

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ahmed Draia Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité:

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

SIDIYOUSFI Fatma

Thème

**Modélisation mathématique de transmission de la
COVID-19**

Évalue, devant le jury composé de:

M.RAHMANE Mebrouk	MCB	Université d'Adrar	Président
M. BOUDAOUI Ahmed	MCA	Université d'Adrar	Rapporteur
M.FATMI Laarbi	MCB	Université d'Adrar	Examineur

Année Universitaire : 2020-2021



شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذة(ة): يو داوي أحمد

المشرف مذكرة الماستر الموسومة — : Modélisation mathématique de transmission de COVID-19

من إنجاز الطالب(ة): سيدي يوسف فاطمة

و الطالب(ة): /

كلية : العلوم والتكنولوجيا

القسم : رياضيات و إعلام آلي

التخصص : تحليل اليب و تحريقات

تاريخ تقييم / مناقشة: 27 جوان 2021

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقييم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.
و بإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والإلكترونية (PDF).

- امضاء المشرف:

06 JUN. 2021

ادرار في :

مساعد رئيس القسم:

مساعد رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي
مكلف بالتدريس والتعليم في الخارج
مأزوري حاج



Dédicace

*Ce travail est dédié
à l'âme de mon père, que Dieu ait pitié de lui
à ma tendre mère qui est toujours été une source
inépuisable d'amour et d'encouragements.
à mes sœurs et mes frères.
à mon amies intimes.
à tous mes professeurs.
à tous ceux que j'aime.*

◆FATMA◆

Remerciement

*Avant tout, mes purs remerciements, je les exprime à **Allah** tout puissant.*

*Je vifs remerciement vont également à mon encadreur **M. BOU-DAOUI Ahmed** qui m'a guidé durant ce travail et qui ses conseils et remarque étaient très utile pour réaliser ce mémoire.*

*Je remercie encore, **M. RAHMANE Mabrouk** et **M. FATMI Laarbi** pour avoir accepter d'évaluer ce travail et m'avoir faire l'honneur de participer au jury.*

J'exprime aussi ma reconnaissance à toute l'équipe des formateurs du département des Mathématiques et Informatique qui ont assuré une formation solide et écace pour que nous serons à la hauteur.

Merci beaucoup.

Table des matières

Dédicace	i
Notations	3
Introduction	4
1 Préliminaires	6
1.1 Equations différentielles ordinaires	6
1.1.1 Définitions	6
1.1.2 Existence et unicité des solutions	7
1.2 Quelques notions de stabilité	9
1.2.1 Définitions	9
1.2.2 Méthode de Lyapunov	11
1.2.3 Le principe d'invariance de LaSalle	12
1.2.4 Quelques matrices particulières	12
2 Analyse mathématique de modèle COVID-19	14
2.1 Introduction	14
2.2 Présentation du modèle de COVID-19	16
2.2.1 Résultats de l'ajustement du modèle	19
2.3 Analyse mathématique de modèle	20
2.3.1 L'existence et l'unicité	20
2.3.2 Positivité et la bornitude :	22

2.3.3	Région invariante	25
2.4	Etude la stabilité	26
2.4.1	Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0	26
2.4.2	Calcul de \mathcal{R}_0 :	27
2.4.3	Application sur la modèle de COVID-19	29
2.5	Stabilité de l'équilibre sans maladie(DFE)	31
2.5.1	Calcul l'équilibre sans maladie(DFE)	31
2.5.2	Analyse de la stabilité locale du DFE	32
2.5.3	Stabilité globale	32
2.6	Existence et stabilité de l'équilibre endémique(EE)	33
2.6.1	Stabilité locale	34
2.6.2	Analyse de la bifurcation en arrière	36
3	Etude le problème du Contrôle optimal	39
3.1	Simulation numérique et discussion	39
3.2	Analyse de sensibilité de \mathcal{R}_0	42
3.3	L'existence et l'unicité de la solution des système de contrôle	44
3.4	L'étude de l'existence d'un controle optimale	44
3.5	Modèle COVID-19 avec contrôle optimal	46
3.5.1	Problème de contrôle optimal	46
3.5.2	Solution de contrôle optimale	48
	Conclusion	51

Notations générales

Les notations, symboles et abréviations les plus fréquemment utilisés sont répertoriés ci-dessous

\mathbb{R}	Ensemble de tous les nombres réels.
\mathbb{R}_+	Ensemble de tous les nombres réels non négatifs.
\mathbb{R}^n	Ensemble de tous les n -tuples $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
<i>EDO</i>	L'équation différentielle ordinaire.
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Ouvert.
$\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$	matrice carré d'ordre n
M	Matrice.
$Spec(M)$	L'ensemble des valeurs propres de M .
$\rho(M)$	Le rayon spectrale $\rho(M) : \rho(M) = \max\{ \lambda , \lambda \in Spec(M)\}$.
\mathcal{C}^1	La classe des fonctions dérivable et sa dérivée est continue.
$Re(\lambda)$	Partie réelle de λ
$\alpha(M)$	Module de stabilité de la matrice $M : \alpha(M) = \max\{Re(\lambda); \lambda \in Spec(M)\}$.
\mathcal{R}_0	Le nombre (ou taux) de reproduction de base.
<i>DFE</i>	Disease Free Equilibrium : Point d'équilibre sans maladie.
<i>EE</i>	Endemic Equilibrium : Point d'équilibre endémique.

Introduction

Les modèles mathématiques jouent un rôle important de premier plan pour étudier l'épidémiologie et ses conclusions, pour obtenir des informations quantitatives qui contribuent aux processus de compréhension et de gestion de l'écllosion d'une épidémie et pour suggérer des stratégies pour la combattre. On pense que la première personne à utiliser la modélisation mathématique pour étudier la propagation des épidémies fut le mathématicien Daniel Bernoulli lors de son étude de la variole en 1760.

La maladie à coronavirus (COVID-19) est le plus grand défi de santé publique auquel le monde est confronté ces derniers jours. En raison de l'absence d'un vaccin ou d'un traitement efficace contre le coronavirus (précédemment), le seul moyen d'atténuer cette infection est donc la mise en œuvre d'interventions non pharmaceutiques telles que rester la distance sociale, le confinement communautaire, la quarantaine, l'hospitalisation ou l'auto-isollement et recherche de contact.

La modélisation mathématique du COVID-19 est un outil important pour explorer la dynamique de la transmission des maladies et fournir des techniques utiles pour le contrôle de la pandémie.

Dans ce mémoire, nous développons un modèle mathématique pour limiter la propagation du virus Corona en Algérie.

Notre travail divise en trois chapitres :

Dans chapitre1 : Nous définissons les équations différentielles ordinaires et rappelons quelques notions et résultats sur : Existence, unicité des solutions et notions de stabilité.

Dans chapitre2 : Nous présentons le modèle de COVID-19, et analyse mathématique

de ce modèle ; nous avons déterminé le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 qui exprime le nombre de cas secondaires qu'un seul individu infectieux produit lorsqu'il est introduit dans une population particulière. Ensuite, nous avons étudié et discuté la stabilité du modèle : dans le cas de l'équilibre sans maladie (DFE) est stable lorsque le nombre de reproduction de base $\mathcal{R}_0 < 1$. De plus, lorsque le nombre de reproduction de base $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le modèle est stable pour l'équilibre endémique(EE).

Dans chapitre3 : L'analyse de sensibilité des paramètres du modèle du COVID-19 est effectuée et leurs résultats graphiques correspondants sont présentés, les résultats numériques pour les paramètres sensibles sont tracés et leurs effets sont mis en évidence sur l'élimination de la maladie. Le modèle proposé est ensuite reformulé par ajout de variables de contrôle dépendant du temps $u_1(t)$ pour la recherche des contacts(la quarantaine) et $u_2(t)$ pour les interventions hospitalières, et pour fournir les conditions optimales nécessaires en utilisant la théorie du contrôle et principe du maximum de Pontryagine(P.M.P).

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions et résultats sur les équations différentielles ordinaires : Existence, unicité des solutions, Notions de stabilité ; des notions que nous utilisons dans ce mémoire.

1.1 Equations différentielles ordinaires

1.1.1 Définitions

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

Définition 1.1. Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une relation du type :

$$x' = f(t, x(t)), t \in I. \tag{1.1}$$

que l'on note : $x' = \frac{dx}{dt}$, et :

$$x' = f(t, x). \tag{1.2}$$

Soit x une fonction définie d'une partie de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n :

Définition 1.2. La fonction x est dite solution de l'équation (1.2) sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, si elle est définie et continûment dérivable sur I , si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$ et si satisfait la relation (1.1) sur I .

Définition 1.3. Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné. La fonction x est dite solution du problème à valeur initiale associé à l'équation (1.2) s'il existe un intervalle I contenant t tel que x soit solution de l'équation (1.2) sur I et vérifie :

$$x(t_0) = x_0$$

Remarque 1.1. Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, un problème à valeur initiale associée à l'équation (1.2) est généralement exprimé sous l'écriture suivante :

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

on dit aussi problème de Cauchy

Remarque 1.2. Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.3) est équivalent à l'équation intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Remarque 1.3. L'équation différentielle ordinaire de la forme

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t), \forall t \in I. \quad (1.4)$$

A et B sont des fonctions que l'on supposera continues admet des solutions sous la forme (formule de Duhamel) :

$$x(t) = (\exp \int_{t_0}^t A(s) ds) \cdot [x(t_0) + \int_{t_0}^t (\exp \int_{t_0}^s -A(p) dp \cdot B(s)) ds]. \quad (1.5)$$

1.1.2 Existence et unicité des solutions

Théorème 1.1. (*L'existence*)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.3) admet au moins une solution.

Définition 1.4. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On dit que f est K-lipchitzienne en x si :

Pour tout $(t, x_1), (t, x_2)$ dans U

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq K \| x_1 - x_2 \|$$

, ($t \in I$, K ne dépend pas de t).

f est localement lipchitzienne en x_0 si :

$\forall (t_0, x_0) \in U$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) dans le quel f est K-lipchitzienne.

Théorème 1.2. (*L'existence et unicité*)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement Lipschitzienne en x_0 , pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.3) admet une solution unique.

(Système dynamique à temps continu) On appelle système dynamique à temps continu sur un ensemble U , une famille d'applications $\{\Phi_t; t \in \mathbb{R}_+\}$, paramétrée soit par l'ensemble \mathbb{R}_+ des réels positifs ou nuls, soit par l'ensemble \mathbb{R} de tous les réels, et vérifiant les propriétés suivantes :

- chaque application Φ_t est définie sur une partie U_t de U et à valeurs dans U ;
- l'application Φ_0 définie sur U tout entier est l'application identité sur (id_U) ;
- Si $0 \leq t_1 \leq t_2$, alors $U_{t_2} \subset U_{t_1}$;
- Soient t et s deux éléments de l'ensemble \mathbb{R}_+ (ou \mathbb{R}) qui paramètre la famille des applications considérées. Soit $x \in U_s$; alors $\Phi_s(x)$ est un élément de U_t si et seulement si x est un élément de U_{s+t} et, lorsque c'est le cas, on a

$$\Phi_t(\Phi_s(x)) = \Phi_{s+t}(x)$$

L'ensemble U est appelé "espace de phases" du système dynamique.

Systèmes autonomes :

Soit Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^n . Considérons l'équation différentielle autonome définie par :

$$x' = f(x) \tag{1.6}$$

On suppose que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et satisfait des conditions telles qu'une solution du système (1.6) existe en tout point, est unique et dépend de manière continue des conditions initiales. Les états stationnaires ou points d'équilibre du système (1.6) sont les points $x_0 \in \Omega$ satisfaisant $f(x_0) = 0$. Pour chaque $x \in \Omega$ nous notons par $f_t(x)$ la solution du système (1.6) satisfaisant $f_0(x) = x$. Nous supposons que f satisfait des conditions telles que $f_t(x)$ est continue en (t, x) .

Définition 1.5. On appelle trajectoire d'un point x de Ω l'application $f_x : t \rightarrow f_x(t)$.

1.2 Quelques notions de stabilité

On considère le système autonome suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \quad (1.7)$$

Avec $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et localement Lipschitzienne sur U pour assurer l'existence et l'unicité des solutions

1.2.1 Définitions

Définition 1.6. On dit que x^* est un point d'équilibre du système (1.7) s'il vérifie :

$$f(t, x^*) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Définition 1.7. On dit que x^* est un point d'équilibre stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \text{ tel que :}$$

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| \leq \varepsilon$$

si : $x^* = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que :

$$\|x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq \varepsilon$$

Le point d'équilibre est dit instable s'il n'est pas stable.

