Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Univérsité D'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

Nichani Rabiaa

Thème

Sur les équations différentielles ordinaires aléatoires

Soutenu le 28/06/ 2021 devant le jury composé de :

M. GOUMNI Mohammed	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Président
M. SLAMA Abdeldjalil	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Encadreur
M. CHAHAD Abdelkader	Maître assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République algérienne populaire et démocratique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE AHMED DRAYA - ADRAR
BIBLIOTHÈQUE CENTRALE
Service de recherche bibliographique
N°.....................B.C/S.R.B//U.A/2021

جامعة احمد دراية - ادرار
المكتبـــــة المركـــزية
مصلحة البحث البيبليوغرافي
الرقم..........م .م/م.ب.ب /ج.أ/2021

شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذ(ة): سلامه عبد الجليل

المشرف مذكرة الماستر.

الموسومة بـــ : Sur les équations différentielles ordinaires aléatoires

من إنجاز الطالب(ة): نيستاني ربيعة

و الطالب(ة): ——

كلية : العلوم والتكنولوجيا

القسم : الرياضيات والإعلام الآلي

التخصص: رياضيات

تاريخ تقييم / مناقشة: 2021/06/28

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقييم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.
وبإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والاليكترونية (PDF).

- امضاء المشرف:

ادرار في : 08 JUIL. 2021

مساعد رئيس القسم:

د. فاضل محمد
مساعد رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي
مكلف بما بعد التدرج والبحث العلمي بكلية
العلوم والتكنولوجيا

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
كلية العلوم والتكنولوجيا

ملاحظة :لاتقبل أي شهادة بدون التوقيع والمصادقة.

Dédicace

À tous ceux qui m'ont enseigné une lettre dans ce monde mortel,

aux honorables parents,

À mes chères sœurs,

À mon mari bien-aimé,

À mes fidèles amis,

À tout cela,

je dédie cette humble œuvre et je demande à Dieu le succès.

Remerciements

Et dis, Seigneur, donne-moi plus de connaissance. Dieu soit loué, et Dieu merci. J'ai eu l'honneur aujourd'hui de me tenir entre vos mains. Pour présenter cette présentation, je remercie tous ceux qui m'ont aidé à la réaliser. Je remercie tout particulièrement le directeur, M. Salama Abdel Jalil, de m'avoir fourni avec ce sujet et pour mon soutien et mes encouragements continus. Je tiens également à le remercier pour son aide et sa présence dans le temps qui lui est imparti.

Résumé

L'objet de ce mémoire est d'étudié l'existence et l'unicité des solutions (pathwise solution) des équations différentielles ordinaires aléatoires. Une application pour la l'existence de solution globale, locale et maximale d'une équation différentielles aléatoire d'ordre fractionnaire a été donnée .

Mots clés processus stochastique, équation différentielle ordinaire, intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire, fonction de Carathéodory, équation différentielle d'ordre fractionnaire, point fixe.

Abstract

The object of this dissertation is to study the existence and the uniqueness of the solutions (pathwise solution) of the ordinary random differential equations. An application for the existence of global, local and maximal solution of a fractional order random differential equation has been given.

Keywords Stochastic process, fractional derivative, Carathéodory function, differential equation of fractional order, fixed point,

الملخص

الهدف من هذه الرسالة هو دراسة وجود و وحدانية الحلول للمعادلات التفاضلية العشوائية العادية. تم اجراء تطبيق وجود الحلول الكلية والمحلية والقصوى لمعادلة تفاضلية عشوائية من الرتبة الكسرية.

كلمات مفتاحية : عملية عشوائية ، معادلة تفاضلية عادية ، تكامل و المشتق من الدرجة كسرية ، دالة كراتيودوري معادلة تفاضلية كسرية ، نقطة ثابتة.

Table des matières

Notations

$\Gamma(\alpha)$	fonction Gamma.
D^{α}_{RL}	dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α.
D^{α}	la dérivée fractionnaire au sens de caputo d'ordre α.
I^{α}	Intégrale d'ordre fractionnaire
$v.a$	variable aléatoire
$C := C([0,T],\mathbb{R}^m)$	l'espace de toutes les fonctions continues.
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels .
$p.s$	presque sûement .
$\mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{R}$	ensemble des réels.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des réels positifs $[0,+\infty[$.
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexe.
Ω	espace fondamental d'une expérience aléatoire.
$\mathcal{F}$	tribu.
$P(\Omega)$	ensemble des parties de Ω.
$\mathbb{B}(\mathbb{R}_n)$	la tribu borélienne de $\mathbb{R}_n$
$\mathbb{P}$	mesure de probabilité.
$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$	espace de probabilité.
X	variable aléatoire .
$\sigma(X)$	tribu engendre par la variable X
$R(\Omega,C)$	l'espace métrique de tous les éléments aléatoires en $\mathbb{C}$.

