}$$

Réglez $x_k = x_{\mathcal{V}_k}$ et définissez $\mu_u = \sum \mu(g_k)\delta_{x_k}$ Clairement $\mu_u \in \mathcal{M}^1(K)$. De plus $S_{g_k} \subset U_k$ et $x_k \in S_{\mathcal{V}_k} \subset S_{g_k} \subset U_k$. Pour chaque $\ell \in E^*$, nous avons

$$\begin{aligned} \mu_u(\ell) &= \sum \mu(g_k)\delta_{x_k}(\ell) \\ &= \sum \mu(g_k)\ell(x_k) \\ &= \sum \mu(g_k)\mathcal{V}_k(\ell) \\ &= \sum \mu(\ell g_k) \\ &= \mu(\ell \sum (g_k)) \\ &= \mu(\ell) \\ &= \ell(x_\mu) \end{aligned}$$

alors $x_{\mu_u} = x_\mu$ Soit $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ l'ensemble des revêtements ouverts finis aériens de $K$ par convexe quartiers. Ordre $K$ par raffinement. Le discret correspondant les mesures $\mu_\alpha$, définies comme ci-dessus, ont pour résultat $x_{\mu_\alpha} = x_\mu$ et forment un réseau qui converge vers $\mu$. □

Nous sommes maintenant en mesure de donner une caractérisation de la fonction $\hat{f}$.

**Proposistion 1.13.** [22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $f \in C(K)$ ou $K \subset E$ est compact et convexe. ensuite nous avons :

(i) $\hat{f}(x) = \inf\{\mu(f) : \mu \in \mathcal{M}^1(K)$ et $x_\mu = x\}$.

(ii) $\hat{f}(x) = \inf\{\mu(f) : \mu \in \mathcal{M}^1(K)$ $\mu$ est discret, et $x_\mu = x\}$.

**Preuve** Définissez $\Psi : \mathcal{M}^1(K) \to K \times \mathbb{R}$ par $\Psi(\mu) = (x_\mu,\ \mu(f))$. Puisque $\mu \to x_\mu$ et $\mu \to \mu(f)$ sont des cartes linéaires continues, aussi $\Psi$ est continue et linéaire. De plus $\Psi(\mathcal{M}^1(K))$ est compact et convexe pour $\mathcal{M}^1(K)$ est alors.
Comme $\Psi(\delta_x) = (x, f(x))$ nous avons $\Psi(\mathcal{M}^1(K)) \supset Graphf$, ce qui implique que $\Psi(\mathcal{M}^1(K)) \supset \overline{co}Graphf$. Par contre, si $\mu$ est discret, disons $\mu = \sum \lambda_i \delta_{x_i}$,
alors $\Psi(\mu) = (\sum \lambda_i x_i, \sum \lambda_i f(x_i)) \in coGraphf$. Si $\mu$ est quel conque, il existe un réseau $\{\mu_\alpha\}$ de mesures discrètes convergeant vers $\mu$. Comme $\Psi(\mu_\alpha) \in coGraphf$, il suit que $\Psi(\mu) \in \overline{co}Graphf$. D'ou $\Psi(\mathcal{M}^1(K)) = \overline{co}Graphf$ .
De la proposition 1.9 (vi) il s'ensuite que $(x, \hat{f}(x)) \in \overline{co}Graphf = \Psi(\mathcal{M}^1(K))$,
il existe donc $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ tel que $\Psi(\mu) = (x, \hat{f}(x))$ soit $x_\mu = x$ et $\mu(f) = \hat{f}(x)$, ce qui implique que $\hat{f}(x) \geq inf\{\mu(f), \mu \in \mathcal{M}^1(K)$ et $x_\mu = x\}$.

Pour prouver (i) il reste et montrer que $\hat{f}(x) \leq \inf\{\mu(f), \mu \in \mathcal{M}^1(K)$ et $x_\mu = x\}$. Supposons d'abord $\mu$ discret, $\mu = \sum \lambda_i \delta_{x_i}$. et $x = \sum \lambda_i x_i$, Pour tout un $\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha \leq f$, on $\mu(f) \geq \mu(\alpha) = \sum \lambda_i \delta_{x_i}(\alpha) = \sum \lambda_i \alpha(x_i) = \alpha(x)$ donc $\mu(f) \geq \hat{f}(x)$.
Supposons maintenant que $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, avec $x_\mu = x$, soit quelconque. D'après la proposition 1.12, il existe un net $\{\mu_\alpha\}$ convergeant vers $\mu$, $\mu_\alpha$ discret avec $x_{\mu_\alpha} = x$. Puisque $\mu_\alpha(f) \geq \hat{f}(x)$, il suit que $\mu(f) \geq \hat{f}(x)$ et donc $\hat{f} \leq inf\{\mu(f), \mu \in \mathcal{M}^1(K)$ et $x_\mu = x\}$.
Donc (i) est prouvé. De (i) et de la proposition 1.12, (ii) suit a la fois. $\square$

**Définition 1.36.** [22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Dénoter par

$$S = \{f \in C(K) : f \text{ est concave sur } K\}.$$

Pour $f \in S$ définir $K_f$ L'ensemble bordant de $f$, par

$$K_f = \{x \in K : \ f(x) - \hat{f}(x) = 0\}.$$

Une famille $F \subset S$ est dite séparée par convexité $K$ si, pour tout $x_1, x_2 \in K, x_1 \neq x_2$, il existe $f \in F$ tel que $f$ n'est pas affine sur $[x_1, x_2]$.

Nous avons la caractérisation suivante des points extrêmes de $K$.

**Théorème 1.14.** *[22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Alors $extK \subset K$, pour tout $f \in S$, et pour toute famille $F$ dont la convexité sépare $K$ nous avons*

$$extK = \bigcap \{K_f,\ f \in F\}$$

*De plus, toute la convexité $S$ sépare $K$, et donc $extK = \bigcap\{K_f,\ f \in F\}$.*

**Preuve** Soit $x \in extK$ et $f \in S$. D'après la proposition 1.13, il existe un réseau $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}^1(K)$, avec $x_{\mu_\alpha} = x$, tel que $\mu_\alpha(f)$ converge vers $\hat{f}(x)$. Puisque $x$ est extrême, $x_{\mu_\alpha} = x$ implique $\mu_\alpha = \delta_c$ et donc $\mu_\alpha(f) = f(x) = \hat{f}(x)$. D'ou $x \in K_f$ et, comme $x \in extK$ est arbitraire, nous avons $extK \subset K$. Supposons maintenant que $F$ sépare strictement $S$ et que $extK$ soit strictement contenu dans l'ensemble $\bigcap\{K_f, f \in F\}$. Alors il existe $x \in \bigcap\{K_f, f \in F\}$ tel que $x \notin extK$. Soit $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $x_1$, $x_2 \in K$,$x_1 \neq x_2$. Soit $f \in F$ non affine sur $[x_1,\ x_2]$, on a $f(x) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geq \lambda \hat{f}(x_1) + (1-\lambda)\hat{f}(x_2) \geq \hat{f}(x)$.
et donc $x \notin K_f$, une contradiction qui prouve que $\bigcap\{K_f,f \in F\} \subset extK$.
Comme, pour tout $f \in S$, $extK \subset K_f$ on a $extK = \bigcap\{K_f,\ f \in F\} \subset extK$. Pour prouver que $S$ sépare $K$ de manière convexe, soit $x_1$, $x_2 \in K$, $x_1 \neq x_2$. soit $\ell \in \mathcal{A}$ tel que $\ell(x_1) \neq \ell(x_2)$. Alors $-\ell^2$ est dans $S$ et n'est pas affine sur $[x_1,\ x_2]$. □

**Théorème 1.15.** *[22] Soit $E$ un espace L.C.H et soit $K \subset E$ compact et convexe. Supposons qu'il existe un $f \subset S$ strictement concave. Alors $extK = K_f$ est un $G_\delta$ sous-ensemble de $K$, aussi est le complément d'un ensemble convexe. De plus, si $K$ est métrisable, la fonction strictement concave $f \in S$ existe.*

**Preuve** Soit $f \in S$ strictement concave. Clairement $f$ sépare de manière convexe les points de $K$, et donc du théorème précédent, nous avons $extK = K_f$. Pour voir que $extK$ est un sous-ensemble $G_\delta$ de $K$, observez que comme $\hat{f}$ est (s.c.i) et convexe et

$f$ est continue et concave, la fonction $f - \hat{f}$ est (s.c.s). et concave sur $K$. L'ensemble $\{x \in K :\ f(x) - \hat{f}(x) \geq \frac{1}{n}\}$ est fermé et convexe. Cela implique que

$$extK = \{x \in K :\ f(x) - \hat{f}(x) = 0\} = \bigcap \{x \in K :\ f(x) - \hat{f}(x) < \frac{1}{n}\}.$$

Donc $extK$ est un sous-ensemble $G_\delta$ de $K$ et, de plus, $extK$ est le complément du l'ensemble convexe $\bigcup \{x \in K :\ f(x) - \hat{f}(x) \geq \frac{1}{n}\}$.
Supposons maintenant que $K$ soit métrisable. Comme $K$ est également compact, il s'ensuite que $K$ et donc $C(K)$ est séparable. Soit $\{\ell_n\} \subset E^*, \|\ell_n\| = 1$ une séquence séparant les points de $K$. Soit $f : E \to R$ défini par $f(x) = -\sum < \ell_n, v >^2 /2^n$. Puisque la fonction réelle $x \to x^2$ est convexe, on a que $f$ est concave. Pour voir que $f$ est notons que $< \ell_n,\ \lambda v + (1-\lambda)w >^2 = \lambda < \ell_n,\ v >^2 + (1-\lambda) < \ell_n,\ w >^2$ si et seulement si $\ell_n(v) = \ell_n(w)$. Par conséquent

$$\sum \frac{< \ell_n,\ \lambda v + (1-\lambda)w >^2}{2^n} = \sum \frac{\lambda < \ell_n,\ v >^2 + (1-\lambda) < \ell_n,\ w >^2}{2^n}$$

ce qui implique que $\ell_n(v) = \ell_n(w)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\{\ell_n\}$ sépare les points de $K$, il s'ensuite que $v = w$. Donc $f$ est strictement concave. $\square$

Nous appliquons maintenant cette théorie aux fonctions a valeurs multiples (voir aussi Castaing Valadier [10]). Soit $E$ un espace de Banach réel séparable réflexif et supposons que $F : I \times B(x_0, r) \to \mathcal{H}^c(E)$ satisfait l'hypothèse (1.2). Notons $E_\tau$ l'espace doté de la topologie faible $\vartheta(E, E^*)$ pa $E$ et soit $I \times B(x_0,r) \times E_\tau$ doté de la topologie induite par $\mathbb{R} \times E \times E_\tau$.