Définition 1.8. On dit que $x^* = 0$ est un point d'équilibre attractif s'il existe un voisinage $U(0) \subset \mathbb{R}^n$, tel que $\forall x_0 \in U(0)$ alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Définition 1.9. On dit que $x^* = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif

Définition 1.10. On dit qu'un point d'équilibre x^* est localement asymptotiquement stable si et seulement si : x^* est stable et si :

$$\exists \delta > 0, \forall x_0 \in U$$

avec

$$\|x(t) - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0$$

Définition 1.11. On dit que x^* est globalement asymptotiquement stable sur $V \subset U$, si pour tout $x_0 \in V$, x vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0\| = 0$$

Théorème 1.3. Soit $x = 0$ un équilibre du système $x' = f(x)$ où est $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et différentiable et D est un voisinage de 0. On pose $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)|_{x=0}$ de valeurs propres $\lambda_i, i = 1 \dots n$

1. Si $Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1 \dots n$ alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.
2. Si $Re(\lambda_i) > 0$ pour une valeur propre de A , alors $x = 0$ est instable.

Remarque 1.4. Une matrice carrée A est dite Hurwitz si $Re(\lambda_i) < 0, \forall i = 1 \dots n$ où λ_i sont les valeurs propres de A .

1.2.2 Méthode de Lyapunov

Les fonctions de Lyapunov jouent un grand rôle dans l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques.

Définition 1.12. Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $V(0) = 0$

1. On dit que V est définie positive si :

$$V(x) > 0.$$

Pour tout $x \neq 0$.

2. La fonction V est dit définie négative si $-V$ définie positive.
3. On dit que V est semi-définie positive si :

$$V(x) \geq 0.$$

Pour tout $x \neq 0$.

Théorème 1.4. 'Théorème de stabilité de Lyapunov'

Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre de (1.7) et D un ouvert de \mathbb{R}^n contenant x_0 Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable telle que :

1. $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ dans $D - \{0\}$
2. $V' \leq 0$ Dans D

Alors

$x_0 = 0$ est stable

Si de plus on a :

3. $V' < 0$ dans $D - \{0\}$

Alors

$x_0 = 0$

est asymptotiquement stable

Remarque 1.5. La fonction V est appelée fonction de Lyapunov.

Le théorème précédent affirme que pour montrer qu'un point d'équilibre x^* est stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov en ce point. Par ailleurs, l'utilisation de théorème 1.4 pour montrer la stabilité asymptotique d'un système donné, nous devons déterminer une fonction V définie positive dont la dérivée V' est définie négative. Dans le cas général, ceci n'est pas évident. La condition sur la dérivée V' peut être allégée en utilisant le " Principe de LaSalle " qui sera énoncé dans la partie suivante.

1.2.3 Le principe d'invariance de LaSalle

Définition 1.13. (Ensemble invariant) Un sous-ensemble K de \mathbb{R}^n est dit positivement (resp. négativement) invariant relativement à (1.7) si $x(t, K) \subset K$ pour tout $t \geq 0$ (resp $t \leq 0$), K est dit invariant si $x(t, K) = K$ pour tout t .

Théorème 1.5. (Principe d'invariance de LaSalle) [10, 11]

Soit Ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^n ; supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour (1.7) en x_0 . Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

1. $V' \leq 0$ sur Ω
2. Soient $E = \{x \in \Omega | V'(x) = 0\}$ et L le plus grand ensemble invariant par K et contenu dans E .

Alors, toute solution bornée issue dans Ω tend vers une limite dans l'ensemble L lorsque le temps tend vers l'infini.

Corollaire 1.1. Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'ensemble L est réduit au point $x_0 \in U$, alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (1.7) défini sur U .

1.2.4 Quelques matrices particulières

Définition 1.14. (Module de stabilité, rayon spectrale)

Soit A une matrice carrée, si on désigne par $Spec(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A . On appelle Module de stabilité de la matrice A , le nombre défini par : $\alpha(A) = \max\{Re(\lambda); \lambda \in Spec(A)\}$

La matrice A est dite stable si $\alpha(A) < 0$. On appelle rayon spectrale le nombre réel $\rho(A)$ défini par $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Spec}(A)\}$

On dit qu'une matrice A est stable si ses valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives. On dit aussi que la matrice est 'Hurwitz'.

Les matrices de Metzler

Définition 1.15. :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

On appelle matrice de Metzler, toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients extra-diagonaux sont positifs. C'est-à-dire $a_{ij} \geq 0$ pour tout les i et j avec $i \neq j$.

Définition 1.16. (décomposition régulière)

Soit une matrice de Metzler A . On appelle décomposition régulière A toute décomposition de A de la forme $A = F + V$ ou $F \geq 0$ et V est une matrice de Metzler-Hurwitz .

Théorème 1.6. (Perron-Frobenius)[13]

Si A est une matrice non négatif alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A

Théorème 1.7. (Varga,1962) [13] Soit une matrice de Metzler A inversible. Pour toute décomposition régulière de A de la forme $A = F + V$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- A est une matrice de Metzler stable ; i.e $\alpha(A) < 0$.
- $\rho(-FV^{-1}) < 1$

Chapitre 2

Analyse mathématique de modèle COVID-19

Dans ce chapitre nous présentons le modèle mathématique de COVID-19 proposé selon les cas rapportés en Algérie, et étudions l'analyse mathématique de ce modèle.

2.1 Introduction

La COVID-19 est une maladie qui fait partie de la famille coronavirus (nouveau coronavirus), le SARS-CoV-2, il est devenu le plus grand défi que l'histoire ait jamais vu.

L'Organisation Mondiale de Santé (OMS) a appris l'existence de ce nouveau virus la fin de 2019 lorsqu'un foyer épidémique de cas de « pneumonie virale » a été notifié à Wuhan, en République populaire de Chine, il s'est propagé au reste du monde en quelques mois et a été déclaré pandémie par l'Organisation de Nations Unies (ONU). Il a paralysé la vie à travers le monde[14].

La cause principale du virus reste à découvrir, mais on présume qu'il est apparu dans l'un des plus grands marchés aux animaux de la ville chinoise de Wuhan.

Selon les statistiques de l'OMS, le virus a affecté environ 100 millions de personnes à travers le monde et plus de 3 millions personnes sont mortes jusqu'à présent[14], le taux de récupération est supérieur au taux de mortalité. Cependant, le ratio varie d'un pays à l'autre et d'une région à l'autre.

Les symptômes de COVID-19

Les symptômes les plus courants sont les suivants :

Fièvre, Toux sèche, Fatigue, Maux de tête, Diarrhée, Essoufflement, Perte d'appétit, Douleurs ou sensation d'oppression persistantes dans la poitrine, Température élevée

La propagation : selon les informations disponibles, sont des gouttelettes produites par une personne infectée lors de la toux et éternuements et contacts physiques,.. etc.

Le délai entre l'exposition à la COVID-19 et le moment où les symptômes commencent à se manifester est, en moyenne, de 5-6 jours et peut aller de 1 à 14 jours. C'est pourquoi il est conseillé aux personnes qui ont été exposées au virus de rester chez elles, à l'écart des autres, pendant 14 jours, afin d'éviter la propagation du virus, en particulier lorsqu'il est difficile de se faire tester.

Comme d'autres pays du monde, la pandémie de COVID-19 constitue une menace énorme pour les deux santé humaine et économie en Algérie.

Le premier cas du COVID-19 a été signalé le 17 février 2020 dans la wilaya Blida ; Plus tard, en quelques semaines seulement, l'infection s'est propagée dans la plupart des districts, Blida a été la région la plus touchée en Algérie.

En raison de la croissance rapide des personnes infectées à travers le pays, le gouvernement d'Algérie a décidé de mettre la nation entière sous stricte verrouillage.

Les modèles mathématiques sont très utiles pour nous aider à comprendre la dynamique de transmission et la lutte contre les maladies transmissibles émergentes et réémergentes. Un des principaux défi auquel l'humanité est confrontée de nos jours est de prédire la gravité et de suggérer des stratégies d'intervention en santé publique pour réduire la pandémie de COVID-19. Récemment, un certain nombre de modèles mathématiques ont été proposés pour explorer les modèles de transmission de la pandémie de COVID-19. Dans [9], les auteurs ont formulé un modèle déterministe pour explorer l'impact de diverses interventions publiques sur la dynamique et l'atténuation du COVID-19 en Ontario, Canada. Dans [5], un modèle mathématique basé sur des équations différentielles non linéaires est présenté pour étudier la dynamique de l'infection au COVID-19 dans les pays fortement touchés qui sont la Chine, l'Italie et la France. Un modèle COVID-19 d'ordre

fractionné avec l'Atangana-L'opérateur Bleanu-Caputo est proposé par Khan et Atangana [12] et a implémenté le modèle pour analyser l'infection à Wuhan. Le rôle du verrouillage en l'absence de vaccins et traitements pour atténuer la pandémie de COVID-19 est analysé en [1]. L'auteur a utilisé les nouveaux opérateurs fractionnaires-fractals pour formuler les propositions de modèle mathématique [1]. Dans [2], un modèle de transmission est formulé pour prédire le cumul au Cas de COVID-19 en Italie, au Royaume-Uni et aux États-Unis. Les dynamiques de transmission du COVID-19 au Mexique sont étudiés à l'aide de modèles mathématiques et informatiques dans [17]. L'influence des contrôles non pharmaceutiques, y compris la quarantaine, l'hospitalisation ou l'auto-isollement, la recherche des contacts et l'utilisation d'un masque facial sur la dynamique de la pandémie de COVID-19 en la population de l'état de New York et l'ensemble des États-Unis est étudié en détail dans [3].

2.2 Présentation du modèle de COVID-19

Dans cette section, nous introduisons un modèle de transmission SAIR pour étudier le comportement dynamique de l'épidémie de pandémie COVID-19 par rapport à différents valeurs des paramètres, Pour décrire la progression de la dynamique de transmission du COVID-19 dans la population.

nous divisons la population $N(t)$ en cinq sous-classes à savoir :

1. $S(t)$: les personnes Susceptibles ,
2. $A(t)$: les personnes asymptomatiques,
3. $Iu(t)$: les personnes infectée non détectée - les personnes dont nous ne savons pas qu'elles sont infectées ,
4. $Ir(t)$: les personnes infectées détectées - les personnes dont on sait qu'elles sont infectées,
5. $R(t)$: les personnes récupérées .

tel que :

$$N(t) = S(t) + A(t) + Iu(t) + Ir(t) + R(t)$$

Nous donnons la dynamique du virus dans différents compartiments. Ainsi, le modèle

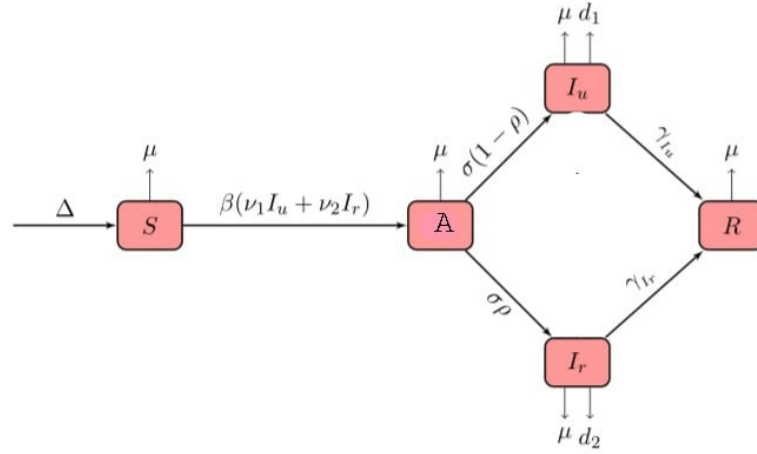


FIGURE 2.1 – schéma des différentes étapes de transmission du virus corona dans différents compartiments

mathématique est représenté par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Delta - \frac{\beta(\nu_1 I_u + \nu_2 I_r)}{N} S - \mu S \\ \frac{dA}{dt} = \frac{\beta(\nu_1 I_u + \nu_2 I_r)}{N} S - (\sigma + \mu) A \\ \frac{dI_u}{dt} = \sigma(1 - \rho) A - (\mu + d_1 + \gamma_{I_u}) I_u \\ \frac{dI_r}{dt} = \sigma\rho A - (\mu + d_2 + \gamma_{I_r}) I_r \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_{I_r} I_r + \gamma_{I_u} I_u - \mu R \\ \frac{dD}{dt} = d_2 I_r + d_1 I_u \end{array} \right. \quad (2.1)$$

De plus, les conditions initiales suivantes sont prises en considération :

$$S(0) = S_0 \geq 0, A(0) = A_0 \geq 0, I_u(0) = I_{u_0} \geq 0, I_r(0) = I_{r_0} \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0. \quad (2.2)$$

Dans ce modèle, nous constatons un afflux net de personnes sensibles dans la région à un taux d'à unité de temps. Cependant, les personnes sensibles diminuent après l'infection, en raison de l'interaction entre des personnes sensibles et des personnes infectées non détectées (I_u) ou des personnes infectées détectées (I_r). Une personne sensible nouvellement infectée du compartiment S devient asymptomatique (A) avec

taux de contact $\frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N}$, où v_1 et v_2 sont les taux de la transmission. Une fois cela fait, les personnes asymptomatiques progressent à travers les maladies infectieuses détectées et non détectées. Des compartiments infectieux avec un moyen σ , où une fraction ρ ($0 \leq \rho \leq 1$) des personnes asymptomatiques se déplacent vers un compartiment infectieux détectés (Ir), tandis qu'une fraction $(1 - \rho)$ des personnes asymptomatiques se déplacent vers le compartiment infectieux non détectés (Iu). Les paramètres d_1 et d_2 sont le taux de mortalité causée par la maladie pour le compartiment (Iu) et (Ir) respectivement. A Noter que la présence du virus a causé la mort d_1 en compartiment (Iu) Et parce qu'en Algérie, tous les morts sont testés COVID-19. Ainsi, même l'infecté non détecté peut savoir qu'il est mort du virus. Enfin μ est la mort naturelle dans tous les compartiments.