Introduction générale

Les équations différentielles sont un outil puissant pour modéliser et analyser de nombreux phénomènes naturels et pratiques. Dans la modélisation, l'analyse et la prédiction du comportement des phénomènes physiques et naturels, l'accent a été de plus en plus mis sur les méthodes probabilistes. Cela est dû à des groupes de complexité d'incertitudes et d'ignorance qui sont présentes dans la formulation d'un grand nombre de ces problèmes. Par conséquent, nous assisterons à une utilisation de plus en plus importante des formulations aléatoires et stochastiques dans beaucoup disciplines scientifiques et techniques.

En tenant compte de divers effets aléatoires, il est naturel que les équations différentielles ordinaires impliquant des éléments aléatoires, c'est-à-dire les équations différentielles ordinaires aléatoires, jouent un rôle de plus en plus important.

La théorie et les applications des équations différentielles ordinaires aléatoires ont été largement étudiées dans la littérature existante, voir [10, 9, 4, 15].

Dans ce mémoire nous allons définir et étudier l'existence de solution d'une équation différentielle aléatoire et donner une application pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire aléatoire de la forme :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t,\omega) = f(t, x(t,\omega),\omega) \\ x(0,\omega) = x_0(\omega) \end{cases}$$

Le présent mémoire est basé sur le papier de Lupulescu et Donal O'Regan, et Ghaus ur Rahman al. [10], où l'existence de solution d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire aléatoire est obtenue sous les conditions de Carathéodory.

Ce mémoire comprend trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions mathématiques de base nécessaires pour la suite de ce travail.

Le deuxième chapitre est composé de deux parties. Dans la première partie on présente quelques définitions sur les équations différentielles ordinaires (EDO) et quelques théorèmes d'existence et d'unicité. Dans la deuxième partie, les équations différentielles ordinaires aléatoires(EDOA) seront présentées ainsi que définition de la solution par chemin d'échantillon (Parhwise solution).

Dans le troisième chapitre on présente un exemple d'existence et d'unicité de solution d'une équation différentielle aléatoire d'ordre fractionnaire.

Chapitre 1

Notions génerales et définitions

1.1 Notions de probabilité

1.1.1 Tribu

Définition 1.1.
Soit Ω un ensemble quelconque et $\mathcal{F}$ une famille de parties de Ω ($\mathbb{P}(\Omega)$) on dit que $\mathcal{F}$ est une tribu (où σ-algèbre) sur Ω si :

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. si $\mathcal{F} \in \Omega \implies \complement\mathcal{F} \in \Omega$,
3. Toute reunion finie ou infinie dénombrable d'élement de $\mathcal{F}$ est un élement de $\mathcal{F}$, $A_i \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.

1.1.2 Mesure de probabilité

Définition 1.2.
Une mesure sur une tribu $\mathcal{F}$ est une application μ :$\mathcal{F} \longrightarrow [0,\infty]$ telle que

1. $\mu(\emptyset)$=0,
2. σ-additivité : pour tout famille A_n,$n \in \mathbb{N}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ disjoints deux à deux,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} \mu(A_n).$$

Si de plus $\mu(\Omega)$=1, μ est appelée mesure de probabilité et on la note par $\mathbb{P}$.

Définition 1.3. Le triplet (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$) est appelé un espace de probabilité.

1.1.3 Espace de probabilité complet

Définition 1.4.
L'espace de probabilité (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$) est dit complet si pour tout $D \subset \Omega$ négligeable (i.e il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $D \subset A$ et $p(A) = 0$).Alors D est dans $\mathcal{F}$.

1.1.4 Tribu Borélienne

Définition 1.5.
Soit $\mathcal{U}$ une famille de sous ensembles de Ω, il existe un plus petit σ-algèbre $H_{\mathcal{U}}$ qui contient $\mathcal{U}$. $H_{\mathcal{U}}$ est appelée la σ-algèbre engendrée par la famille $\mathcal{U}$:

$$H_{\mathcal{U}}=\{H,H \text{ est une } \sigma\text{-algèbre de } \Omega \text{ qui contient } \mathcal{U} \ \}.$$

Si $\mathcal{U}$ est l'ensemble de tous les ouverts d'un espace topologique ω (ex :$\omega = \mathbb{R}$)Alors :
$\mathbb{B}$ =$H_{\mathcal{U}}$ est appelée la tribu Borélienne sur ω les éléments B de $\mathbb{B}$ sont appelés les boréliens.