**Définition 1.37.** [22] Soit $\{\ell_n\} \in E^*)$, $\|\ell_n\| = 1$ une suite séparant les points de $E$. Définissez $f : I \times B(x_0,r) \times E_\tau \to \mathbb{R}$ par :

$$f(t,x,V) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{< \ell_n,\ v >^2}{2^n}.$$

Il est immédiat de prouver que $f$ est continue et $f(t, x, .)$ est strictement concave.

**Définition 1.38.** [22] Soit $\hat{f} : GraphF \subset I \times B(x_0,r) \times E_\tau \to \mathbb{R}$ défini par :

$$\hat{f}(t,x,v) = \sup\{\alpha(v) : \alpha \in \mathcal{A},\ \alpha(u) \leq f(t,x,u) \text{ pour tout } u \in F(t,x)\}.$$

**Proposistion 1.14.** La fonction $\hat{f} : GraphF \subset I \times B(x_0, r) \times E_\tau \to \mathbb{R}$ a les propriétés suivantes :

(i) $\hat{f}(t, x, .)$ est convexe sur $F(t, x)$.

(ii) $\hat{f}$ est (s.c.i).

**Preuve** (i) est prouvée dans la proposition (1.11) (i).Pour prouver (ii) soit $\varepsilon > 0$ et soit $\{t_\alpha, x_\alpha, v_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $(t_\alpha, x_\alpha, v_\alpha) \in Graph$F, soit un réseau convergeant vers $(t_0, x_0, v_0)$.Par définition, il existe $\beta \in \mathcal{A}$ tel que $\beta(v_0) \geq f(t_0, x_0, v_0) - \varepsilon$ et $\beta(u) \leq f(t_0, x_0, u)$ pour tout $u \in F(t_0, x_0)$. Comme $f$ est continue, $F$ est continue au sense de Hausdorff et $\|F\| < M$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - t_0| < \delta$, $\|x - x_0\| < \delta$ nous avons $\beta(v) - \varepsilon \geq f(t, x, v)$ pour tout $v \in F(t,x)$. a partir de cela et de la définition de $\hat{f}$ on a que, pour tout $\alpha \succ \alpha_0$, on a $\beta(v_\alpha) - \varepsilon \geq \hat{f}(t_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)$. Comme $\beta(v_\alpha)$ converge vers $\beta(v_0)$, pour tout $\alpha \succ \alpha_1 \succ \alpha_2$, nous avons

$$\hat{f}(t_\alpha, x_\alpha, v_\alpha) \geq \beta(v_\alpha) - \varepsilon \geq \beta(v_0) - 2\varepsilon \geq \hat{f}(t_0, x_0, v_0) - 3\varepsilon$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la preuve est complété. $\square$

**Définition 1.39.** (**La fonction de choquet**)[22] Soit $F$ satisfait (1.2). la fonction de choquet $\Phi : I \times B(x_0, r) \times E_\tau \to [-\infty, +\infty[$, associe a $F$, est définie par

$$\Phi(t,x,v) = \begin{cases} f(t,x,v) - \hat{f}(t,x,v) & \text{si } v \in F(t,x) \\ -\infty & \text{si } v \notin F(t,x). \end{cases}$$

La proposition suivante résume les principales propriétés de $\Phi$.

**Proposistion 1.15.** Soit $F$ satisfaire (1.2). Alors la fonction Choquet $\Phi$ a les propriétés suivantes :

(i) $0 < \Phi(t,x,v) \leq M^2$ pour tout $(t,x,v) \in grapheF$.

(ii) $\Phi(t,x,v) = 0$ si et seulement si $v \in extF(t,x)$.

(iii) la fonction $\Phi(t,x,.)$ est strictement concave sur $F(t, x)$.

(iv) la fonction $\Phi$ est (s.c.s) sur $I \times B(x_0,r) \times E_\tau$.

(v) pour tout $x \in \mathcal{M}_F$ la fonction $\Phi(t, x(t), \dot{x}(t))$ est mesurable sur $I$.

(vi) si $\{x_n\} \subset \mathcal{M}_F$ converge vers $x$ alors

$$\limsup \int_I \Phi(t,x_n(t),\dot{x}_n(t))\ dt \leq \int_I \Phi(t,x(t),\dot{x}(t))\ dt.$$

**Preuve** La preuve des propriétés (i) - (v) est immédiate. Soit $\{x_n\} \subset \mathcal{M}_F$ convergent vers $x$. pour Prouver (vi) il suffit pour montrer que, pour presque tout $t \in I$ nous avons

$$\limsup \Phi(t,x_n(t),\dot{x}_n(t)) \leq \Phi(t,x(t),\dot{x}(t)).$$

on note $\beta_n(t) = \Phi(t,x_n(t),\dot{x}_n(t))$ et $\beta(t) = \limsup \beta_n(t)$. Par le théorème du Mazur, on a $(\beta(t),\dot{x}(t)) \in \overline{co}\{(\beta_n(t),\dot{x}_n(t)), n \geq k\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in J$, ou $\mu(I \backslash J) = 0$. Définir $\Phi_t(u) = \Phi(t,x(t),u)$ et soit $H_{\Phi_t} = \{(\gamma,v) \in \mathbb{R} \times E_\tau, \gamma \leq \Phi_t(v)\}$ soit le sous-graphe de $H_{\Phi_t}$, Comme $\Phi_t$ (est concave et (s.c.s) $H_{\Phi_t}$, est fermé et convexe. Nous allons prouver que $(\beta(t),\dot{x}(t)) \in H_{\Phi_t}$ p.p, $t \in I$.

Soit $t \in J$ et soit $G$ un voisinage de $H_{\Phi_t}$, Nous prétendons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\beta_n(t),\dot{x}_n(t)) \in G$ pour tout $n > n_0$. Supposons que ne existe pas une sous-suite $\{\beta_{n_k}(t),\dot{x}_{n_k}(t)\}$ telle que $\{\beta_{n_k}(t),\dot{x}_{n_k}(t)\} \notin G$. Comme la suite $\{\dot{x}_n(t)\} \subset E_\tau$ est relativement compact, on peut supposer que $\{\beta_{n_k}(t),\dot{x}_{n_k}(t)\}$ converge vers $(\gamma,u)$, disons. Puisque $\Phi$ est (s.c.s).nous avons

$$\gamma = \lim \beta_{n_k}(t) = \lim \Phi(t,\beta_{n_k}(t),\dot{x}_{n_k}(t)) \leq \Phi(t,x(t),u)$$

d'ou $(\beta(t),u) \in H_{\Phi_t} \subset G$. Alors $(\beta_{n_k}(t),\dot{x}_{n_k}(t)) \in G$ pour un $k$ grand, une contradiction qui prouve la revendication.

Comme $H_{\Phi_t} \subset G$ est fermé et convexe, il s'ensuite que $(\beta(t),\dot{x}(t)) \in \overline{co}\{(\beta_{n_k}(t),\dot{x}_{n_k}(t), k \geq n_0\} \subset G$, ce qui étant $G \supset H_{\Phi_t}$, arbitraire, implique que $(\beta(t),\dot{x}(t)) \in H_{\Phi_t}$, c'est-a-dire

$$\limsup \Phi(t,x_n(t),\dot{x}_n(t)) \leq \Phi(t,x(t),\dot{x}(t)).$$

Comme l'inégalité ci-dessus vaut pour presque tous les $t \in I$, il suit

$$\limsup \int_I \Phi(t,x_n(t),\dot{x}_n(t))\ dt \leq \int_I \Phi(t,x(t),\dot{x}(t))\ dt.$$

Chapitre 2

# Inclusion différentielle sur un espace de Banach séparable

## 2.1 Pour un intérieur non vide

Dans ce qui suit, $E$ est un espace de Banach réflexif séparable. Soit $F$ un multifonction continue définie sur un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R} \times E$ avec des valeurs dans l'espace des sous-ensembles bornés convexes fermés de $E$ avec un intérieur non vide. Nous considérerons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} \in extF(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $extF(t,x)$ désigne l'ensemble des points extrêmes de $F(t,x)$. On remarque que, en général, l'ensemble $extF(t,x)$ n'est pas fermé et la fonction $(t,x) \to extF(t,x)$ n' est pas continue. Avec (2.1), nous considérerons le problème de convexité

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Par exemple de Plis(dans le chapitre precédent), l'ensemble de solutions $\mathcal{M}_{extF}$ de (2.1) est en général, non dense dans l'ensemble de solutions $\mathcal{M}_F$ de (2.2). Cependant, nous montrerons que $\mathcal{M}_{extF}$ est non vide et se rapproche de certains sous-ensembles importants de $\mathcal{M}_F$. Plus spécifiquement, nous doit prouver que, pour toute sélection $f$ de $F$ dans une classe admissible, qui comprend localement les sélections de $\alpha$ -Lipschitz, si l'on note $P_f$, l'ensemble des solutions de problème du Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

alors nous avons que l'ensemble $\mathcal{M}_{extF}$ a une intersection non vide avec chaque quartier de $P_f$.
En dimension finie ce type de résultat d'approximation a été établi par Pianigiani [38], en utilisant la technique d'Antosiewicz et Cellina [1]. Pour des résultats antérieurs voir Filippov [24] et Wazcwski [43].