Enfin, les personnes infectieuses non détectées (Iu) et détectées (Ir) progressent vers le compartiment de récupération (R) à des taux γ_{Iu} et γ_{Ir} respectivement. On remarque à nouveau que la progression de la maladie d'une personne infectieuse non détectée au compartiment de récupération est due à une personne qui développe une auto-immunité pour le virus. La dernière équation du modèle (2.1) indique le nombre total de décès dus au COVID-19. Pour simplifier, nous notons :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N} \\ k_1 &= (\sigma + \mu) \\ k_2 &= (\mu + d_1 + \gamma_{Iu}) \\ k_3 &= (\mu + d_2 + \gamma_{Ir})\end{aligned}$$

Donc on va écrire le modèle (2.1) comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Delta - \lambda S - \mu S \\ \frac{dA}{dt} = \lambda S - k_1 A \\ \frac{dIu}{dt} = \sigma(1 - \rho)A - k_2 Iu \\ \frac{dIr}{dt} = \sigma \rho A - k_3 Ir \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_{Ir} Ir + \gamma_{Iu} Iu - \mu R \end{array} \right. \quad (2.3)$$

2.2.1 Résultats de l'ajustement du modèle

Nous étudions le modèle proposé qui correspond aux cas signalés d'infection par la COVID-19 en Algérie. Les cas rapportés sont présentés dans la Figure 2.2. Le modèle est résolu à l'aide du paquet ode45 (technique RK4) qui est un solveur pour le problème de valeur initial dans MATLAB. Ensuite, nous avons implémenté le paquet lsqcurvefit pour adapter le modèle aux données réelles et pour estimer les paramètres. La figure 2.2 illustre la meilleure adéquation aux données déclarées au moyen de notre modèle. Peut voir que la simulation du modèle est en bon accord avec les données réelles. Les paramètres estimés et ajustés sont donnés dans le tableau 2.2.1.

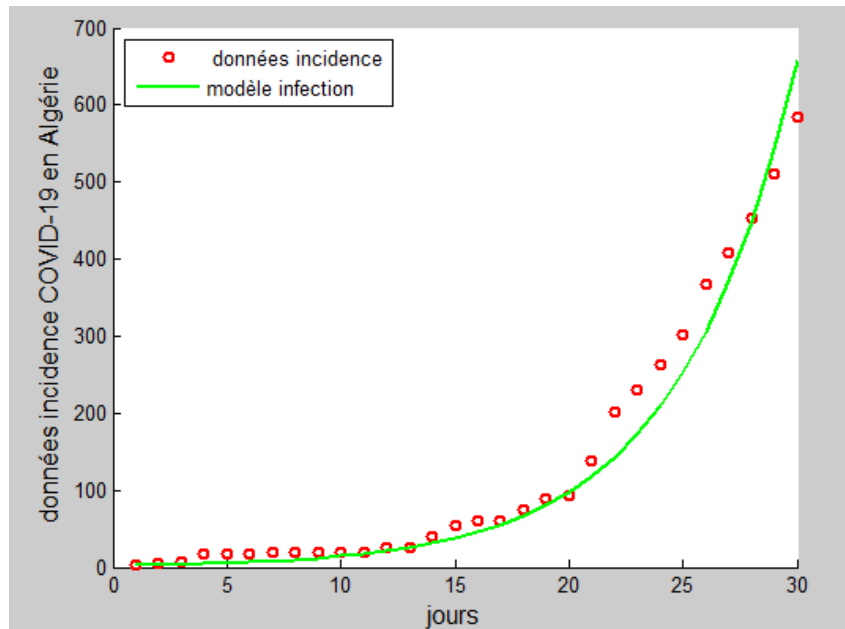


FIGURE 2.2 – Données correspondant aux cas déclarés à l'aide du module(2.3)

Paramètre dans le modèle mathématique, et ils sont listés dans le tableau ci-dessous

paramètres	description	valeur
Δ	Taux de natalité	1534
β	Taux de force de transmission de A à S	0.6962
v_1	Taux de transmission de personnes non détectées	0.1003
v_2	Taux de transmission de personnes détectées	0,7727
σ	Taux d'incubation	0.8847
ρ	La proportion d'infection asymptomatique	0.9000
γ_{Iu}	Taux de récupération des personnes infectieuses non détectées	0.9000
γ_{Ir}	Taux de récupération des personnes infectieuses détectées	0.1001
d_1	Taux de mortalité par infection dans la classe Iu	0.9000
d_2	Taux de mortalité par infection dans la classe Ir	0.1000
μ	Taux de mortalité naturelle	$1/(77.5*365)$

TABLE 2.1 – valeurs numériques et description pour les paramètres estimés et ajustés

2.3 Analyse mathématique de modèle

2.3.1 L'existence et l'unicité

Ecrivant le modèle(2.1)sous forme matricielle,on trouve :

$$\begin{pmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dA}{dt} \\ \frac{dIu}{dt} \\ \frac{dIr}{dt} \\ \frac{dR}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(1 - \rho) & -(\mu + d_1 + \gamma_{Iu}) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\rho & 0 & -(\mu + d_2 + \gamma_{Ir}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{Iu} & \gamma_{Ir} & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ A \\ Iu \\ Ir \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta - \frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N} S \\ \frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N} S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$\text{avec : } \begin{pmatrix} S(0) \\ A(0) \\ Iu(0) \\ Ir(0) \\ R(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ A_0 \\ Iu_0 \\ Ir_0 \\ R_0 \end{pmatrix} \text{ fixés , On pose } X(t) = \begin{pmatrix} S(t) \\ A(t) \\ Iu(t) \\ Ir(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$$

le modèle(2.1) devient :

$$\begin{cases} X'(t) = EX(t) + G(X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

avec

$$E = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\sigma + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma(1 - \rho) & -(\mu + d_1 + \gamma Iu) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\rho & 0 & -(\mu + d_2 + \gamma Ir) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma Iu & \gamma Ir & -\mu \end{pmatrix},$$

$$\text{et } G(X(t)) = \begin{pmatrix} \Delta - \frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N} S \\ \frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N} S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit la fonction $H(t, X)$, t.q :

$$H : I \times \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+^5$$

$$(t, X) \rightarrow H(t, X) = EX(t) + G(X(t))$$

pour montrer l'existence et l'unicité du problème de Cauchy (2.4), on utilise le théorème 1.2, on a H est continué, on va montrer d'abord H est localement Lipschitzienne par rapport à X c'est à dire :

$$\forall X_1(t), X_2(t) \in \mathbb{R}_+^5, \| H(t, X_1) - H(t, X_2) \| \leq k \| X_1 - X_2 \|, \forall k > 0$$

$$\begin{aligned} \| H(t, X_1) - H(t, X_2) \| &= \| EX_1(t) + G(X_1(t)) - EX_2(t) - G(X_2(t)) \| \\ &\leq \| E(X_1(t) - X_2(t)) \| + \| G(X_1(t)) - G(X_2(t)) \| \end{aligned}$$

d'après les calculs :

$$\begin{aligned} \|H(t, X_1) - H(t, X_2)\| &\leq \|E\| \|X_1(t) - X_2(t)\| + M \|X_1(t) - X_2(t)\| \\ &\leq \max(\|E\|, M) \|X_1(t) - X_2(t)\| \\ &\leq M_1 \|X_1(t) - X_2(t)\| \end{aligned}$$

avec $M_1 = \max(\|E\|, M) < \infty$, $M \geq 0$, $\forall t \geq 0$

Alors $H(t, X)$ est localement lipschitzienne par rapport à X

donc le modèle (2.1) admet une unique solution

2.3.2 Positivité et la bornitude :

Pour montrer que le modèle (2.1) a un sens sur le plan épidémiologique, il faut montrer que toutes ses variables sont toujours non négatives, pour les données initiales non négatives pendant le temps $t > 0$

Lemme 2.1. *Pour tout $t \geq 0$ et les données initiales $X(0) \geq 0$, où $X(t) = (S(t), A(t), I_u(t), I_r(t), R(t))$, la solution du modèle (2.1) est non négative s'ils existent.*

Par ailleurs

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu}$$

Prouve. On va montrer que : $P(t) > 0, \forall t > 0$

On a

pour la première équation du modèle (2.3) :

$$\frac{dS}{dt} = \Delta - \lambda S - \mu S. \quad (2.5)$$

alors :

$$\frac{dS}{dt} = \Delta - (\lambda + \mu)S. \quad (2.6)$$

d'après la Remarque 1.3 :

$$S(t) = (\exp \int_0^t -(\lambda + \mu)(s) ds) \cdot [S(0) + \int_0^t (\exp \int_0^s (\lambda + \mu)(p) dp \cdot \Delta) ds]. \quad (2.7)$$

$$S(t) = S(0) \exp(-\mu t - \int_0^t \lambda(s) ds) + \exp(-\mu t - \int_0^t \lambda(s) ds) \cdot [\int_0^t \Delta \exp \mu t + \int_0^t \lambda(p) dp, ds] > 0. \quad (2.8)$$

donc $S(t) > 0, \forall t > 0$, (car $S(0) \geq 0$ et $\exp(-\mu t - \int_0^t \lambda(s) ds) > 0$)

Pour la deuxième équation de système (2.3)

$$\frac{dA}{dt} = \lambda S - k_1 A \quad (2.9)$$

$$A(t) = (\exp \int_0^t -k_1(s) ds) \cdot [A(0) + \int_0^t (\lambda S)(s) (\exp \int_0^s k_1(p) dp ds)] > 0. \quad (2.10)$$

(comme $A(0) \geq 0$ et $(\exp \int_0^t -k_1(s) ds > 0)$

donc $A(t) > 0, \forall t > 0$

Pour la troisième équation de (2.3) :

$$\frac{dIu}{dt} = \sigma(1 - \rho)A - k_2 Iu \quad (2.11)$$

prend : $B = \sigma(1 - \rho)A$

$$\frac{dIu}{dt} = B - k_2 Iu \quad (2.12)$$

donc

$$Iu(t) = (\exp \int_0^t -k_2(s) ds) \cdot [Iu(0) + \int_0^t (B)(s) (\exp \int_0^s k_2(p) dp ds)] > 0 \quad (2.13)$$

(comme $Iu(0) \geq 0$ et $(\exp \int_0^t -k_2(s) ds > 0)$

donc $Iu(t) > 0, \forall t > 0$

Pour la quatrième équation de (2.3) :

$$\frac{dIr}{dt} = \sigma \rho A - k_3 Ir. \quad (2.14)$$

donc

$$Ir(t) = (\exp \int_0^t -k_3(s) ds) \cdot [Ir(0) + \int_0^t (\sigma \rho A)(s) (\exp \int_0^s k_3(p) dp ds)] > 0 \quad (2.15)$$