1.1.5 Fonctions mesurables

Définition 1.6.
Soit (Ω,$\mathcal{F}$) un espace mesurable, On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable si pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$,f^{-1}(O)$\in \mathcal{F}$.
Plus généralement. si (Ω,$\mathcal{F}$),(E,Y) sont des espaces mesurables, On dit que $f : \Omega \to E$ est mesurable f^{-1}(B)$\in \mathcal{F}$, pour tout $B \in Y$.

1.1.6 Espace métrique

Définition 1.7.
Un espace métrique (X,d) est un ensemble X muni d'une application d :$X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée distance ou métrique, possédant les trois propriétés suivantes :

1. $\forall x,y \in X$: $d(x,y) \geq 0$ et $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

2. $\forall x,y \in X$: d(x,y)=d(y,x) (la symétrie),
3. $\forall x,y,z \in X$: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (l'inégalité triangulaire).

1.1.7 Variables aléatoires

Définition 1.8.
Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ un espace probabilités, on appelle variable aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ une fonction mesurable X de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}_n), X^{\text{-1}}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

1.1.8 Vecteurs aléatoires

Définition 1.9.
Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ un espace de probabilités, On appelle vecteur aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ une fonction mesurable X de Ω dans $\mathbb{R}^n$.

1.1.9 Éléments aléatoires

Définition 1.10.
Soit $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ un espace de probabilités, On appelle élément aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ une fonction mesurable X de Ω dans (X,d).

1.1.10 Processus stochastiques

Un processus aléatoires ou stochastique sont des objets mathématiques destinés à modéliser l'évolution dans le temps des phénomènes ou des systèmes aléatoires. Ils sont décrits par des familles discrètes ou continues de variables ou de vecteurs aléatoires $(X_t)_{t\in I}$ où I est l'ensemble des temps d'observation des états du processus.

Définition 1.11.
Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ définies sur un espace de probabilités $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ à valeur dans $(\mathbb{R}^{\text{n}},\mathbb{B}(\mathbb{R}_n))$.

Définition 1.12.
A toute occurrence $\omega \in \Omega$, on fait correspondre la trajectoire de la réalisation $(X_t(\omega))_t$ du processus définie par l'application :

$$I \to \mathbb{R}^d, t \mapsto X_t(\omega).$$

appelée la trajectoire de (X_t) associée à ω.

Propriétés 1.1. (voir[13]) Soient $\{X_t\}$ et $\{Y_t\}$ deux processus stochastiques définis sur le même espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$.

1. On dit que $\{X_t\}$ et $\{Y_t\}$ sont égaux(i.e $X \equiv Y$) si $X(\omega) = Y(\omega)$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.
2. On dit que $\{Y_t\}$ une modification de $\{X_t\}$, si pour tout $t \in\ I$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.
3. On dit que $\{X_t\}$ et $\{Y_t\}$ sont indistinguables, s'il existe un événement $\Omega^* \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$, tel que pour tout $\omega \in \Omega^*$ et tout $t \in\ I$, on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$.

1.1.11 Mesure de Lebesgue

Définition 1.13.

1. Il existe une unique mesure sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne classique telle que $\mu([a, b]) = b - a$ pour $b > a$, μ s'appelle mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
2. Il existe une unique mesure sur $\mathbb{R}^n$ muni des boréliens classiques telle que : $\mu(\prod_i [a_i,b_i]) = \prod_i (b_i - a_i)$ pour $b_i > a_i$, μ s'appelle mesure de Lebesgue sur$\mathbb{R}^n$.

1.2 Théoréme de point fixe

1.2.1 Espace métrique complet

Définition 1.14. (Suite de Cauchy)
On dit que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (X,d) est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0 \text{ tel que } n,m > N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

On écrit Alors : $d(x_n,x_m) \longrightarrow 0$, quand $n,m \longrightarrow +\infty$.

Définition 1.15. (Suite convergente)
Une suite (x_n) est dite convergente vers a Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$,cela

$$\forall\varepsilon > 0,\exists N_\varepsilon > 0 \text{ tel que } n > N_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n,a) < \epsilon.$$

Définition 1.16. Un espace métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X elle est convergent dans X.

1.2.2 Application contractante

Définition 1.17. Soit (X,d) un espace métrique. L'application $F : X \longrightarrow X$ est dite contractante s'il existe un constant $k \in [0,1]$ telle que :

$$\forall x,y \in X : d(F(x),F(y)) \leq kd(x,y).$$

k est appelée constante de contraction.