L'approche utilisée ici est une variante de la méthode des catégories de Baire introduit dans [15], [16], [17] afin de prouver l'existence de solutions pour inclusions différentielles en absence de convexité, dans les espaces de Banach. Nous mentionnons que récemment, cette méthode a été améliorée par Bressan et Colombo [6], qui ont obtenu un théorème d'existence contenant a la fois le théorème d'existence de [17] et théorème de Filippov [25]. Les preuves complétés des résultats de cette section peuvent être trouvé dans [18].

Soit $U$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R} \times E$.

**Définition 2.1.** [21] La mesure de non compacité de Kuratowski $\alpha(\Omega)$ d'un ensemble $\Omega$ est la borne inférieure des nombres $v > 0$ tels que $\Omega$ admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètres inférieur ou égal à $v$.

**Définition 2.2.** [22] Une fonction $f : U \to E$ est dite $\alpha$- Lipschitzienne de constante $k$ ssi est continue et bornée sur $U$, et il existe une constante $k \geq 0$ telle que $\alpha[f(X)] \leq k\alpha[X]$ pour tout ensemble borné $X \subset U$, ou $\alpha$ est l'indice de Kuratowski de non-compacité.

**Définition 2.3.** [22] Une fonction $f : U \to E$ est dite localement Lipschitzienne (resp. Localement $\alpha$-Lipschitzien) si $f$ est bornée (resp. continue et bornée), et pour chaque $(s,u) \in U$ il existe $\delta_{(s,u)} > 0$ et $k_{(s,u)} \geq 0$ tels que f restreint a $B((s,u), \delta_{(s,u)})$ est Lipschitzien (resp.$\alpha$-Lipschitzien) avec $k_{(s,u)}$ constant.

Soit $J = [a,b[$, $a < b$. On note $\mathcal{I}(J)$ la classe de toutes les familles dénombrables $\{J_i\}$ d'intervalles disjoints paire non vides $J_i = [a_i,b_i[$ tels que $\bigcup_i J_i = J$.
$A$ est un membre de $\mathcal{I}(J)$ sera appelé, pour faire court, une partition de $J$.

**Définition 2.4.** [22] Une fonction $f : J \times B(x_0,r) \to E$ est dite localement Lipschitzien par morceaux (resp. Localement $\alpha$-Lipschitzien par morceaux ) si $f$ est borné et qu'il existe un partition $\{J_i\} \in \mathcal{I}(J)$ de $J$ telle que la restriction de $f$ a chaque ensemble $J \times B(x_0,r)$ est localement Lipschitzien (resp.localement $\alpha$-Lipschitzien).

On notera $\pounds(J \times B(x_0,r))$, $\pounds^{\alpha}(J \times B(x_0,r))$ les classes de tous fonctions $f : J \times B(x_0,r) \to E$ qui sont respectivement, localement Lipschitzien par morceaux, localement $\alpha$ -Lipschitzien par morceaux.
Soit $F : I \times B(x_0,r) \to \mathcal{H}^c(E)$ une multifonction, ou $I = [t_0,T[$ et $B(x_0,r) \subset E$ $(r > 0)$.
Nous supposons :

$$(\mathrm{H}_1)\begin{cases} \text{F est Hausdorff continue sur I } \times B(x_0,r) \\ \|F\| < M \text{ et } 0 < T - t_0 < r/M \\ \text{F (t,x) a un intérieur non vide pour tout (t,x) } \in I \times B(x_0,r) \end{cases}$$

Pour $F$ satisfaisant $(H_1)$, soit $\mathcal{M}_F$ l'ensemble de toutes les solutions de (2.2). $\mathcal{M}_F$ doté de la métrique de $C(I,E)$ est un espace métrique complet. Dénoter par

$$\rho_F = \{f \in \pounds(J \times B(x_0,r)) : \text{ f est une sélection de } F\}.$$

$$\rho_F^{\alpha} = \{f \in \pounds^{\alpha}(J \times B(x_0,r)) : \text{ f est une sélection de } F\}.$$

$\rho_F$ est un sous-ensemble non vide de $\rho_F^{\alpha}$. Pour $f \in \rho_F^{\alpha}$ nous posons

$$P_f = \{x : I \to E : x \text{ est un solution de (2.3)}\}.$$

$P_f$ est un sous-ensemble compact non vide de $\mathcal{M}_F$ et, si $f \in \rho_F$, $P_f$ est un singleton.

**Proposistion 2.1.** Soit $F$ satisfait $(H_1)$. Soit $f \in \rho_F^{\alpha}$ et $\eta > 0$. Alors il existe $\rho = \rho_f(\eta) > 0$ tel que

$$x \in \mathcal{M}_F \; et \; \sup_{t\in I} \int_{t_0}^{t} [\dot{x}(s) - f(s,x(s))]ds < \rho \text{ impliquent } \; x \in B(P_f,\eta).$$

**Preuve** Supposons que l'énoncé ne soit pas vrai. Alors il existe $f \in \rho_F^{\alpha}$, $\eta > 0$, et une suite $\{x_n\} \subset \mathcal{M}_F$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t\in I} \| \int_{t_0}^{t} [\dot{x}_n(s) - f(s, x_n(s))] \, ds\| < \frac{1}{n} \text{ } et \text{ } x_n \in B(P_f, \eta).$$

Par un argument standard on prouve que $\alpha\{x_n\} = 0$. D'ou la suite $\{x_n\} \subset C(I,E)$ est compact. Soit $\{x_{n_k}\}$ une sous-suite de $\{x_n\}$ convergeant vers $x$, dire. Comme $x \in P_f$, pour $k$ assez grand, nous avons $\{x_{n_k}\} \in B(P_f, \eta)$, une contradiction. Ceci complété la preuve.□

**Proposistion 2.2.** Soit $G : J \times B(x_0,r) \to \mathcal{M}^c(E)$ un multifonction continue au sense de Hausdorff telle que $intG(t, x) \neq \emptyset$ pour chaque $(t, x) \in J \times B(x_0, r)$, ou $J$ est un intervalle et $B(x_0,r) \subset E$. Supposons que $u_0 \in intG(t, x)$ pour tout $(t,x) \in J \times \tilde{B}(y_0, \delta)$, ou $y_0 \in E$ et $\delta > 0$. Alors il existe une sélection localement Lipschitzienne $g$ de $G$ satisfaisant $g(t, x) = u_0$, pour tout $(t, x) \in J \times \tilde{B}(y_0, \delta)$.

**Preuve** Supposons $s \in J$ et $z \in B(x_0, r)$, $\|z - y_0\| = \delta$. Puisque $u_0 \in intG(s, z)$, et $G$ est continue, il existe une boule $B((s, z), \delta_{s,z}) \subset J \times B(x_0, r)$ telle que $u_0 \in intG(t,x)$ pour tout $(t, x) \in \tilde{B}(y_0, \delta)$. Pour $u_{(s,z)} \in intG(t, x)$ et $z \in B((s, z), \delta_{s,z})$. Notons $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ la famille, dont les membres sont $J \times B(y_0, \delta)$ et chacun des ensembles $B((s, z), \delta_{s,z})$ construits ci-dessus. $\mathcal{U}$ est une couverture ouverte $J \times B(x_0, r)$.

Pour $\{U_\alpha\} \in \mathcal{U}$, l'ensemble $y_\alpha = \begin{cases} u_0 & \text{si } U_\alpha = J \times B(y_0, \delta) \\ u_{s,z} & \text{si } U_\alpha = B((s, z), \delta_{s,z}) \end{cases}$

Soit $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une partition d'unité subordonnée a $\mathcal{U}$ telle que chaque $p_\alpha$ soit localement Lipschitzien. Maintenant, définissez $g : J \times B(x_0, r) \to E$ par

$$g(t, x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha(t,x)y_\alpha$$

Il est simple de vérifier que $g$ est une sélection localement Lipschitzien de $G$ et satisfait $g(t,x) = u_0$ pour tout $(t, x) \in J \times \tilde{B}(y_0, \delta)$. Ceci complété la preuve. □

Soit $F$ satisfaire $(H_1)$. Pour $\theta > 0$ définir

$$\mathcal{M}_\theta = \{x \in \mathcal{M}_F : \int_I \Phi(t, x(t),\dot{x}(t)) \, dt < \theta\}.$$

**Théorème 2.1.** *[22] Soit $F$ satisfaire $(H_1)$. Alors pour tout $\theta > 0$ l'ensemble $\mathcal{M}_\theta$ est ouvert dans $\mathcal{M}_F$.*

**Preuve** Supposons que $\{x_n\} \subset \mathcal{M}_F \backslash \mathcal{M}_\theta$ converge vers $x$. De la proposition 1.15, il s'ensuite que

$$0 \leq \limsup \int_I \Phi(t, x_n(t), \dot{x}_n(t))\ dt \leq \int_I \Phi(t, x(t), \dot{x}(t))\ dt$$

et donc $x \in \mathcal{M}_F \backslash \mathcal{M}_\theta$. Cela prouve que $\mathcal{M}_\theta$ est ouvert dans $\mathcal{M}_F$. □

**Théorème 2.2.** *[22] Soit $F$ satisfaire $(H_1)$. Soit $f \in \rho_F^\alpha, \eta > 0$ et $\theta > 0$. Alors, il existe $g \in \rho_F$ tel que*

$$P_g \in \mathcal{M}_\theta \bigcap B(P_f, \eta). \tag{2.4}$$

La preuve de ce théorème est plutôt technique. Les principales étapes sont les les suivants. Premièrement, $g$ est construit localement avec des valeurs proches de les points extrêmes de $F$ et, en utilisant la proposition 2.2, $g$ est défini sur un ensemble de la forme $I_\delta \times B(x_0, r)$ pour un certain intervalle $I_\delta \subset I$. Par conséquent, $g$ est étendu a l'ensemble entier $I \times B(x_0, r)$ et il est montré que $g$ est dans $\rho_F$ et satisfait (2.4).