(comme $Ir(0) \geq 0$ et $(\exp \int_0^t -k_3(s)ds > 0)$

donc $Ir(t) > 0, \forall t > 0$

Pour la cinquième équation de système (2.3)

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_{Ir}Ir + \gamma_{Iu}Iu - \mu R \quad (2.16)$$

$$R(t) = (\exp \int_0^t -\mu(s) ds) \cdot [R(0) + \int_0^t (\gamma_{Ir}Ir + \gamma_{Iu}Iu)(s)(\exp \int_0^s \mu(p)dp ds)] > 0 \quad (2.17)$$

(comme $R(0) \geq 0$ et $(\exp \int_0^t -\mu(s)ds > 0)$

donc $R(t) > 0, \forall t > 0$

Donc $P(t) > 0, \forall t > 0$

La deuxième partie de lemme 2.1 : On montre que :

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu}$$

On a

$$N(t) = S(t) + A(t) + Iu(t) + Ir(t) + R(t)$$

alors

$$N'(t) = S'(t) + A'(t) + Iu'(t) + Ir'(t) + R'(t) \quad (2.18)$$

tel que :

$$\begin{aligned} N'(t) &= \frac{dN}{dt}, S'(t) = \frac{dS}{dt}, A'(t) = \frac{dA}{dt}, Iu'(t) = \frac{dIu}{dt}, Ir'(t) = \frac{dIr}{dt}, R'(t) = \frac{dR}{dt} \\ N'(t) &= \Delta - \frac{\beta(v_1Iu + v_2Ir)}{N}S - \mu S + \frac{\beta(v_1Iu + v_2Ir)}{N}S - (\sigma + \mu)A + \sigma(1 - \rho)A \\ &\quad - (\mu + d_1 + \gamma_{Iu})Iu + \sigma\rho A - (\mu + d_2 + \gamma_{Ir})Ir + \gamma_{Ir}Ir + \gamma_{Iu}Iu - \mu R \\ &= \Delta - \mu S - \mu A - \mu Iu - \mu Ir - \mu R - d_1Iu - d_2Ir \\ &= \Delta - \mu(S + A + Iu + Ir + R) - (d_1Iu + d_2Ir) \\ &= \Delta - \mu N - (d_1Iu + d_2Ir). \end{aligned}$$

alors

$$\frac{dN}{dt} \leq \Delta - \mu N$$

$$N'(t) + \mu N \leq \Delta. \tag{2.19}$$

On multiplie les deux membres de (2.18) par : $\exp(\mu t)$
 et par l'intégration :

$$\int_0^t (N'(s) + \mu N(s)) \exp(\mu s) ds \leq \int_0^t \Delta \exp(\mu s) ds$$

. d'ou

$$N(t) \exp(\mu t) \leq \frac{\Delta}{\mu} \exp(\mu t) - \frac{\Delta}{\mu} + N(0)$$

On multiplie par : $\exp(-\mu t)$

alors

$$N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu} + (N(0) - \frac{\Delta}{\mu}) \exp(-\mu t). \tag{2.20}$$

par passage à la limite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu}$$

donc ,la bornitude

D'autre part

2.3.3 Région invariante

Le domaine biologique qui sera étudier la dynamique de modèle mathématique COVID-19 (2.3) est : l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}_+^5$

tel que :

$$\Omega = \{(S(t), A(t), Iu(t), Ir(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^5 : N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu}\}$$

Lemme 2.2. *La région définie dans l'ensemble fermé $\Omega \subset \mathbb{R}_+^5$, est positivement invariante pour le modèle (2.3) avec conditions initiales non négatives dans \mathbb{R}_+^5*

Prouve. On a $\frac{dN}{dt} \leq 0$, si $N(0) \geq \frac{\Delta}{\mu}$. (car $\frac{dN}{dt} \leq \Delta - \mu N$ d'après (2.19))

Et on a d'après l'inégalité (2.20) de la preuve précédente :

$$N(t) \leq N(0) \exp(-\mu t) - \frac{\Delta}{\mu} \exp(-\mu t) + \frac{\Delta}{\mu}.$$

Si

$$N(0) \leq \frac{\Delta}{\mu}.$$

On multiplie par $\exp(\mu t)$

$$N(0) \exp(\mu t) \leq \frac{\Delta}{\mu} \exp(\mu t)$$

on ajoute $(1 + \exp(-\mu t)) \frac{\Delta}{\mu}$

$$N(0) \exp(-\mu t) - \frac{\Delta}{\mu} \exp(-\mu t) + \frac{\Delta}{\mu} \leq \frac{\Delta}{\mu}.$$

par la translation

$$N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu}.$$

En particulier $N(t) \leq \frac{\Delta}{\mu}$, si $N(0) \leq \frac{\Delta}{\mu}$. par conséquent : Ω est positivement invariant.

2.4 Etude la stabilité

2.4.1 Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0

Le nombre (ou taux) de reproduction de base est un concept fondamental en épidémiologie. Il est une quantité, notée \mathcal{R}_0 , qui représente le nombre d'infections secondaires résultant d'un seul infection dans une population autrement sensible. Suite au développement de la modélisation mathématique des approches en épidémiologie au siècle dernier, \mathcal{R}_0 est devenu un concept clé pour prévenir l'apparition de épidémies, Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors un individu infecté produit moins d'un nouveau individu au cours de sa période infectieuse, et l'infection ne peut pas se développer. Inversement, si

$\mathcal{R}_0 > 1$, chaque individu infecté produit plus d'une nouvelle infection et la maladie peut envahir la population.

Une définition mathématique correcte de \mathcal{R}_0 a été présentée par O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek et J.A.J. Metz en 1990, liée à la valeur propre dominante du soi-disant "opérateur de nouvelle génération". Dans cette définition, les auteurs se concentrent sur un état d'équilibre spécifique du système dynamique épidémiologique, communément appelé l'équilibre sans maladie (DFE), correspondant à la situation où la population est à un équilibre caractérisé par une population sensible constante en l'absence de l'agent infectieux. La valeur \mathcal{R}_0 , c'est-à-dire la valeur propre dominante de l'opérateur de prochaine génération, vise à assurer la stabilité ($\mathcal{R}_0 < 1$) sinon l'instabilité ($\mathcal{R}_0 > 1$) du DFE. Une définition plus mathématiquement réalisable pour le \mathcal{R}_0 , quand traitant de systèmes dynamiques, c'est donc : "Le nombre de nouvelles infections produites par un individu infectieux typique dans une population à un DFE".

2.4.2 Calcul de \mathcal{R}_0 :

(Méthode de la prochaine génération)

Dans cette partie, nous présentons une méthode efficace pour le calcul de \mathcal{R}_0 . Cette méthode, proposée par P. Van Den Driessche et J. Watmough dans, vise à rendre explicite la détermination de la valeur propre dominante de "l'opérateur de la prochaine génération" lorsque concernant le cas spécifique des modèles épidémiques des *EDO*. Par conséquent à la dimension, elle est appelée méthode «matrice de nouvelle génération», et elle est très utile à mettre en pratique[15]. Les auteurs proposent d'écrire le système épidémique des *EDO* en séparant les variables d'état et les flux liés au processus infectieux des autres, Nous définissons les X comme l'ensemble de toutes les maladies États libres. C'est-à-dire $X = \{x \geq 0 \mid x_i = 0, i = 1, \dots, n\}$ La dynamique est alors écrite comme le système compartimenté suivant :

$$x'_i(t) = f_i(x(t)) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1 \dots n.$$

avec $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$.

Où \mathcal{F} , \mathcal{V}_i^+ et \mathcal{V}_i^- sont les fonctions non négatives définies comme suit :

\mathcal{F}_i = Le taux d'apparition de nouvelles infections dans le compartiment i

\mathcal{V}_i^+ =Le taux de transfert d'individus dans le compartiment i ,

\mathcal{V}_i^- =Le taux de transfert d'individus hors du compartiment i .

et les fonctions satisfont aux hypothèses (H1) - (H5) suivant :

- (a) (H1) si $x \geq 0$, alors $\mathcal{F}_i, \mathcal{V}_i^-, \mathcal{V}_i^+ \geq 0, i = 1 \dots n$; car chaque fonction représente un transfert dirigé d'individus, ils sont tous non négatifs.
- (b) (H2) si $x_i = 0$, alors $\mathcal{V}_i^- = 0$; Si un compartiment est vide, alors il n'y a pas de transfert d'individus hors du compartiment par la mort, par l'infection ou soit par tout autre moyen.
- (c) (H3) $\mathcal{F}_i = 0$ si $i > m$ Cela signifie par définition qu'il ne peut rentrer des infectés dans les compartiments non infectés.
- (d) (H4) si $x \in X$ alors $\mathcal{F}_i(x) = 0$ et $\mathcal{V}_i^+ = 0$ pour $i = 1 \dots, n$ Si la population est exempte de la maladie, elles resteront exemptes de maladies, il n'y a pas d'immigration pour l'infection.
- (e) (H5) Si $\mathcal{F}(x)$ est mis à zéro, alors toutes les valeurs propres de $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives.
(x_0 est le DFE ,et $Df(x_0)$ la matrice Jacobian)

Lemme 2.3. Si x_0 est un DFE de (2.1) et $f_i(x)$ satisfait (H1) - (H5), alors les dérivées $\mathcal{F}(x_0)$ et $\mathcal{V}(x_0)$ sont partitionnés comme :

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D\mathcal{V}(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}.$$

où

F et V sont les $m \times m$ matrices définies par :

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right], \quad \text{et} \quad V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right]; \text{ avec } 1 \leq i, j \leq n$$

de plus, F est non négatif, V est une matrice Metzler non singulière et toutes les valeurs propres de J_4 ont une partie réelle positive.

Définition 2.1. Le nombre de reproduction de base lié au DFE d'un système dynamique, noté \mathcal{R}_0 et définie par :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$$

tel que :

FV^{-1} : la Matrice de Nouvelle Génération pour le modèle.

$\rho(FV^{-1})$: le Rayon Spectral de la matrice FV^{-1} , avec $\rho(FV^{-1}) = \max\{|\lambda|; \lambda : \text{les valeurs propres de } FV^{-1}\}$

2.4.3 Application sur la modèle de COVID-19

Calcul \mathcal{R}_0 de modèle (2.3) de COVID-19 :

Rappelons que le système de COVID-19 est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Delta - \frac{\beta(v_1 I_u + v_2 I_r)}{N} S - \mu S \\ \frac{dA}{dt} = \frac{\beta(v_1 I_u + v_2 I_r)}{N} S - (\sigma + \mu) A \\ \frac{dI_u}{dt} = \sigma(1 - \rho) A - (\mu + d_1 + \gamma_{I_u}) I_u \\ \frac{dI_r}{dt} = \sigma \rho A - (\mu + d_2 + \gamma_{I_r}) I_r \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_{I_r} I_r + \gamma_{I_u} I_u - \mu R \end{array} \right. ,$$

Les matrices associées pour les calculs de \mathcal{R}_0 sont données par :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \Delta - \frac{\beta(v_1 I_u + v_2 I_r)}{N} S \\ \frac{\beta(v_1 I_u + v_2 I_r)}{N} S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mu S \\ (\sigma + \mu) A \\ -\sigma(1 - \rho) A + (\mu + d_1 + \gamma_{I_u}) I_u \\ -\sigma \rho A + (\mu + d_2 + \gamma_{I_r}) I_r \\ \gamma_{I_r} I_r + \gamma_{I_u} I_u - \mu R \end{pmatrix}$$

Alors la linéarisation du système de COVID-19 à DFE est donnée par :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta v_1 & \beta v_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ -\sigma(1-\rho) & k_2 & 0 \\ -\sigma\rho & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$

d'après les calculs :

$$V^{-1} = 1/k_1 k_2 k_3 \begin{pmatrix} k_2 k_3 & 0 & 0 \\ \sigma(1-\rho)k_3 & k_1 k_3 & 0 \\ \sigma\rho k_2 & 0 & k_1 k_2 \end{pmatrix},$$

donc

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta v_1 \sigma(1-\rho)}{k_1 k_2} + \frac{\beta v_2 \sigma\rho}{k_1 k_3} & 0 & \frac{\beta v_2}{k_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en utilisant la définition $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$ Donc

le nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 de modèle COVID-19 est :

$$\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{01} + \mathcal{R}_{02}$$

avec

$$\mathcal{R}_{01} = \beta v_1 \frac{\sigma(1-\rho)}{k_1 k_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{02} = \beta v_2 \frac{\sigma\rho}{k_1 k_3}$$

alors

$$\mathcal{R}_0 = \beta v_1 \frac{\sigma(1-\rho)}{k_1 k_2} + \beta v_2 \frac{\sigma\rho}{k_1 k_3}$$

Remarque 2.1. Sur la base des valeurs de paramètres répertoriées dans le tableau 2.2.1, le nombre de reproduction de base pour la dynamique du virus corona donnée dans le système (2.1) est calculée comme $\mathcal{R}_0 \approx 2.4241$ Ainsi le modèle mathématique utilisé dans ce travail donne un nombre de reproduction $\mathcal{R}_0 \approx 2.4241 > 1$,

2.5 Stabilité de l'équilibre sans maladie(DFE)

2.5.1 Calcul l'équilibre sans maladie(DFE)

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = 0 \\ A'(t) = 0 \\ Iu'(t) = 0 \\ Ir'(t) = 0 \\ R'(t) = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \Delta - \frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N} S - \mu S = 0 \\ \frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N} S - k_1 A = 0 \\ \sigma(1 - \rho)A - k_2 Iu = 0 \\ \sigma \rho A - k_3 Ir = 0 \\ \gamma_{Ir} Ir + \gamma_{Iu} Iu - \mu R = 0 \end{array} \right.$$

d'après les calculs on obtint :

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{\Delta}{\beta\left(\frac{(v_1 \sigma(1 - \rho) k_3 Ir)}{k_2 \rho \sigma} + v_2 Ir\right) + \mu} \\ A = \frac{k_3}{\sigma \rho} Ir \\ Iu = \frac{(\sigma(1 - \rho) k_3)}{k_2 \rho \sigma} Ir \\ R = (\gamma_{Ir} + \gamma_{Iu} \left(\frac{(\sigma(1 - \rho) k_3)}{k_2 \rho \sigma}\right)) Ir \\ Ir \left(\frac{\beta\left(\frac{(v_1 \sigma(1 - \rho) k_3)}{k_2 \rho \sigma} + v_2\right) S}{N} - \frac{k_1 k_3}{\sigma \rho} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

d'après la dernière équation de(2.21)

$$Ir \alpha = 0 \quad (2.22)$$

$$\text{tel que } \alpha = \frac{\beta\left(\frac{(v_1 \sigma(1 - \rho) k_3)}{k_2 \rho \sigma} + v_2\right) S}{N} - \frac{k_1 k_3}{\sigma \rho}$$

Si $Ir = 0$

On remplacer $Ir = 0$ dans les autre équations de (2.21) on obtient

$$S = \frac{\Delta}{\mu}, \quad A = 0, \quad Iu = 0, \quad Ir = 0, \quad R = 0.$$

donc l'équilibre sans maladie(DFE) de modèle (2.3)est :

$$Z_0 = \left(\frac{\Delta}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right).$$

2.5.2 Analyse de la stabilité locale du DFE

Théorème 2.1. *Le DFE du système (2.3) au d'un point d'équilibre Z_0 , est localement asymptotiquement stable si et seulement si $\mathcal{R}_0 < 1$, sinon instable.*

Prouve. On définit la matrice Jacobienne $J|_{Z_0}$ en DFE Z_0 comme :

Pour prouver le résultat, il faut montrer que les valeurs propres de la matrice carrée $J|_{Z_0}$ ont des parties réelles négatives

$$J|_{Z_0} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix}$$

tel que :

$$J_3 = -F, M = F - V = \begin{pmatrix} -k_1 & \beta v_1 & \beta v_2 \\ -\sigma(1 - \rho) & -k_2 & 0 \\ -\sigma\rho & 0 & -k_3 \end{pmatrix},$$

$$J_4 = -V = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ -\sigma(1 - \rho) & -k_2 & 0 \\ -\sigma\rho & 0 & -k_3 \end{pmatrix}$$

On définit $\alpha(M) = \max\{Re(\lambda); \lambda : \text{les valeurs propres de } M\}$

comme F non négatif et V non-singulière, alors FV^{-1} est non négatif, utilise théorème de Perron-Frobenius alors $\rho(FV^{-1})$ est une valeur propre de la matrice FV^{-1} .

Et on a les valeurs propres de $J_4 = \{-k_1, -k_2, -k_3\}$, alors $\alpha(J_4) = \max\{-k_1, -k_2, -k_3\} < 0$, et on a $f = F - V$ et d'après théorème de Varga : $\alpha(F - V) < 0 \iff \alpha(M) < 0 \iff \mathcal{R}_0 < 1$ Donc, si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors $\alpha(J|_{Z_0}) < 0$, le point DFE Z_0 du système (2.1) est localement asymptotiquement stable.

2.5.3 Stabilité globale

Théorème 2.2. *Pour $\mathcal{R}_0 < 1$, le DFE Z_0 du système (2.1), est globalement asymptotiquement stable sur Ω et instable pour $\mathcal{R}_0 > 1$.*

Prouve. Pour montrer la stabilité globale de l'équilibre sans maladie, nous construisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$L(t) = B_1A + B_2Iu + B_3Ir.$$

tel que B_i , pour $i = 1, 2$ et 3 sont des constantes positives à choisir plus tard.

On va calculer la dérivée de la fonction L :

$$\frac{dL}{dt} = B_1 \frac{dA}{dt} + B_2 \frac{dIu}{dt} + B_3 \frac{dIr}{dt}.$$

$$\frac{dL}{dt} = B_1 \left[\frac{\beta(v_1Iu + v_2Ir)}{N} S - k_1A \right] + B_2 [\sigma(1 - \rho)A - k_2Iu] + B_3 [\sigma\rho A - k_3Ir]$$

$$\frac{dL}{dt} \leq B_1 [\beta(v_1Iu + v_2Ir) - k_1A] + B_2 [\sigma(1 - \rho)A - k_2Iu] + B_3 [\sigma\rho A - k_3Ir]$$

car $S \leq N$.

$$\frac{dL}{dt} = B_1 k_1 \left[\frac{\sigma(1 - \rho)B_2 + \sigma\rho B_3}{B_1 k_1} - 1 \right] A + [B_1 \beta v_1 - k_2 B_2] Iu + [B_1 \beta v_2 - k_3 B_3] Ir. \quad (2.23)$$

On choisit :

$$B_1 = 1, B_2 = \frac{\beta v_1}{k_2}, B_3 = \frac{\beta v_2}{k_3}.$$

On remplacer B_1, B_2 et B_3 dans (2.21), on obtient :

$$\frac{dL}{dt} \leq k_1(\mathcal{R}_0 - 1)A.$$

alors : si $\mathcal{R}_0 < 1$, $\frac{dL}{dt} < 0$, sur Ω , et le plus grand invariant compact dans Ω est le singleton Z_0 donc d'après "l'invariant principale de LaSalle" : Z_0 est globalement asymptotiquement stable dans Ω .

2.6 Existence et stabilité de l'équilibre endémique (EE)

Lemme 2.4. *Un équilibre endémique positif (EE) unique existe lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$.*

Prouve. L'(EE) de (2.1) à $Z^* = (S^*, A^*, Iu^*, Ir^*, R^*)$ est obtenue en positionnant le côté droit du système (2.1) égal à zéro, on obtient : d'après la dernière équation de (2.21) et d'après (2.22) :

Si $\alpha = 0$ alors :

$$\left(\frac{\beta \left(\frac{v_1 \sigma (1 - \rho) k_3}{k_2 \rho \sigma} + v_2 \right) S^*}{N^*} - \frac{k_1 k_3}{\sigma \rho} \right) = 0 \text{ D'après les calculs on obtient :}$$

$$S^* = \frac{N^*}{\mathcal{R}_0}$$

d'autre part on a : $N = S + A + Iu + Ir + R$

donc, nous concluons qu'une (EE) unique existe chaque fois que $\mathcal{R}_0 > 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} S^* = \frac{N^*}{\mathcal{R}_0} \\ A^* = \frac{N^* (\mathcal{R}_0 - 1) k_2 k_3}{\mathcal{R}_0 (k_2 k_3 + k_3 \sigma (1 - \rho) (\gamma_{Iu} + 1) + \sigma \rho k_2 (\gamma_{Ir+1}))} \\ Iu^* = \frac{\sigma (1 - \rho) N^* (\mathcal{R}_0 - 1) k_3}{\mathcal{R}_0 (k_2 k_3 + k_3 \sigma (1 - \rho) (\gamma_{Iu} + 1) + \sigma \rho k_2 (\gamma_{Ir+1}))} \\ Ir^* = \frac{\sigma \rho N^* (\mathcal{R}_0 - 1) k_2}{\mathcal{R}_0 (k_2 k_3 + k_3 \sigma (1 - \rho) (\gamma_{Iu} + 1) + \sigma \rho k_2 (\gamma_{Ir+1}))} \\ R^* = \frac{N^* (\mathcal{R}_0 - 1) (k_3 \sigma (1 - \rho) \gamma_{Iu} + \sigma \rho k_2 \gamma_{Ir})}{\mathcal{R}_0 (k_2 k_3 + k_3 \sigma (1 - \rho) (\gamma_{Iu} + 1) + \sigma \rho k_2 (\gamma_{Ir+1}))} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

donc de (2.24) nous concluons qu'une (EE) unique existe chaque fois que $\mathcal{R}_0 > 1$.

2.6.1 Stabilité locale

Théorème 2.3. *Pour $\mathcal{R}_0 > 1$, le point d'équilibre endémique $Z^* = (S^*, A^*, Iu^*, Ir^*, R^*)$ de modèle COVID-19 (2.1) est localement asymptotiquement stable.*

Prouve. La matrice jacobienne $J|_{Z^*}$ du système (2.1) à l'(EE) Z^* est obtenue par :

$$J|_{Z^*} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta Q(N^* - S^*)}{N^{*2}} - \mu & \frac{\beta QS^*}{N^{*2}} & -\frac{\beta S^*(v_1 N^* - Q)}{N^{*2}} & -\frac{\beta S^*(v_2 N^* - Q)}{N^{*2}} \\ \frac{\beta Q(N^* - S^*)}{N^{*2}} & -\frac{\beta QS^*}{N^{*2}} - k_1 & \frac{\beta S^*(v_1 N^* - Q)}{N^{*2}} & \frac{\beta S^*(v_2 N^* - Q)}{N^{*2}} \\ 0 & \sigma(1 - \rho) & -k_2 & 0 \\ 0 & \sigma\rho & 0 & -k_3 \end{pmatrix}$$

avec $Q = (v_1 Iu + v_2 Ir)$.

le polynôme caractéristique associe par $J|_{Z^*}$ est :

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0. \quad (2.25)$$

tel que :

$$a_1 = \{k_1 + k_2 + k_3 + \mu + \frac{\beta Q}{N^*}\}.$$

$$a_2 = \left\{ \frac{\beta S}{N^{*2}}((v_1 N^* - Q)\sigma(1 - \rho) + (v_2 N^* - Q)\sigma\rho) + \mu\left(\frac{\beta QS^*}{N^{*2}} + k_1 + k_2 + k_3\right) + k_1\left(\frac{\beta Q(N^* - S^*)}{N^{*2}} + k_2 + k_3\right) + k_3\frac{\beta Q}{N^*} + k_2\frac{\beta Q}{N^*} \right\}.$$

$$a_3 = \left\{ \frac{\beta S^*}{N^{*2}}[\sigma(1 - \rho)(Q - v_1 N^*)(k_2 + \mu) + \sigma\rho(Q - v_2 N^*)(k_2 + \mu)k_1 k_2 k_3 + \frac{\beta QS^*}{N^{*2}}] + \left(\frac{\beta Q(N^* - S^*)}{N^{*2}} - \mu\right)\left(\frac{\beta QS^*}{N^{*2}} + k_1\right)(k_2 + k_3) + k_2 k_3 \right\}.$$

$$a_4 = \left\{ -\mu\left(\frac{\beta S^*}{N^{*2}}((v_1 N^* - Q)\sigma(1 - \rho)k_2 + (v_2 N^* - Q)\sigma\rho k_3) - \frac{\beta QS^*}{N^{*2}}k_2 k_3\right) + k_1 k_2 k_3\left(\frac{\beta Q}{N^{*2}}(N^* - S^*) + \mu\right) \right\}.$$

alors, on utilise les conditions de Routh-Hurwitz, les valeurs propres du polynôme caractéristique (2.25) seront négatives si :

$$a_i > 0, i = 1, 2, 3, 4 \text{ et } a_1 a_2 a_3 > a_1^2 a_4 + a_3^2.$$

donc l'équilibre endémique du modèle (2.1) est localement asymptotiquement stable si $\mathcal{R}_0 > 1$.