**Théorème 2.3.** *[22] Soit $F$ satisfaire $(H_1)$. Alors pour tout $f \in \rho_F^\alpha$ et tout $\eta > 0$ que nous avons :*

$$\mathcal{M}_{extF} \bigcap B(P_f, \eta) \neq \emptyset$$

*En particulier, $\mathcal{M}_{extF}$ est non vide.*

**Preuve** Soit $f \in \rho_F^\alpha$. Soit $\eta > 0$. Mettre $\theta_n = 1/n (n \in \mathbb{N})$. Par le théorème 2.7 il existe un $g_1 \in \rho_F$ tel que $P_{g_1} \in \mathcal{M}_F \cap B(P_f, \eta)$ et donc, pour certains $0 < \eta_1 < \theta_1$ nous avons :

$$\tilde{B}(P_{g_1}, \eta_1) \subset \mathcal{M}_F \bigcap B(P_f, \eta).$$

Par le théorème 2.7 il existe un $g_2 \in \rho_F$ tel que $P_{g_2} \in \mathcal{M}_{\theta_1} \cap B(P_{g_1, \eta_1)}$ Puisque, par le théorème 2.1, cet ensemble est ouvert dans $\mathcal{M}_F$ il existe $0 < \eta_2 < \theta_2$ tel que

$$\tilde{B}(P_{g_2}, \eta_2) \subset \mathcal{M}_{\theta_1} \bigcap B(P_{g_1}, \eta_1)$$

Continuer ainsi donne une suite décroissante des boulles fermées $\tilde{B}(P_{g_n},\eta_n) \subset \mathcal{M}_F$, ou $g_n \in \rho_F$ et $0 < \eta_n < \theta_n$, satisfaisant

$$\tilde{B}(P_{g_{n+1}},\eta_{n+1}) \subset \mathcal{M}_{\theta_n} \bigcap B(P_{g_n},\eta_n)$$

Comme $\mathcal{M}_F$ est complet, selon le théorème d'intersection de Cantor, il y a un (et un seul) point $x$ se trouvant dans toutes les boules $\tilde{B}(P_{g_n},\eta_n)$. Puisque $x$ se trouve dans tous les ensembles $\mathcal{M}_{\theta_n}$, nous avoir

$$\int_I \Phi(t, x(t),\dot{x}(t))\ dt = 0$$

D'ou $\dot{x}(t) \in extF(t, x(t),\dot{x}(t))$ p.p. et donc $x \in \mathcal{M}_{extF}$, comme d'autre part, $x \in \tilde{B}(P_{g_1},\eta_1) \subset B(P_f,\eta)$, la preuve est complété. $\square$

## 2.2 F Compact

Dans cette section, nous considérons les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} \in extF(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

sous des hypothèses compactes sur $F$.

On dit que $F : I \times B(x_0, r) \to \mathcal{H}^c(E)$, $I = [t_0,T]$, satisfait l'hypothèse $(H_2)$ si :

$$(\mathrm{H}_2) \begin{cases} \text{F est Hausdorff continue sur I } \times B(x_0, r) \\ \|F\| < M \text{ et } 0 < T - t_0 < r/M \\ \text{F est compact telle que F(I } \times B(x_0, r)) \text{ est relativement compact sur E} \end{cases}$$

Si $F$ satisfait $(H_2)$ on montre que l'ensemble $\mathcal{M}_{extF}$ de toutes les solutions du problème (2.5) n'est pas vide. Notons d'ailleurs que, comme $extF(t,x)$ n'est pas forcément fermé, le théorème d'existence mentionné ci-dessus est nouveau également en dimension finie, Théoréme de Filippov. En fait, l'existence de solutions au problème (2.5) découle aussitôt d'un résultat de densité qui est d'un intérêt indépendant (voir Théoréme 2.3 ). Ces théorèmes de densité se révèlent utiles. En effet, en les utilisant, il est possible de montrer que sous une condition d'invariance sur le flux, l'inclusion différentielle (2.5) admet une solution périodique qui réglé une question retour a Cellina [11].

Dans ce qui suit, nous esquissons les principales idées de l'approche. Pour le preuves complètes des résultats, ainsi que pour d'autres applications, voir [19].

Soit $J \subset I$ un intervalle fermé a gauche, borné, non dégénéré. Par une partition de $J$ nous entendons une famille finie $\{J_k\}_{k=1}^{n}$ non vide, non dégénéré, laissé fermé et intervalles disjoints par paires dont l'union est $J$. La famille de toutes les partitions de $J$ est noté $\mathcal{I}(J)$.

Étant donné $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}^d$ les ensembles de tous les d-couples ordonnés $h = (h_1 \ ,..., \ h_d)$ d'entiers.

Soit $F$ satisfaire l'hypothèse $(H_2)$. Alors $\mathcal{M}_F$ est un sous-ensemble compact non vide de $C(I, E)$ et ainsi, doté de la métrique de $C(I, E)$, $\mathcal{M}_F$ est un espace métrique complète. Soit $C \subset B(x_0, r)$ tout ensemble convexe compact contenant $x_0 + \bigcup_{t \in I}(t - t_0)F(I \times B(x_0, r))$. Définir l'ensemble

$$\aleph = \{x : I \to C : \ \|\dot{x}(t)\| \leq M \ p.p\}.$$

Clairement $\aleph$ est un sous-ensemble compact de $C(I, E)$ contenant $\mathcal{M}_F$. Enfin, définissons l'ensemble

$$\rho_F = \{f : I \times B_E(x_0, r) \to E : \ \text{f est une sélection continue de } F\}.$$

En vertu du théorème de Michael [35], l'ensemble $\rho_F$ est non vide.

**Définition 2.5.** [22] Soit $F$ satisfaire $(H_2)$. Soit $\ell_i \in E^*$, $\|\ell_i\| = 1$, $i = 1 \ ,.., \ d$. Soit $\{I_k\}_{k=1}^{k_0} \in \mathcal{F}(I)$ et soit $\alpha > 0$. Pour $k = 1 \ ,..., \ k_0$ et $h \in \mathbb{Z}^d$ , $h = (h_1, \ ..., \ h_d)$, définir l'ensemble
$S_k^h = \{(t \ , \ x) \in I \times E \mid t \in I_k, \ h_i\alpha \leq \ell_i(x) - 2Mt < ((h_i + 1)\alpha, \text{ pour chaque } i = 1,...,d\}$.
Réglez $R_k^h = S_k^h \bigcap I \times C$. La famille $\mathcal{R}$ de tous les ensembles non vides $R_k^h$ est appelée une partition de $I \times C$ transversal a $F$ (correspondant a $\{\ell_i\}_{i=1}^{d}$ , $\{I_k\}_{k=1}^{k_0} et \ \alpha$ ).

Clairement, comme $I \times C$ est compact, la famille $\mathcal{R}$ est finie. Nous convenons d'appeler $\alpha$ le pas d'espace $\mathcal{R}$ et, si tous les intervalles $I_k$ ont la même longueur $\beta$, alors on dit que $\beta$ est le pas de temps de $\mathcal{R}$. L'intervalle $I_k$ sera appelé l'intervalle de base de $R_k^h$. Enfin, par norme $v(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ on entend le plus grand diamètre de $R_k^h$ lorsque $R_k^h$ varie de plus de $\mathcal{R}$.