2.6.2 Analyse de la bifurcation en arrière

Pour discuter l'existence d'une bifurcation vers l'arrière du système (2.1) on utilise la théorie de la variété centrale[4] :

Si on prend β comme paramètre de bifurcation,

pour $\mathcal{R}_0 = 1$, on obtient :

$$\beta^* = \beta = \frac{k_1 k_2 k_3}{v_1 \sigma (1 - \rho) k_3 + v_2 \sigma \rho k_2}.$$

on prend :

$S = x_1, A = x_2, Iu = x_3, Ir = x_4$ et notée $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, alors on peut écrire le modèle (2.1) sous la forme : $\frac{dx}{dt} = f$, tel que $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$, donc on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \Delta - \frac{\beta(v_1 x_3 + v_2 x_4)x_1}{N} - \mu x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{(v_1 x_3 + v_2 x_4)x_1}{N} - k_1 x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = \sigma(1 - \rho)x_2 - k_2 x_3 \\ \frac{dx_4}{dt} = \sigma \rho x_2 - k_3 x_4 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

avec $N = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

La matrice jacobienne associée de (2.26) à Z_0 est :

$$J = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{k_1 k_2 k_3 v_1}{v_1 \sigma (1 - \rho) k_3 + v_2 \sigma \rho k_2} & -\frac{k_1 k_2 k_3 v_2}{v_1 \sigma (1 - \rho) k_3 + v_2 \sigma \rho k_2} \\ 0 & -k_1 & \frac{k_1 k_2 k_3 v_1}{v_1 \sigma (1 - \rho) k_3 + v_2 \sigma \rho k_2} & \frac{k_1 k_2 k_3 v_2}{v_1 \sigma (1 - \rho) k_3 + v_2 \sigma \rho k_2} \\ 0 & \sigma(1 - \rho) & -k_2 & 0 \\ 0 & \sigma \rho & 0 & -k_3 \end{pmatrix}$$

notées les valeurs propres droites et gauches par :

$w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ et $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ respectivement :

$$\begin{cases} -\mu w_1 - \beta v_1 w_3 - \beta v_2 w_4 = 0 \\ -k_1 w_2 + \beta v_1 w_3 + \beta v_2 w_4 = 0 \\ \sigma(1 - \rho)w_2 - k_2 w_3 = 0 \\ \sigma \rho w_2 - k_3 w_4 = 0 \end{cases}$$

alors :

$$w_1 = \frac{-\beta w_3}{\mu} \left(v_1 - v_2 \left(\frac{\sigma \rho k_2}{\sigma(1 - \rho)k_3} \right) \right)$$

$$w_2 = \frac{k_2 w_3}{\sigma(1 - \rho)}$$

$$w_3 > 0 \text{ et } w_4 = \frac{\sigma \rho k_2 w_3}{\sigma(1 - \rho)k_3}$$

$$\begin{cases} -\mu z_1 = 0 \\ -k_1 z_2 + \sigma(1 - \rho)z_3 + \sigma \rho z_4 = 0 \\ -\beta v_1 z_1 + \beta v_1 z_2 - k_2 z_3 = 0 \\ -\beta v_2 z_1 + \beta v_2 z_2 - k_3 z_4 = 0 \end{cases}$$

alors

$$z_1 = 0, z_2 > 0, z_3 = \frac{\beta v_1 z_2}{k_2}, z_4 = \frac{\beta v_2 z_2}{k_3}.$$

Calcul a :

on utilise les dérivés partiels suivants :

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{-\beta v_1 \mu}{\Delta}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_3} = \frac{-2\beta v_1 \mu}{\Delta}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial x_4} = \frac{-\beta(v_1 + v_2)\mu}{\Delta}$$

donc

$$a = \frac{-\beta v_1 \mu}{\Delta} (z_1 w_2 w_3 v_1 + 2z_2 w_3^2 v_1 + z_2 w_3 w_4 (v_2 + v_1)).$$

calcule b :

utilise les dérivés partiels suivants :

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3 \partial \beta} = v_1 > 0.$$

donc on obtient :

$$b = v_1 z_2 w_3 > 0.$$

Étant donné que tous les termes des expressions de b sont positifs ,donc $b > 0$,par conséquent ,la présence de la bifurcation à $\beta = \beta^*$ dépend uniquement du signe de a .

Etude le problème du Contrôle optimal

Dans ce chapitre, Nous introduisons la simulation numérique des paramètres et l'analyse de sensibilité de \mathcal{R}_0 , et on va étudier le problème du contrôle du modèle COVID-19.

3.1 Simulation numérique et discussion

Cette section est consacrée à la réalisation des résultats de simulation de la transmission COVID-19-modèle (2.1). Le modèle est résolu numériquement dans Matlab. Les valeurs estimées des paramètres données dans le tableau 2.2.1 sont utilisés dans le processus de simulation afin d'étudier l'impact de diverses interventions non pharmaceutiques contre la propagation du COVID-19 en Algérie.

Figure 3.1 ; pour : $\beta = 0.7149$ le nombre d'individus infectés augmente tandis que pour $\beta = 0.1$ le nombre d'individus infectés diminue. Cette interprétation graphique indique que la distanciation sociale réduite le nombre de nouveaux cas infectés, et la mise en place de mesures qui réduisent les contacts entre les personnes, notamment en restant à deux mètres l'un de l'autre, où préférez rester à la maison.

Inclure la réduction de β conduit à une réduction des contacts et donc à une diminution du nombre de personnes infectées.

Aussi, les figures 3.2 et 3.3 montrent que le taux d'infection (taux de contacts) v_2 et v_1 dû aux personnes infectées détectées (I_r) et non découvertes (I_u), respectivement, ont un effet sur l'augmentation et la diminution du nombre de personnes infectées en Algérie.

Par conséquent, plus on diminue le taux de contact v_1 et v_2 , moins il y a des personnes infectées. Par conséquent, les mesures nécessaires doivent être prises (distanciation sociale, Quarantaine...).

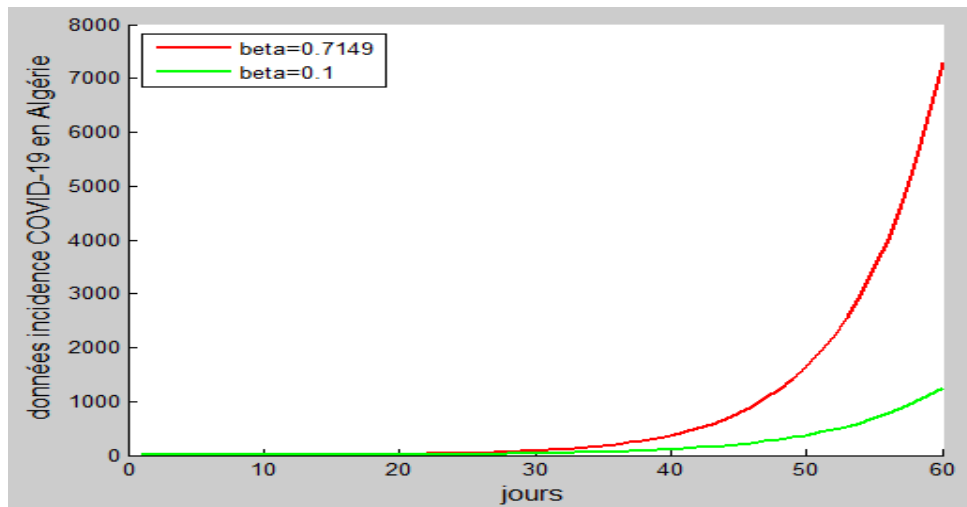


FIGURE 3.1 – Effet taux de contact β a le nombre des cases infectés de COVID-19

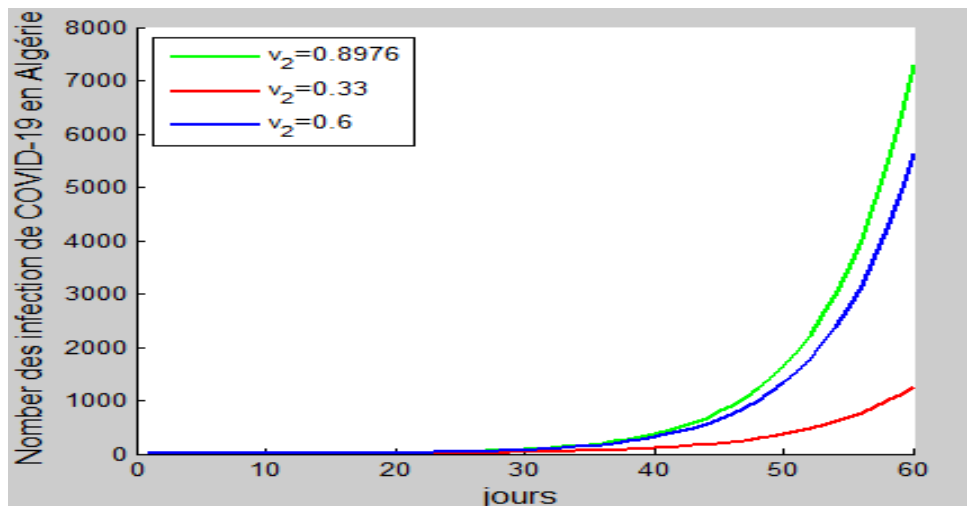


FIGURE 3.2 – Effet taux de contact v_2 a le nombre des cases infectés de COVID-19

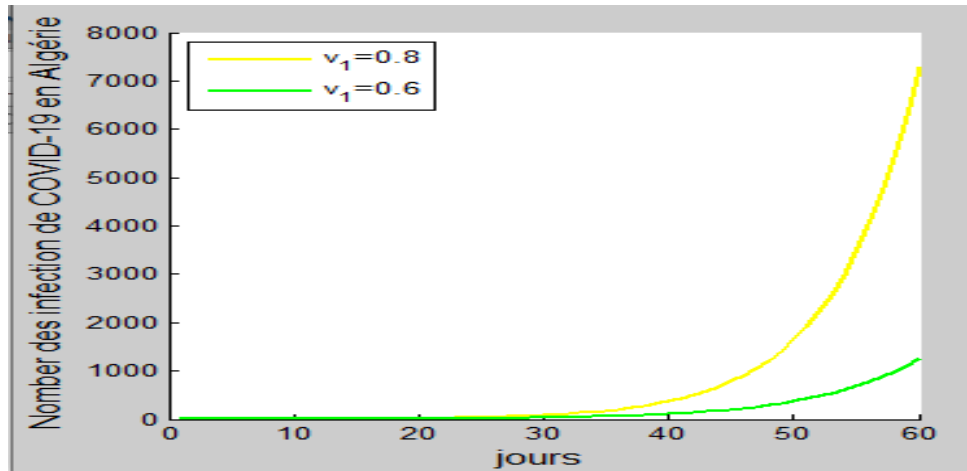


FIGURE 3.3 – Effet taux de contact v_1 a le nombre des cases infectés de COVID-19

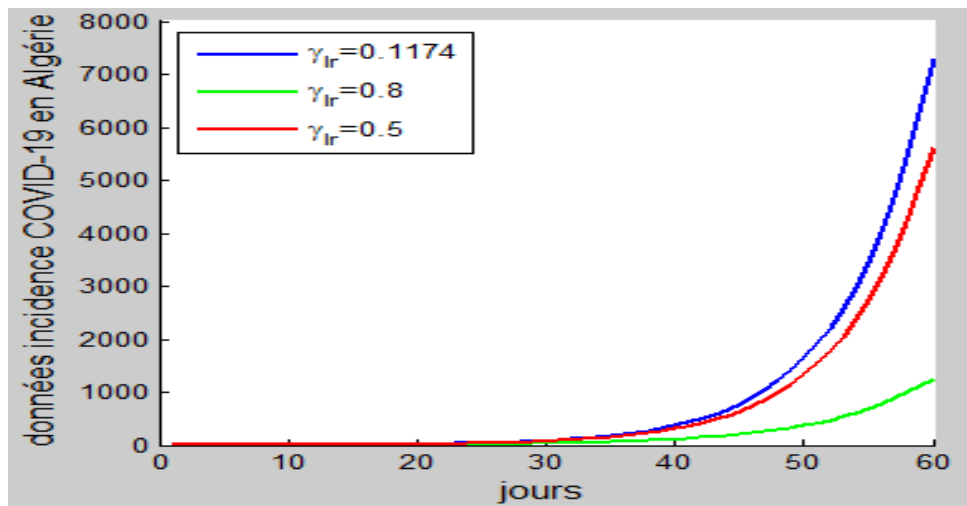


FIGURE 3.4 – Effet taux des interventions hospitalières γ_{I_r} ale nombre des infectés COVID-19

Figure 3.4, explique l'effet du taux de traitement γ_{I_r} sur le nombre de nouveaux cas cumulés d'infection. Clairement d'après la figure 3.4, en augmentant le paramètre de traitement γ_{I_r} le nombre total d'individus infectés est diminué.

3.2 Analyse de sensibilité de \mathcal{R}_0

L'analyse de sensibilité est utilisée pour mesurer les facteurs dominants du modèle qui influencent grandement la prévalence d'une infection. Comme la transmission de la maladie COVID-19 est liée au nombre de reproduction de base \mathcal{R}_0 , nous étudions l'effet de chaque paramètre introduit dans le système (2.1) sur \mathcal{R}_0 . Cela nous a conduit à déterminer les paramètres les plus potentiels dans la propagation du virus Corona . Traiter donc avec l'émergence du COVID-19. L'approche naturelle consiste à calculer les dérivées partielles de la valeur de \mathcal{R}_0 par rapport aux valeurs des paramètres du système (2.1), en utilise l'indice de sensibilité normalisé avant de \mathcal{R}_0 .

Définition 3.1. (L'indice de sensibilité)

L'indice de sensibilité avant normalisé variable pour mesurer le changement relatif de \mathcal{R}_0 , au changement des paramètres Ψ du modèle (2.1), et défini par :

$$S_{\Psi}^{\mathcal{R}_0} = \frac{\Psi}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \Psi}$$

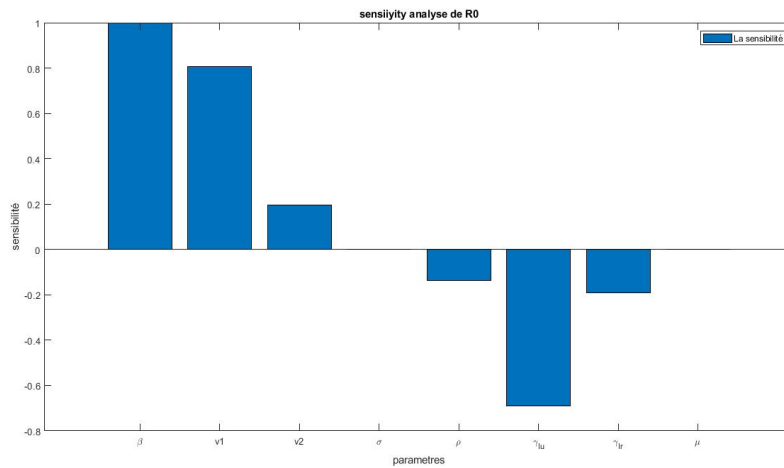
On utilise la définition 3.1 : alors :

$$\begin{aligned} S_{\beta}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \beta} = 1 \\ S_{v_1}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{v_1}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial v_1} = \frac{v_1 \beta \sigma \rho}{\mathcal{R}_0 k_1 k_2} \\ S_{v_2}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{v_2}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial v_2} = \frac{\beta \sigma \rho v_2}{k_1 k_3 \mathcal{R}_0} \\ S_{\sigma}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\sigma}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \sigma} = \frac{\mu}{k_1} \\ S_{\rho}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\rho}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \rho} = \frac{-\beta v_1 \sigma \rho}{\mathcal{R}_0 k_1 k_2} + \frac{\mathcal{R}_{02}}{\mathcal{R}_0} \\ S_{\gamma_{Iu}}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\gamma_{Iu}}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \gamma_{Iu}} = -\left(\frac{\gamma_{Iu}}{\mathcal{R}_0 k_2}\right) \mathcal{R}_{01} \\ S_{\gamma_{Ir}}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\gamma_{Ir}}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \gamma_{Ir}} = -\mathcal{R}_{02} \frac{\gamma_{Ir}}{\mathcal{R}_0 k_3} \\ S_{\mu}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\mu}{\mathcal{R}_0} \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \mu} = -\frac{\mu}{\mathcal{R}_0} \left(\frac{\mathcal{R}_{01}(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} + \frac{\mathcal{R}_{02}(k_1 + k_3)}{k_1 k_3} \right) \end{aligned}$$

TABLE 3.1 – Résultats de analyse de sensabilité de \mathcal{R}_0

paramètres	description	sensibilité
β	Taux de force de transmission de A à S	1
v_1	Taux de transmission de personnes non détectées	0.8075
v_2	Taux de transmission de personnes détectées	0.1969
σ	Taux d'incubation	0.0005
ρ	La proportion d'infection asymptomatique	-0.1375
γ_{Iu}	Taux de récupération des personnes infectieuses non détectées	-0.6885
γ_{Ir}	Taux de récupération des personnes infectieuses détectées	-0.1924
μ	Taux de mortalité naturelle	-0.0001

À partir du tableau 3.2, nous pouvons voir que les paramètres β , v_1 , v_2 et σ ont un signe positif qui signifie que \mathcal{R}_0 augmente avec le paramètre. Alors que le reste des paramètres ont un signe négatif signifié que \mathcal{R}_0 diminue pour des valeurs plus élevées des paramètres.

FIGURE 3.5 – analyse de sensibilité pour \mathcal{R}_0

3.3 L'existence et l'unicité de la solution des système de contrôle

Les systèmes de contrôle généraux donnés par :

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où f définie sur $I \times V \times U$; I est un intervalle de \mathbb{R} , V est un ouvert de \mathbb{R}^n , et U un ouvert de \mathbb{R}^m .

Pour rester dans un cadre très général, il suffit de supposer que chaque contrôle $u(\cdot)$ considéré la fonction $F : (t, X) \rightarrow f(t, X(t), u(t))$ vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy lipshitz.

Remarquons que en fonction de la classe de contrôle considérée ces hypothèses permet être plus ou moins difficiles à vérifier, mais on peut donner des hypothèses moins générales, mais suffisantes dans la majorité des cas les hypothèses sont :

- (a) La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times U \times V$
- (b) L'ensemble des contrôles est inclus dans $L_{loc}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$

et dans ce cas, on aura que les hypothèses du théorème de Cauchy lipshitz sont vérifiées et $\forall u(\cdot)$ fixé, il existe une solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

3.4 L'étude de l'existence d'un contrôle optimale

Considérons le système de contrôle suivante :

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $u(t)$ le contrôle et $x(t)$ l'état du système le problème de contrôle optimale consiste à chercher un contrôle $u(t)$ et la variable d'état associée $x(\cdot)$ qui minimise ou maximise la fonction objective J tel que

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt \quad (3.3)$$

avec les fonctions $L \in C^1$ sur $I \times U \times V$ et f continue sur V Soit M_0 et M_1 deux sous ensembles de V . Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x_u(\cdot)$ solutions de :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, x_u(t), u(t)) \\ x_u(t_0) \in M_0, x_u(T) \in M_1 \\ \text{minimisant la fonction } J(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

On dit que le problème de controle optimal est à temps final non fixé si T est libre.

Définition 3.2. Soit $T > 0$, l'application entrée-sortie en temps T du système contrôlé initialisé à x_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_T : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\rightarrow x_u(t) \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles admissible, cette application associe à un contrôle u admissible, le point de la trajectoire associée à $u(\cdot)$

Définition 3.3. Soit $u(\cdot)$ un contrôle défini sur $I = [0, T]$ tel que la trajectoire associée $x_u(\cdot)$ issue de $x(0) = x_0$ est définie sur I .

On dit que le contrôle $u(\cdot)$ est singulier sur I si la différentielle au sens de Frechet dE_T n'est pas surjective sinon on dit qu'il regulier

Proposition 3.1. Soit $u(\cdot)$ un contrôle singulier sur $[0, T]$ pour le système (3.2) et $x(\cdot)$ la trajectoire singulier associée, alors il existe une application absolument continue $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ appelée vecteur adjoint, telle que les équations suivantes

sont vérifiées pour presque tout $t \in [0, T]$ tel que :

$$\begin{cases} \lambda'_i(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), \lambda(t), u(t))}{\partial x_i}, i = 1 \dots n \\ \frac{\partial H(t, x(t), \lambda(t), u(t))}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où H est l'hamiltonienne du système(3.2)donne par :

$$H(t, x(t), \lambda(t), u(t)) = \lambda_0 L(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) f(t, x(t), u(t)),$$

avec $\lambda_0 = 0$ les multiplicateurs de lagrange.[6]

Théorème 3.1. (Principe de maximum de Pontrygin(P.M.P))[6, 16]

Supposons que f et $g \in C^1/t, x, u$ est convexe en u , supposons que $u(t)$ et le contrôle optimale pour le problème(3.3) et soit $x^*(t)$ l'état associé et $\lambda(t)$ une fonction différentielle continue avec $\lambda(t) \geq 0$; $\forall t$. supposons que $\forall t_0 \leq t \leq t_f$; $H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0$

Alors

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$$

3.5 Modèle COVID-19 avec contrôle optimal

Dans cette section, Introduisons le problème du contrôle dans le modèle SAIR (2.1) et étudions la solution de ce problème.

3.5.1 Problème de contrôle optimal

Nous formulons un problème du contrôle optimal pour le modèle (2.1) basé sur les résultats de l'analyse de sensibilité, ces résultats indiquent qu'une stratégie contrôle qui réduit la probabilité de transmission par contact d'infecté par le COVID-19 les individus avec des personnes sensibles (β , v_1 et v_2) seront bénéfiques pour réduire la prévalence de Coronavirus dans la communauté. et une stratégie qui améliore le taux de guérison γ_{Iu} et γ_{Ir} en utilisant un stérilisateur et en portant un masque ou une auto-isolation ..., sera en outre efficace pour réduire l'infection COVID-19 dans la communauté.

Par conséquent, nous ajoutons deux variables de contrôle dépendant du temps dans le modèle (2.1).

u_1 : Le premier contrôle $u_1(t)$ est l'isolement des personnes infectées et individus non infectés, ce qui réduit la force d'infection associée par un facteur $(1 - u_1(t))$ u_2 : La variable de contrôle dépendant du temps $u_2(t)$ est utilisée pour améliorer le taux de guérison pour les cas infectés par COVID-19.

Donc le modèle de contrôle est formulé après avoir combiné les variables de contrôle mentionnées ci-dessus via le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Delta - \frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N} S(1 - u_1(t)) - \mu S \\ \frac{dA}{dt} = \frac{\beta(v_1 Iu + v_2 Ir)}{N} S(1 - u_1(t)) - (\sigma + \mu)A \\ \frac{dIu}{dt} = \sigma(1 - \rho)A - (\mu + d_1)Iu - \gamma_{Iu}u_2(t)Iu \\ \frac{dIr}{dt} = \sigma\rho A - (\mu + d_2)Ir - \gamma_{Ir}u_2(t)Ir \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_{Ir}u_2(t)Ir + \gamma_{Iu}u_2(t)Iu - \mu R \end{cases} \quad (3.5)$$

Sous réserve des conditions initiales non négatives indiquées avec le modèle (2.1). La fonction du modèle proposé pour minimiser l'infection est donnée comme suit :

$$\mathcal{J}(u_1, u_2) = \int_0^{T_f} \{C_1 S + C_2 Iu + C_3 Ir + \frac{1}{2}(L_1 u_1^2 + L_2 u_2^2)\} \quad (3.6)$$

où les expressions C_i pour $i = 1, 2, 3$ et L_j pour $j = 1, 2$ sont les constantes et représentent l'équilibrage facteurs de coût tandis que T_f représente le temps final. Nous considérons l'objectif quadratique fonctionnel car l'intervention est non linéaire, notre objectif principal est d'étudier un contrôle optimal u_1^*, u_2^* pour la quarantaine et hospitalisation respectivement de telle sorte que :

$$\mathcal{J}(u_1^*, u_2^*) = \min_{\mathcal{U}} J(u_1, u_2)$$

L'ensemble de contrôle associé est donné par :

$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : [0, T_f] \rightarrow [0, 1], (u_1, u_2) \text{ est un Lebesgue mesurable}\}$$