**Lemme 2.1.** *Soit $F$ satisfaie $(H_2)$. Alors pour tout $\lambda > 0$ il existe une partition $\mathcal{R}$ transversal a $F$ (avec pas de temps constant) et norme $v(\mathcal{R}) < \lambda$.*

**Preuve** Soit $\ell_i \in E^*$, $\|\ell_i\| = 1$, dénombrable et dense dans l'unité sphère de $E$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{R}_n = \{R_k^h(n)\}$ la partition de $I \times C$ transversal a $F$, correspondant a $\{\ell_i\}_{i=1}^d$ et $\{I_k\}_{k=1}^{k_0}$, du pas d'espace $\alpha_n$ et du temps étape $\beta_n$, ou $\alpha_n \to 0$ et $\beta_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Nous affirmons qu'il existe $n_0$, pour tout $n > n_0$, nous avons $v(\mathcal{R}_n) < \lambda$. Supposons le contraire. que il existe une suite strictement croissante $n_j \to \infty$ telle que pour certains $R_k^h(n_j) \in \mathcal{R}(n_j)$
nous avons daim$R_k^h(n_j) > \lambda$ . Donc , pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe des points $(t_{n_j},x_{n_j}),(s_{n_j},y_{n_j}) \in R_k^h(n_j)$ tel que

$$\max\{|t_{n_j} - s_{n_j}|, \|x_{n_j} - y_{n_j}\|\} > \frac{\lambda}{2}. \tag{2.7}$$

Par contre, d'après la définition de $R_k^h(n_j)$, on a

$$|\ell_i(x_{n_j} - y_{n_j})| < \alpha_{n_j} + 2M|t_{n_j} - s_{n_j}| < \alpha_{n_j} + 2M\beta_{n_j},\ i = 1, ..., d_{n_j}.$$

Les suites $\{x_{n_j}\}$, $\{y_{n_j}\}$ appartiennent a $C$, un ensemble compact, passant donc a sous-suites (sans changement de notations) nous avons que $x_{n_j} \to x$, $y_{n_j} \to y$ ou $x$, $y \in C$. Soit maintenant $i \in \mathbb{N}$. Pour chaque $d_{n_j} > j$ nous avons

$$\begin{aligned} |\ell_i(x - y)| &\leq |\ell_i(x_{n_j} - y_{n_j})| + |\ell_i((x - x_{n_j}) - (y - y_{n_j})| \\ &< \alpha_{n_j} + 2M\beta_{n_j} + \|x - x_{n_j}\| + \|y - y_{n_j}\| \end{aligned}$$

d'ou, laissant $j \to +\infty$, suit $\ell_i(x - y) = 0$. Puisque $i$ est arbitraire et $\{\ell_i\}$ est dense dans la sphère unitaire de $E^*$, on a $x = y$. Ce contrat (2.3), pour $|t_{n_j} - s_{n_j}| \to 0$ comme $j \to +\infty$. Ceci complété la preuve. $\square$

**Remarque 2.1.** La partition $\mathcal{R}$ dans le lemme précédent peut être supposée avoir pas de temps arbitrairement petit. si $\mathcal{R}$ est une partition satisfaisant le lemme 2.1, avec pas d'espace $\alpha$, pas de temps $\beta$ correspondant a $\{\ell_i\}_{i=1}^d$ et $\{J_r\}_{r=1}^m$, avec la norme $v(\mathcal{R}) < \lambda$, alors la partition $\mathcal{R}$ correspondant a $\{\ell_i\}_{i=1}^d$ et $\{I_k\}_{k=1}^{k_0}$, obtenu en divisant chaque $J_r$ en $n$ parties égales a un pas de temps $\beta' = \beta/n$.

Soit $\mathcal{R} = \{R_k^h\}$ une partition de $I \times C$ transversal a $F$, correspondant a $\{\ell_i\}_{i=1}^d$ et $\{I_k\}_{k=1}^{k_0}$ l'ensemble $K = \{1 \ ,..., \ k_0\}$ et, pour tout $x \in \aleph$, définir

$$K_x = \{k \in K : \text{ il existe } h \in \mathbb{Z}^d \text{ tel que le graphe } x_{I_k} \subset R_k^h\} \tag{2.8}$$

**Lemme 2.2.** *Soit $F$ satisfaire $(H_2)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$. Alors il existe une partition $\mathcal{R} = \{R_k^h\}$ de $I \times C$ transversal a $F$, correspondant a $\{\ell_i\}_{i=1}^d$ et $\{I_k\}_{k=1}^{k_0}$ avec norme $v(\mathcal{R}) < \lambda$, telle que*

$$\mu(\bigcup_{k \in K/K_x} I_k) < \varepsilon|I| \quad \textit{pour tout } x \in \aleph \tag{2.9}$$

**Preuve** Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$. Par le lemme 2.1 et la remarque 2.1 il existe une partition $\mathcal{R}$ transversale a $F$, de norme $v(\mathcal{R}) < \lambda$, correspondant a $\{\ell_i\}_{i=1}^d$ et $\mathcal{F} = \{J_r\}_{r=1}^m$ du pas d'espace $\alpha$ et du pas de temps $\beta_0$, $0 < \beta_0 < \alpha/(3M)$. Soit $n > \max\{\beta_0/\varepsilon|I| \ , d/\varepsilon\}$. En divisant chaque $J_r$ en $n$ parties égales, on obtient une partition $\mathcal{R}'$ de $I \times C$ transversale a $F$, correspondant a $\{\ell_i\}_{i=1}^d$ et $\mathcal{F}' = \{I_k\}_{k=1}^{k_0}(k_0 = nm)$ du pas d'espace $\alpha$ et du pas de temps $\beta = \beta_0/n$.

Soit $x \in \aleph$ un quelconque. Pour $i = 1 \ ,.., \ d$ et $t \in C$, définir $\psi_i(t) = \ell_i(x(t)) - 2Mt$ et observez que $-M > \dot{\psi}_i(t) > -3M$ p.p. Soit $t_r \ , t_{r+1}(t_r < t_{r+1})$ les points d'extrémité de $J_r \in \mathcal{F}$. Pour certains $\tilde{h} \in \mathbb{Z}^d, \tilde{h} = (\tilde{h_1} \ ,..., \ \tilde{h_d})$ on a $(t_r, x(t_r)) \in R_k^{\tilde{h}}$.
Donc

$$\tilde{h}_i\alpha \leq \psi_i(t_r) < (\tilde{h}_i + 1)\alpha \ , \ i = 1 \ ,..., \ d \tag{2.10}$$

Puisque $\dot{\psi}_i(t) > -3M$ p.p. nous avons

$$\psi_i(t) \geq \psi_i(t_r) - 3M(t - t_r) \geq \tilde{h}_i\alpha - 3M\beta_0 > (\tilde{h}_i - 1)\alpha, \, t \in J_r = 1 \ ,...., \ d. \tag{2.11}$$

Comme $\psi_i$ est strictement décroissant et continue, pour chaque $i = 1 \ ,..., \ d$ il existe au plus un point $\tau_i \in J_r$ tel que $\psi_i(\tau_i) = \tilde{h}_i\alpha$. De (2.10) et (2.11) nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{h}_i\alpha < \psi_i(t) < (\tilde{h}_i + 1)\alpha. \quad & t < \tau_i, \, t \in J_r \\ (\tilde{h}_i - 1)\alpha < \psi_i(t) < \tilde{h}_i\alpha. \quad & t > \tau_i, \, t \in J_r \end{aligned}$$

Donc, si un intervalle $I_k \subset J_r$ ne contient pas de points $\tau_i$, alors pour certains $h \in \mathbb{Z}^d$ nous avons

$$\textit{graphe } x_{I_k} \subset R_k^h \tag{2.12}$$

Comme les intervalles $I_k \in \mathcal{F}'$ contenant un certain point $\tau_i$ sont au plus $d$, nous avons cela dans chaque $J_r \in \mathcal{F}$ y a-t-il au plus d intervalles $I_k \in \mathcal{F}'$ pour lequel (2.12) échoue. Depuis les intervalles $J_r \in \mathcal{F}$ sont $m$, il existe au plus d m intervalles $I_k \in \mathcal{F}'$ Pour que (2.12) échoue. Par conséquent

$$\sum_{k \in K \setminus K_x} |I_k| \leq dm|I_k| < dm|I|/k_0 < \varepsilon|I|.$$

Comme $x \in \aleph$ est arbitraire, la preuve est complète. □

Soit $\mathcal{R} = \{R_k^h\}$ une partition de $I \times C$ transversal a $F$, correspondant a $\{\ell_i\}_{i=1}^d$ et $\{I_k\}_{k=1}^{k_0}$ du pas d'espace $\alpha$ et du pas de temps $\beta$. Ensuite, pour chaque $R_k^h \in \mathcal{R}$, définissez

$$R_{k,j}^h = S_{k,j}^h \bigcap (I \times C) \; j = i, ...., P$$

ou $S_{k,j} = S_k^h \bigcap (J_j \times E)$ et $\{J_j\}_{j=1}^p \in \mathcal{F}(I_k)$ ($J_i$ et p dépendant de $R_k^h$). On note $\mathcal{R}'$ l'ensemble de tous les $R_{k,j}^h$ non vides.

**Remarque 2.2.** La signification géométrique du lemme 2.2 est que, pour tout $x \in \aleph$, le point $(t, x(t))$, $t \in I$, ne rencontre la limite de certains $S_k^h$ que pour un nombre fini de $t$. De manière analogue, le point $(t, x(t))$, $t \in I$, ne rencontre la limite de certains $S_{k,j}^h$ que pour infiniment nombreux $t$.

Soit $F$ satisfaire $(H_2)$. Pour $\theta > 0$, définissez

$$\mathcal{M}_\theta = \{x \in \mathcal{M}_F : \int_I \Phi(t, x(t), \dot{x}(t)) \; dt < \theta\}.$$

La proposition 2.1 et le théorème 2.1 suivants peuvent être prouvés dans le même comme la proposition 2.1 et le théorème 2.1.