De plus, le lagrangien du système (3.5) décrivant le problème de contrôle est défini dans (3.7) et l'hamiltonien est défini dans (3.8) comme suit :

$$\mathcal{L} = C_1S + C_2Iu + C_3Ir + \frac{1}{2}(L_1u_1^2 + L_2u_2^2) \quad (3.7)$$

et

$$\mathcal{H} = \lambda_0\mathcal{L} + \lambda_1S' + \lambda_2A' + \lambda_3Iu' + \lambda_4Ir' + \lambda_5R'$$

$\lambda_0 = 1$ et $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, 5$ sont des variables adjoints

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & C_1S + C_2Iu + C_3Ir + \frac{1}{2}(L_1u_1^2 + L_2u_2^2) \\ & + \lambda_1[\Delta - \frac{\beta(v_1Iu + v_2Ir)}{N}S(1 - u_1(t)) - \mu S] \\ & + \lambda_2[\frac{\beta(v_1Iu + v_2Ir)}{N}S(1 - u_1(t)) - (\sigma + \mu)A] \\ & + \lambda_3[\sigma(1 - \rho)A - (\mu + d_1)Iu - \gamma_{Iu}u_2(t)Iu] \\ & + \lambda_4[\sigma\rho A - (\mu + d_2)Ir - \gamma_{Ir}u_2(t)Ir] \\ & + \lambda_5[\gamma_{Ir}u_2(t)Ir + \gamma_{Iu}u_2(t)Iu - \mu R] \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.5.2 Solution de contrôle optimale

Nous utilisons le principe du maximum de Pontryagin afin de résoudre problème de COVID-19 de contrôle optimale (3.5). Pour ce faire, soit u_1^*, u_2^* sont la solution optimale recherchée alors,

les conditions correspondantes du principe maximum de Pontryagin's utilisé dans le processus de solution sont comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dZ}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial \lambda_j} \\ \frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial u_m} = 0 \\ \frac{d\lambda_j}{dt}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial Z} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

En utilisant les conditions présidents (3.9), nous présentons la solution du système d'optimalité dans le théorème suivant :

Théorème 3.2. Les contrôles optimaux u_1^*, u_2^* et les solutions S^*, A^*, Iu^*, Ir^* et R^* du système correspondant (3.5) qui minimise $\mathcal{J}(u_1, u_2)$ sur \mathcal{U} . Alors là il existe des variables adjoints $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 satisfaisant $\frac{d\lambda_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i}$ où $i = S, A, Iu, Ir, R$ avec des conditions de transversalité $\lambda_j(T_f) = 0$ pour $j = 1, 2, 3, 4, 5$ et

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= \min\{1, \max(0, (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta(v_1 Iu^* + v_2 Ir^*)}{N^* L_1} S^*)\} \\ u_2^* &= \min\{1, \max(0, \frac{(\lambda_3 - \lambda_5) Iu^* \gamma_{Iu} + (\lambda_3 - \lambda_5) Ir^* \gamma_{Ir}}{L_2})\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Prouve. : D'après troisième condition de (3.9), alors

$$\frac{d\lambda_1}{dt}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial S^*} = \lambda_1 - C_1 + (\lambda_1 \mu - \lambda_2) \frac{(1 - u_1) \beta(v_1 Iu^* + v_2 Ir^*) (N^* - S^*)}{N^{*2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dt}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial A} = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta(v_1 Iu^* + v_2 Ir^*) S^* (1 - u_1)}{N^{*2}} - \lambda_3 \sigma (1 - \rho) - \\ &\lambda_4 \sigma \rho + (\sigma + \mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_3}{dt}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial Iu} = -C_2 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{S^* \beta v_1 (1 - u_1) N^* - \beta(v_1 Iu^* + v_2 Ir^*) S^* (1 - u_1)}{N^{*2}} - \\ &\lambda_5 u_2 \gamma_{Iu} + \lambda_3 \gamma_{Iu} u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_4}{dt}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial Ir} = -C_3 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{S^* \beta v_2 (1 - u_1) N^* - \beta(v_1 Iu^* + v_2 Ir^*) S^* (1 - u_1)}{N^{*2}} - \\ &\lambda_5 u_2 \gamma_{Ir} + \lambda_4 \gamma_{Ir} u_2 \end{aligned}$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial R} = \lambda_5 \mu + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta(v_1 Iu^* + v_2 Ir^*) S^* (1 - u_1)}{N^{*2}}$$

Maintenant, en utilisant les conditions optimales, (deuxième condition de (3.9)) nous différencions la fonction hamiltonienne par rapport aux variables de contrôle optimales pour obtenir les valeurs de u_1^*, u_2^*

$$\frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial u_m} = 0$$

alors

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial u_1} = L_1 u_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\beta(v_1 Iu^* + v_2 Ir^*)}{N^*} S^*$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}(t, u_m^*, \lambda_j)}{\partial u_2} = L_2 u_2 + (\lambda_5 - \lambda_3) I u^* \gamma_{Iu} + (\lambda_5 - \lambda_3) I r^* \gamma_{Ir}$$

donc

$$u_1^* = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta(v_1 I u^* + v_2 I r^*)}{N^*} S^*}{L_1}$$

$$u_2^* = \frac{(\lambda_3 - \lambda_5) I u^* \gamma_{Iu} + (\lambda_3 - \lambda_5) I r^* \gamma_{Ir}}{L_2}$$

donc

$$u_1^* = \begin{cases} u_{min} & \text{si } (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta(v_1 I u^* + v_2 I r^*)}{N^* L_1} S^* \leq u_{min} \\ (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta(v_1 I u^* + v_2 I r^*)}{N^* L_1} S^* & \text{si } u_{min} \leq (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta(v_1 I u^* + v_2 I r^*)}{N^* L_1} S^* \leq u_{max} \\ u_{max} & \text{si } (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta(v_1 I u^* + v_2 I r^*)}{N^* L_1} S^* \geq u_{max} \end{cases}$$

et

$$u_2^* = \begin{cases} u_{min} & \text{si } \frac{(\lambda_3 - \lambda_5) I u^* \gamma_{Iu} + (\lambda_3 - \lambda_5) I r^* \gamma_{Ir}}{L_2} \leq u_{min} \\ \frac{(\lambda_3 - \lambda_5) I u^* \gamma_{Iu} + (\lambda_3 - \lambda_5) I r^* \gamma_{Ir}}{L_2} & \text{si } u_{min} \leq \frac{(\lambda_3 - \lambda_5) I u^* \gamma_{Iu} + (\lambda_3 - \lambda_5) I r^* \gamma_{Ir}}{L_2} \leq u_{max} \\ u_{max} & \text{si } \frac{(\lambda_3 - \lambda_5) I u^* \gamma_{Iu} + (\lambda_3 - \lambda_5) I r^* \gamma_{Ir}}{L_2} \geq u_{max} \end{cases}$$

donc

De plus, les contrôles optimaux associés u_1^* et u_2^* sont donnés par

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= \min\left\{1, \max\left(0, (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\beta(v_1 I u^* + v_2 I r^*)}{N^* L_1} S^*\right)\right\} \\ u_2^* &= \min\left\{1, \max\left(0, \frac{(\lambda_3 - \lambda_5) I u^* \gamma_{Iu} + (\lambda_3 - \lambda_5) I r^* \gamma_{Ir}}{L_2}\right)\right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pour les résultats numériques et graphiques, des méthodes numériques et des résultats de simulation sont appliqué pour trouver la meilleure manière d'approcher du contrôle optimal dans ce cas.

Conclusion

Dans ce travail, on présente une analyse du modèle mathématique qui modélise de propagation Covid-19, qui est au format SAIR.

L'étude d'analyse mathématique (l'existence, unicité de solution et la stabilité) pour le système avec et sans contrôle. Dans le futur on va améliorer la modélisation mathématique avec vaccins.

Bibliographie

- [1] Abdon Atangana. *Modelling the spread of covid-19 with new fractal-fractional operators :Can the lockdown save mankind before vaccination* *Chaos, Solitons Fractals*, 136 :109860, 2020.
- [2] S,ahin Utkucan and S,ahin Tezcan. *Forecasting the cumulative number of confirmed cases of covid-19 in italy, uk and usa using fractional nonlinear grey bernoulli model.* *Chaos, Solitons Fractals*, page 109948, 2020.
- [3] Calistus N Ngonghala, Enahoro Iboi, Steffen Eikenberry, Matthew Scotch, Chandini Raina MacIntyre, Matthew H Bonds, and Abba B Gumel. *Mathematical assessment of the impact of non-pharmaceutical interventions on curtailing the 2019 novel coronavirus.* *Mathematical Biosciences*, page 108364, 2020.
- [4] Carlos Castillo-Chavez, Baojun Song, *Dynamical models of tuberculosis and their applications*, *Math. Biosci. Eng.* 1 (2) (2004)361–404.
- [5] Duccio Fanelli and Francesco Piazza. *Analysis and forecast of covid-19 spreading in china, italy and france.* *Chaos, Solitons Fractals*, 134 :109761, 2020.
- [6] Emmanuel Trélat, *Contrôle optimal Notes de cours Master de Mathématiques, Université d’Orléans 2007/2008*
- [7] Hamby DM. *A review of techniques for parameter sensitivity analysis of environmental models.* *Environmental monitoring and assessment.* 1994
- [8] Helton JC, Iman RL, Brown JB. *Sensitivity analysis of the asymptotic behavior of a model for the environmental movement of radionuclides.* *Ecological modelling.* 1985 ;

- [9] Jianhong Wu, Biao Tang, Nicola Luigi Bragazzi, Kyeongah Nah, and Zachary Mc-Carthy. *Quantifying the role of social distancing, personal protection and case detection in mitigating covid-19 outbreak in ontario, canada. Journal of Mathematics in Industry*, 10(1) :1–12, 2020.
- [10] J. LaSalle, *Stability of nonautonomous systems*, *Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl.*, 1 (1976), pp. 83–91.
- [11] J. P. LaSalle, *The stability of dynamical systems*, *Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1976. With an appendix : “Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations” by Z. Artstein, Regional Conference Series in Applied Mathematics.*
- [12] Muhammad Altaf Khan and Abdon Atangana. *Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-ncov) with fractional derivative. Alexandria Engineering Journal*, 2020
- [13] *Nonnegative matrices in the mathematical sciences, vol. 9 of Classics in Applied Mathematics*, *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994. Revised reprint of the 1979 original.*
- [14] Organisation mondiale de la Santé <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>
- [15] Pauline Van den Driessche, James Watmough, *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, Math. Biosci.* 180 (1–2) (2002) 29–48
- [16] Pontryagin LS. *Mathematical theory of optimal processes. CRC Press; 1987.*
- [17] O Torrealba-Rodriguez, RA Conde-Gutiérrez, and AL Hernández-Javier. *Modeling and prediction of covid-19 in mexico applying mathematical and computational models. Chaos, Solitons Fractals*, page 109946, 2020.

المخلص

الهدف من هذه المذكرة هو الدراسة الكمية والنوعية للنمذجة الرياضية لـ Covid-19 في حالة المعادلة التفاضلية. يتم دراسة وجود الحلول وحساب نقاط التوازن ورقم التكاثر الأساسي R_0 . تم تحليل الاستقرار المقارب المحلي عند نقاط التوازن الوبائي. أخيرًا قمنا بدراسة مشكلة التحكم الأمثل المرتبطة بنموذجنا.

الكلمات المفتاحية: نموذج رياضي (كوفيد-19)، نقاط التوازن، رقم التكاثر الأساسي، الاستقرار، نظرية التحكم الأمثل.

Abstract

The objective of this dissertation is the quantitative and qualitative study of the mathematical modeling of Covid-19 in the case of the differential equation. The existence of solutions is studied, the equilibrium points and the basic reproduction number R_0 are calculated. Analysis of local asymptotic stability at epidemic equilibrium points is given. Finally, we study the problem of optimal control linked to our stated model.

Key Words: Mathematical model (Covid-19), equilibrium points, basic reproduction number, stability, optimal control theory.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude quantitative et qualitative de la modélisation mathématique du Covid-19 dans le cas de l'équation différentielle. L'existence de solutions est étudiée, les points d'équilibres et le nombre de reproduction de base R_0 sont calculés. L'analyse de la stabilité asymptotique locale aux points d'équilibres de l'épidémie est donnée. Finalement nous étudions le problème du contrôle optimal lié à notre modèle énoncé

Mots clés : Modèle épidémiologie (Covid-19), points d'équilibres, nombre de reproduction de base, stabilité, théorie du contrôle optimal.