**Proposistion 2.3.** [22] Soit $F$ satisfaire $(H_2)$. Soit $f \in \rho_F$ et $\eta > 0$. Alors il existe $\delta = \delta_f(\eta) > 0$, tel que

$$x \in \mathcal{M}_F \text{ et } \sup_{t \in I} \| \int_{t_0}^t [\dot{x}(s) - f(s, x(s))] \; ds \| < \delta \text{ implique } x \in B(P_f, \eta) \tag{2.13}$$

**Théorème 2.4.** *[22] Soit $F$ satisfaire $(H_2)$. Alors, pour tout $\theta > 0$, l'ensemble $\mathcal{M}_\theta$ est ouvert dans $\mathcal{M}_F$.*

**Théorème 2.5.** *[22] Soit $F$ satisfaire $(H_2)$. Soit $f \in \rho_F$, Soit $\delta > 0$ et $\theta > 0$. Puis il existe une fonction $g \in \rho_F$ telle que, pour tout $x \in \aleph$, on a*

$$\int_I \Phi(t, x(t), g(t,x))\, dt < \theta. \tag{2.14}$$

$$\sup_{t \in I} \| \int_{t_0}^{t} [g(s,x(s)) - f(s,x(s))]\, ds \| < \delta. \tag{2.15}$$

La preuve de ce théorème est plutôt technique. Les principales étapes sont les suivants. On définit d'abord une partition $\mathcal{R}$ transversale a $F$ et en utilisant une telle partition, nous approximer $f$ localement par des fonctions prenant des valeurs proches de les points extrêmes de $F$. Donc définit un raffinement $\mathcal{R}' = \{R^h_{k,j}\}$ de $\mathcal{R}$ et construit un sélection appropriée $\gamma$ de $F$, dont la restriction a chaque ensemble $R^h_{k,j}$ est continue, telle que (2.14) et (2.15) sont satisfaits de $\gamma$ a la place de $g$. Enfin nous montrons que il existe une sélection continue $g$ de $F$, qui est proche de $\gamma$ et satisfait (2.14) et (2.15).

**Théorème 2.6.** *Soit $F$ satisfaire $(H_2)$. Soit $f \in \rho_F$, $\eta > 0$ et $\theta > 0$. Alors il existe $g \in \rho_F$ tel que*

$$P_g \subset \mathcal{M}_\theta \bigcap B(P_f, r).$$

**Preuve** Soit $f \in \rho_F$, $\eta > 0$ et $\theta > 0$. Par la proposition 2.3, il existe $\delta > 0$ tel que (2.13) est satisfait. D'après le théorème 2.5, il existe $g \in \rho_F$ tel que, pour tout $x \in \aleph$, (2.14) et (2.15) sont satisfaits. Soit maintenant $x \in P_g$ arbitraire. Comme $\dot{x}(t) = g(t,x(t))$, (2.15) et (2.13) impliquent $x \in B(P_f, r)$. De plus, a partir de (2.14), nous avons que $x \in \mathcal{M}_\theta$. D'ou $x \in \mathcal{M}_\theta \bigcap B(P_f, r)$, qui complété la démonstration. □

**Théorème 2.7.** *Soit $F$ satisfaire $(H_2)$. Soit $f \in \rho_F$ et $\varepsilon > 0$. ensuite*

$$\mathcal{M}_{extF} \bigcap B(P_f, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

*ainsi, en particulier, le problème de Cauchy (2.5) a des solutions.*

**Preuve** A l'aide des théorèmes 2.4 et 2.6 on construit une suite d'ensembles fermés non vides $\tilde{B}(P_{g_n}, \eta_n) \subset B(P_f\ , \varepsilon) \subset \mathcal{M}_F$, ou $g_n \in \rho_F$, $0 < \eta_n < \theta_n = 1/n$, tel que

$$\tilde{B}(P_{g_{n+1}}, \eta_{n+1}) \subset \mathcal{M}_{\theta_n} \bigcap B(P_{g_n}, \eta_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\mathcal{M}_F$ est compact, nous avons

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \tilde{B}(P_{g_n}\ ,\ \eta_n) \neq \emptyset.$$

Soit $x$ appartenir a cet ensemble. Comme $x \in \mathcal{M}_{\theta_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\int_I \Phi(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = 0$. Par conséquent, $\dot{x}(t) \in extF(t, x(t))$, p.p. $t \in I$ et donc $x \in \mathcal{M}_{extF}$. De plus $x \in B(P_f, \varepsilon)$, et donc la preuve est complété. $\square$

Chapitre 3

# Extensions et applications

Dans ce chapitre on va etudier l'existence des soulutions d'inclusion différentielles dans le cas ou la miltivoque $F$ est carathedory puis nous avons faisons quelque applications.

## 3.1 F Caratheodory

Dans ce qui suit, nous retenons les notations de ce chapitre. Comme d'habitude, nous disons que $F : I \times B(x_0, r) \to \mathcal{H}^c(E)$ est Caratheodory si $F(t,.)$ est Hausdorff continue sur $B(x_0, r)$ pour tout $t \in I$, et $F(., x)$ est mesurable sur $I$ pour tout $x \in B(x_0, r)$. nous considérez les problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} \in extF(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

On dit que $F : I \times B(x_0, r) \to \mathcal{H}^c(E)$, $I = [t_0,T]$, satisfait l'hypothèse $(H_2')$ si :

$$(H_2') \begin{cases} F \ est \ Caratheodory \\ \|F\| \leq M \ et \ 0 < T - t_0 < r/M \\ F \ est \ compact, \ c'est \ a \ dire \ que \ F(I \times B(x_0, r)) \ est \ relativement \ compact \ dans \ E. \end{cases}$$

Pour $F$ satisfaisant $(H_2')$ on pose

$\rho_F' = \{f : I \times B(x_0, r) \to E : f \textit{ est une sélection Carathcodory de } F\}$. Pour tout $f \in \rho_F'$ notons $P_f$ l'ensemble des solutions du problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. On note que, si $F$ satisfait $(H_2')$, toutes les propriétés, sauf (iv), de la fonction de Choquet énoncée dans la proposition 1.15 restent valides.

**Théorème 3.1.** *Soit $F$ satisfait $(H_2')$. Soit $f \in \rho_F'$. Soit $\delta > 0$ et $\theta > 0$. Alors il existe une fonction $g \in \rho_F'$ de sorte que, pour tout $x \in \aleph$, on a*

$$\int_I \Phi(t,x(t),g(t,x))\ dt < \theta \tag{3.3}$$

$$\sup_{t\in I} \| \int_{t_0}^{t} [g(s,x(s)) - f(s, x(s))]\ ds \| < \delta \tag{3.4}$$

**Preuve** Soit $f \in \rho_F'$, $\delta > 0$ et $\theta > 0$. Par le théorème de Scorza Dragoni, il existe un ensemble compact non vide $J \subset I$, avec

$$\mu(I \backslash J) < \min\{\frac{\theta}{2M^2}, \frac{\delta}{8M}\}$$

tel que les restrictions de $f$ et $F$ a $J \times B(x_0,r)$ sont continues. Puis, par un version multivaluée du théorème de Dugundji [2], il existe une multifonction continue $\tilde{F} : I \times B(x_0, r) \to \mathcal{H}^c(E)$, avec des valeurs contenues dans $\overline{co}F(I \times B(x_0, r))$, tel que $F(t, x) = \tilde{F}(t,x)$ pour tout $(t, x) \in J \times B(x_0, r)$. Par le théorème de Michael, il existe une sélection continue $\tilde{f} : I \times B(x_0, r) \to E$ de $\tilde{F}$ telle que $\tilde{f}(t, x) = f(t,x)$ pour tout $(t, x) \in J \times B(x_0, r)$.

Observez que $\mathcal{M}_{\tilde{F}} \subset \aleph$. Comme $\tilde{F}$ satisfait $(H_2)$ et $\tilde{f} \in \rho_{\tilde{F}}$, par le théorème 2.5, il existe $\tilde{g} \in \rho_{\tilde{F}}$ tel que, pour tout $x \in \aleph$, on a

$$\int_I \tilde{\Phi}(t,x(t), \tilde{g}(t,x(t)))\ dt < \frac{\theta}{2} \tag{3.5}$$

$$\sup_{t\in I} \| \int_{t_0}^{t} [\tilde{g}(s,x(s)) - \tilde{f}(s, x(s))]\ ds \| < \frac{\delta}{2} \tag{3.6}$$

ou $\tilde{\Phi}$ est la fonction de choquet relative a $\tilde{F}$. telque $\tilde{g} \in \rho_{\tilde{F}}$ et $\tilde{F}(t, x) = F(t, x)$ pour tout $(t, x) \in J \times B(x_0, r)$, il existe $g \in \rho_F'$ tel que $g(t,x) = \tilde{g}(t, x)$ pour tout $(t, x) \in J \times B(x_0, r)$.

Nous affirmons que, pour un tel $g$, (3.3) et (3.4) sont satisfaits. Soit $x \in P_g$ n'importe lequel. Pour tout $t \in J$ on a
$\tilde{F}(t,x(t)) = F(t,x(t))$, $g(t,x(t)) = \tilde{g}(t,x(t))$ et $\Phi(t,x(t),\tilde{g}(t,x(t))) = \Phi(t,x(t),g(t,x(t)))$.

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_I \Phi(t,x(t),g(t,x(t)))\,dt &\leq \int_I \tilde{\Phi}(t,x(t),\tilde{g}(t,x(t)))\,dt\\ &+ \int_{I\setminus J} |\Phi(t,x(t),g(t,x(t))) - \tilde{\Phi}(t,x(t),\tilde{g}(t,x(t)))|\,dt\\ &< \theta/2 + M^2\mu(I\setminus J)\\ &< \theta\end{aligned}$$

pour $\mu(I\setminus J) < \theta/2M^2$, et donc $x$ satisfait (3.3).

Pour montrer que (3.4) est egalement satisfait, observez pour tout $t \in J$, nous avons $g(t,x(t)) = \tilde{g}(t,x(t))$ et $f(t,x(t)) = \tilde{f}(t,x(t))$. Il s'ensuit que, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|\int_{t_0}^{t}[g(s,x(s) - f(s,x(s))]ds\| &\leq \|\int_{t_0}^{t}[\tilde{g}(s,x(s) - \tilde{f}(s,x(s))]ds\|\\ &+ \int_{I\setminus J}\|g(s,x(s) - \tilde{g}(s,x(s))\|\\ &+ \|\tilde{f}(s,x(s) - f(s,x(s))\|ds\\ &< \delta/2 + 4M\mu(I\setminus J).\end{aligned}$$

Comme $\mu(I\setminus J) < \delta/8M$, la preuve est complete. □

Avec l'aide du théoréme 3.1, en utilisant le méme argument du théoréme 2.7, on peut prouver ce qui suit.

**Théorème 3.2.** *[22] Soit $F$ satisfaire $(H_2')$. Soit $f \in \rho_F'$ et $\varepsilon > 0$. Alors*

$$\mathcal{M}_{extF} \bigcap B(P_f, \varepsilon) \neq \emptyset$$

*ainsi, en particulier, le probléme de Cauchy (3.1) a des solutions.*

## 3.2 Quelques Applications

Dans ce qui suit, nous présentons deux applications des résultats précédents. La premiére concerne les solutions périodiques d'inclusions différentielles sous un hypothése invariante sur le flux. La deuxiéme est une caractérisation de la convexité pour multifonctions compactes.

Soit $X_0 \subset E$ compact et convexe. Pour $u \in X_0$ on considérons le probléme de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) \\ x(t_0) = u \end{cases} \quad (3.7)$$

Supposons que $F$ satisfait $(H_2')$, avec $X_0$ au lieu de $x_0$, c'est-a-dire

$$(H_2') \begin{cases} F \text{ est Caratheodory} \\ \|F\| \leq M \text{ et } 0 < T - t_0 < r/M \\ F \text{ est compact, c'est a dire que } F(I \times B(x_0\ ,\ r)) \text{ est relativement compact dans } E. \end{cases}$$

l'ensemble $\mathcal{M}_F = \{x \in C(I,E) : x \text{ solution de } (3.7) \text{ pour certains } u \in X_0\}$ et définissez de manière analogue $\mathcal{M}_{extF}$ et $P_f$.

Pour $t \in [t_0, T]$ et $u \in X_0$, définissez les ensembles joignable au temps $t$, $\mathcal{R}_F(u,t)$ et $\mathcal{R}_{extF}(u,t)$ par :

$$\mathcal{R}_F(u,t) = \{x(t) : \ x \text{ solution de } \dot{x} \in F(t,x),\ x(t_0) = u\},$$

$$\mathcal{R}_{extF}(u\ ,\ t) = \{x(t) : \ x \text{ solution de } \dot{x} \in extF(t,x),\ x(t_0) = u\}$$

Pour $\tau \in ]t_0, T]$ on considère le probléme de l'existence des points fixes pour le mappage $u \to \mathcal{R}_{extF}$ ou, équivalent a l'existence de solutions pour le probléme de valeur limite $\dot{x} \in extF(t,x)$, $x(t_0) = x(\tau)$.

**Théorème 3.3.** *Soit $F$ satisfaire $(H_2')$. S'il existe $\tau \in ]t_0, T]$ tel que $\mathcal{R}_F(u,\tau) \subset X_0$ pour tout $u \in X_0$, alors le probléme des valeurs aux limites*

$$\begin{cases} \dot{x} \in extF(t,x) \\ x(t_0) = x(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

*a au moins une solution.*

**Preuve** Nous prouvons d'abord que pour tout $f \in \rho_F'$ le probléme de la valeur aux limites

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x(\tau) \end{cases} \quad (3.9)$$

a au moins une solution. En effet, par le théorème de Scorza Dragoni, il existe une suite $\{I_n\}$ d'ensembles compacts non vides $I_n \subset I$, $I_n \subset I_{n+1}$ avec $\mu(I \backslash I_n) \to 0$, de sorte que la restriction de $f$ a $I_n \times B(X_0, r)$ soit continue. Pour chaque $n$, soit $f_n : I \times B(X_0, r) \to E$ une fonction localement Lipschitzien, avec des valeurs dans $\overline{co}F(I \times B(X_0, r))$, tel que

$$sup\{\|f_n(t, x) - f(t, x)\| : \ (t, x) \in I_n \times B(X_0, r)\} < 1/n.$$

Comme $\mathcal{R}_F(X_0, \tau) \subset X_0$, on voit facilement que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $n_\varepsilon$ tel que, pour tout $n > n_\varepsilon$, $\mathcal{R}_{f_n}(X_0, \tau) \subset B(X_0, \varepsilon)$. Soit $\{f_{n_k}\}$ une sous-suite de $\{f_n\}$ tel que, $\mathcal{R}_{f_{n_k}}(X_0, \tau) \subset B(X_0, \frac{1}{k})$, $k \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème de Kakutani-Ky Fan, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la multifonction $u \to X_0 \bigcap \tilde{B}(\mathcal{R}_{f_n}(u, \tau), \frac{1}{k})$ de $X_0$ dans le les sous-ensembles convexes compacts non vides de $X_0$ ont un point $u_k$. Il existe donc un solution $x_k$ de S

$$\begin{cases} x' = f_{n_k}(t, x) \\ x(t_0) = u_k \end{cases} \quad (3.10)$$

telle que $\|x_k(\tau) - x_k(t_0)\| < 1/k$. Puisque $\{x_k\}$ est compact, une sous-suite, disons $\{x_k\}$, converge vers quelque $x \in \mathcal{M}_F$. Clairement $x(\tau) = x(t_0) \in X_0$ et $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ p.p $t \in I$ . Comme dans la démonstration du théorème 2.3 on construire une suite décroissante d'ensembles compacts non vides $\tilde{B}(P_{g_n},\eta_n) \subset \mathcal{M}_F$, ou $g_n \in \rho'_F$, $0 < \eta_n < \theta_n = 1/n$, tel que

$$\tilde{B}(P_{g_{n+1}},\eta_{n+1}) \subset \mathcal{M}_{\theta_n} \bigcap B(P_{g_n},\eta_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Pour chaque $n$, le probléme de la valeur limite

$$\begin{cases} x' = g_n(t,x) \\ x(t_0) = x(\tau) \end{cases} \quad (3.11)$$

a au moins une solution, disons $x_n$. Puisque $\{x_n\}$ est compact, une sous-suite converge vers $x \in \mathcal{M}_F$, qui satisfait $x(t_0) = x(\tau)$. Comme $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{B}(P_{g_n},\eta_n)$, il s'ensuite que $x \in \mathcal{M}_{extF}$. la preuve est terminé. $\square$

**Remarque 3.1.** L'ensemble $\mathcal{R}_{extF}(u, \tau)$ n'est, en général, ni fermé ni convexe. cependant la multifonction $u \to \mathcal{R}_{extF}(u, \tau)$ de $X_0$ dans les sous-ensembles de $X_0$ a au moins un point fixe. Pour le multifonction $u \to \mathcal{R}_F(u,\ \tau)$, ou $F$ est Hausdorff continue (ou semi-continue supérieure) avec des valeurs convexes compactes la l'existence d'un point fixe a été prouvée par Cellina [7] avec une méthode d'approximation qui n'est pas valide dans nos hypothèses. Nous remarquons, enfin, que le théorème 3.3 n'est pas valide, dans l'hypothèse $(H_2')$, on substitue "$F$ est Hausdorff continue " avec " $F$ est semi-continue supérieur".

Soit $G : I \times B(x_0, r) \to \mathcal{H}^c(E)$ satisfait $(H_2')$. Considérons le probléme de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} \in G(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Soit $\mathcal{M}_G$ l'ensemble de toutes les solutions de (3.14) sur le intervalle $[t_0, T]$. Pour $t \in [t_0, T]$ définir $\mathcal{R}_G(x_0, t) = \{x(t) : \ x \in \mathcal{M}_G\}$. Depuis $G$ satisfait $(H_2')$, d'après le théorème de Milman, on a $\overline{co}G(x, t) \supset G(x, t) \supset ext\overline{co}G(x, t)$ ce qui implique $\mathcal{R}_{\overline{co}G}(x_0, t) \supset \mathcal{R}_G(x_0, t) \supset \mathcal{R}_{ext\overline{co}G}(x_0, t)$.

Si, de plus, $G$ est a valeur convexe, alors par la proposition 2.1 l'ensemble $\mathcal{M}_G$ est fermé et donc aussi $\mathcal{R}_G(x_0, t)$. Nous allons montrer que l'inverse la déclaration tient.

**Théorème 3.4.** *Soit $G : I \times B(x_0, r) \to \mathcal{H}(E)$ satisfait $(H_2')$. Puis le suivant les déclarations sont équivalentes :*

*(i)* $\mathcal{M}_G$ *dans* $C(I, E)$.

*(ii) la multifonction $G$ a une valeur convexe presque partout : c'est-a-dire il existe $J \subset I$, avec $\mu(I \backslash J) = 0$, tel que sur l'ensemble $Z = \{(t, x) : t \in J,\ x \in \mathcal{R}_G(x_0, t)\}$ la multifonction $G$ a une valeur convexe.*

**Preuve** Nous n'avons qu'a prouver que (i) implique (ii). Par le théorème de Scorza Dragoni il existe une suite $\{I_n\} \subset [t_0, T[$ de paire non vide disjoint ensembles fermés $I_n$ avec $I_n \subset I_{n+1}$, $\mu(I \backslash I_n) \to 0$ de sorte que la fonction $G$ se limite a $I_n \times B(x_0, r)$ est continue. Soit $J_n$ l'ensemble des points de densité de $I_n$, et mettez $J = \bigcup J_n$ On prétend qu'avec ce choix de $J$, la multifonction $G$ est convexe valorisé sur $\mathbb{Z}$. Supposons au contraire qu'il existe $\tau \in J_n$ et $\xi \in \mathcal{R}_G(x_0, \tau)$ tel que l'ensemble $G(\tau, \xi)$ n'est pas convexe. Soit $v \in \overline{co}G(\tau, \xi) \backslash G(\tau, \xi)$. Appelez $G_n$ la restriction de $G$ a $I_n \times B(x_0, r)$. D'après le théorème de Michael, il existe une sélection continue $g_n$ de $G_n$ telle que $g(\tau, \xi) = v$. Puisque $d(g_n(\tau,\xi),\ G_n(\tau, \xi)) > 0$ et $g_n$ et $G_n$ sont continues en $(\tau, \xi)$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(g_n(t,x), G_n(t, x)) > 0$ pour $t \in I_n$, $x \in \mathcal{R}_G(x_0,t)$, $|t - \tau| < \delta$, $\|x - \xi\| < M\delta$.

Soit $g$ n'importe quel sélection du caratheodory de G tel que $g(t,x) = g_n(t,x)$ pour tout $(t,x) \in I_n \times B(x_0,r)$. Soit $\mathcal{M}_G^*$ et $P_g^*$ les ensembles de solutions des problèmes

$$\begin{cases} \dot{x} \in G(t,x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \quad (3.13)$$

et

$$\begin{cases} x' = g(t,x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \quad (3.14)$$

sur l'intervalle $[\tau, T]$. Soit $z \in P_g^*$ arbitraire. Depuis $\tau$ est un point de densité pour $I_n$, $z'(\tau) = g(\tau,\xi) = v$ et $d(\dot{z}(t), G(t,z(t)) > 0$ pour $t \in I_n$, $|t-\tau| < \delta$, il s'ensuite que $\int_\tau^T d(\dot{z}(t), G(t,z(t))\, dt > 0$.

Puisque $G(t,x) \supset ext\overline{co}G(t,x)$, le théorème 3.2 garantit que, pour tout $\varepsilon$ positif, l'ensemble $\mathcal{M}_G^* \bigcap B(P_g^*, \varepsilon)$ est non vide. Soit $z_n \in \mathcal{M}_G^* \bigcap B(P_g^*, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\{z_n\}$ est compact, une sous-suite converge vers $z$, Clairement $z \in P_g^*$ et $\int_\tau^T d(\dot{z}(t), G(t,z(t))\, dt > 0$. Comme $\xi \in \mathcal{R}_G(x_0,\tau)$, il existe $x \in \mathcal{M}_G$ tel que donc $\dot{x} \in G(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ et $x(\tau) = \xi$. Définir $w_n(t) = x(t)$, $t \in [t_0, \tau[$ et $w_n(t) = z_n(t)$, $t \in [\tau, T]$. La suite $\{w_n\} \in \mathcal{M}_G$ converge vers $w$ ou $w(t) = x(t)$, $t \in [t_0, \tau[$ et $w(t) = z(t)$, $t \in [\tau, T]$. Il s'ensuite que

$$\int_I d(\dot{w}(t), G(t,w(t))\, dt \geq \int_\tau^T d(\dot{z}(t),G(t,z(t))\, dt > 0.$$

D'ou $w \notin \mathcal{M}_G$, et $\mathcal{M}_G$ n'est pas fermé, une contradiction. $\square$

# Conclusion

À ce travail, nous avons fait la lumière a la méthode de la cathégorie de Baire et utiliser pour prouver l'existence de solutions des inclusions différentielles avec différentes conditions sur la fonction multivoque $F$.

Dans la future recherche, on s'intéresse à appliquer cette méthode (cathégorie de Baire) pour prouvons l'existence de solutions des inclusions différentielles avec impulsives.

# Bibliographie

[1] A. Antosiewicz and A. Cellina, *Continuous selections and differential relations.* J. Differential Equations, 19 (1975), 386-398.

[2] A. Antosiewicz and A. Cellina, *Continuous extentions of multifunctions*, Ann. Polon. Mat.34 (1977), 107-111.

[3] J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer Vcrlag, Berlin 1984. .

[4] S. Bahi, *Quelques propriétes topologiques de l'ensemble des solutions d'une classe d'equations différentialles multivoques II*, Seminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1983, Expose n.4.

[5] M. Bendaoud, *Analyse Fonctionnelle Appliquée*, Université Moulay Ismaïl (2017).

[6] A. Bressan and G. Colombo, *Generalized Baire category and differential inclusions in Banach spaces*, J. Differential Equations 76 (1988), 135-158.

[7] H. Brezis, *Functional Analysis*, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Universitext, Springer-Verlag New York, 1edition(2010).

[8] F. Boyer, *Agrégation Externe de Mathématiques Equations différentielles ordinaires*, Aix-Marseille Université (2017).

[9] F. Boyer, *Analyse Fonctionnelle*, Aix-Marseille Université (2015).

[10] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 580, Springer Vcrlag, Berlin, 1977.

[11] A. Cellina, *On mappings defined by differential equations*, Zeszyty nauk. Univ. Jagiellonski 252 Pracc Mat, 15 (1971), 17-19.

[12] A. Cellina, *On the differential inclusion* $x' \in [-1,1]$, Atti Accad. Naz. LinceiRend. Sc.Fis.Mat.Nat, Scric VIII, 69 (1980), 1-6.

[13] A. Cellina and A. Ornclas, *Convexity and the closure of the solution set to differential inclusions*, International school for advanced studies(ISAS), 11,Trieste(Italy), 1988.

[14] G. Choquet, *Lectures on Analysis*, 1,2,3 Benjamin, 1969.

[15] F. S. De Blasi and G. Pianigiani, *A Bairce category approach to the existence of solutions of multivalued differential inclusions in Banach Spaces*, FunkcialEkvac. (2)25 (1982), 153-162.

[16] F. S. De Blasi and G. Pianigiani, *The Baire category method in existence problems for a class of multivalued differential equations with nonconvex right hand side*, Funkcial.Ekvac. (2) 28 (1985), 139-156.

[17] F. S. De Blasi and G. Pianigiani, *Differential inclusions in Banach spaces*, J. Differential Equations , 66 (1987), 208-229.

[18] F. S. De Blasi and G. Pianigiani, *On the density of extremal solutions of differential inclusions*, Anales polonici mathematici LVI.2 (1992).

[19] F. S. De Blasi and G. Pianigiani, *Non Convex valued differential inclusions in Banach spaces*, Journal of mathematical analysis and applications 157, 469-494 (1991).

[20] B. Deschamps, *Théorie des ensembles*, Université d'Eleuthéria-Polites (2017).

[21] S. Djebali et A. Ouahab, *Analyse multivoque et inclusions diérentielles*, Laboratoire d'E.D.P. et H.M., E.N.S.

[22] A. Dold, B. Eckmann and FTakens, *Lecture Notes in Mathematics*, Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), held atVarenna, Italy, June 15-23, 1989.

[23] A. Eljai, *Eléments de topologie et espaces métriques* , Presses universitaires de perpignan (2007).

[24] A. F. Filippov, *Classical solutions of differential equations with multivalued right hand side*, SIAM J. Control 5 (1967), 609-621.

[25] A. F. Filippov, *The existence of solutions of generalized differential equations*, Math. Notes 10(1971), 608-611.

[26] I. Gallagher, *Analyse Fonctionnelle*, École Normale Supérieure de Paris (2020).

[27] B. R. Gelbaum, *Counterexamples in Analysis*,Dover Books on Mathematics, Dover. (2003).

[28] A. Hallouz, *Etudes quantitatives et qualitatives de quelques problèmes d'équations et d'inclusions différentielles*, UNIVERSITE DJILLALI LIABES. (2016).

[29] C. J. Himmclbcrg, *Correction to : Precompact contractions of metric uniformities and the continuity of* $F(t,x)$, Rend. Scm.Mat. Univ.Padova, 51(1974).

[30] H. Kaczynski and C. Olech, *Existence of solutions of orientor fields with non-convex right hand side*, Ann.Polon.Math.,29 (1974),61-66.

[31] K. Kuratowski, *Topologie I*, Monografie Matematyczne 20, PWN Warszawa -Wroclaw, 1952.

[32] K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzcwski, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Pol. Sc. 13 (1965), 397-403.

[33] N. Lawrence. *Topological Vector Spaces. Pure and applied mathematics*, (Second ed.). Boca Raton, Beckenstein, Edward (2011).

[34] B. Luderer, L. Minchenko *Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations*, Nonconvex Optimization and Its Applications, Springer US, 1 edition(2002).

[35] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math., (2) 63 (1956), 361-382.

[36] A. M. Mushinov, *On differential inclusions in Banach spaces*, Soviet Math.Dokl. 15(1974), 1122-1125.

[37] E. H. H. Nawfal, *Topologie générale et espace normés*, Dunod. (2011).

[38] G. Pianigiani, *On the fundamental theory of multivalued differential equations*, J. Differential Equations 25 (1977), 30-38.

[39] L. Schwartz, *Théorie des ensembles et topologie*, Collections Enseignement des sciences 42, Herman (1991).

[40] S. I. Suslov, *A Bang-Bang theorem for differential inclusions in Banach spaces*, Controllable Systems 28(1977), 30-38.

[41] A. A. Tolstonogov, *On differential inclusions in Banach spaces*, Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 186-190.

[42] A. A. Tolstonogov and IA. Finogenko, *On solutions of differential inclusions with lower semicontinuous nonconvcx right-hand side in a Banach space*, Math.USSR Sbornik 53 (1986), 203-231.

[43] T. Wazewski, *Sur une generalization de la notion de solution d'une equation au contingent*, Bull. Acad. Pol. Sci. 10 (1962), 11-15.