1.2.3 Théoréme(principe de contraction de Banach)

Théorème 1.1. *[5]*
Soit (X,d) un espace métrique complet. Soit $F : X \longrightarrow X$ une application contractante Alors :

1. *F admet un unique point fixe $\alpha \in X$;*
2. *pour tout $x \in X$, $\alpha = F^n(x)$ ou $F^0(x) = x$ et $F^n(x) = F(F^{n-1}(x))$;*
3. *La vitesse de convergence peut être estimée par : $d(F^n(x),\alpha) \leq \frac{k^n}{1-k}d(x,F(x))$.*

1.3 Ensembles compacts

Définition 1.18. Soit (X,d) un espace métrique,
Un sous-ensembles $K \subseteq X$ est dit compact si pour tout recouvrement par des ouvert (Ω_α), $\alpha \in I$ (i.e $K \subset \bigcup_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$) et Ω_α ouvert dans X de K il existe un sous-recouvrement fini de K (i.e il existe $J \subset I$ fini tel que $K \subset \bigcup_{j\in J} \Omega j$).

Définition 1.19. Un sous-ensembles $K \subseteq X$ est dit relativement compact si son adhérence $\bar{K}$ est dans X.

1.4 Théorème Ascoli-Arzelà

Théorème 1.2.
Soient X un espace topologique, un y espace semi-métrique, et $\mathcal{F}$ un sous-ensemble d'applications f continues de X dans Y . Pour que $\mathcal{F}$ soit relativement compact dans $C(X,Y)$ (muni de la topologie de la convergence compacte), il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :(voir[7])

1. *$\mathcal{F}$ est équicontinue (i.e $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall y \in X, d(x,y) < \delta \Longrightarrow d(f(x),f(y)) < \epsilon$),*

2. *pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{F}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans Y,*

Si X est localement compact, ces condition sont aussi nécessaires.

1.5 Dérivation et intégration d'ordre fractionnaire

L'idée principale de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et d'intégration itérées. La terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

1.5.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est en mathématiques un fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (excepté certains un points).

Définition 1.20. Pour $\alpha > 0$, on définie la fonction suivant :

$$\Gamma : \alpha \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{1.1}$$

cette intégrale convergent absolument(i.e $\int_0^{+\infty} |e^{-t}t^{\alpha-1}dt| < \infty$) sur le demi-plant complexe où la partie réelle est strictement positive.
En intégrant par partie, on peut voir que :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0. \tag{1.2}$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.3}$$

1.5.2 Intégrale d'ordre fractionnaire

Soit $([0,T], L, \lambda)$ une espace mesurable de Lebesgue, où $T > 0$ et soit $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable de deux variables.

Définition 1.21.
On dit que la fonction $x(.,.)$ est intégrable au sens de Lebesgue par chemin d'échantillon (sample path Lebesgue intégrable) sur $[0,T]$, si $x(.,\omega) : [0,T]\Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est Lebesgue intégrable sur $[0,T]$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Définition 1.22. (voir[9])
Soit $\alpha > 0$. Si $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est Lebesgue intégrale par chemin d'échantillon (sample path Lebesgue integrable) sur $[0,T]$, alors on peut définir l'intégrale d'ordre fractionnaire suivante :

$$I^\alpha x(t,\omega) = \int_0^t g_\alpha(t-s)x(s,\omega)ds, \tag{1.4}$$

qui sera appelée l'intégrale d'ordre fractionnaire de chemin d'échantillon (Sample path fractional integral) de x.

La fonction $g_\alpha : \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$ est définie par :

$$g_\alpha(s) = \begin{cases} \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s \leq 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

où Γ est la fonction Gamma . En fait $I^{\alpha}x(t,\omega) = (g_{\alpha} * x)(t,\omega)$ pour p.s $\omega \in \Omega$, où $g_{\alpha} * x$ désigne la convolution [16].

Remarque 1.1. (voir[9])
Si $x(.,\omega) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est Lebesgue intégrale sur $[0,T]$ pour p.s $\omega \in \Omega$, alors $t \mapsto I^{\alpha}x(t,\omega)$ est aussi Lebesgue intégrale sur $[0,T]$ pour p.s $\omega \in \Omega$.

1.5.3 Dérivée d'ordre fractionnaire

Soit une fonction $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est dit x une dérivée de chemin d'échantillon (sample path derivative) à $t \in (0,T)$.
Si la fonction $t \mapsto x(t,\omega)$ un dérivée à t pour p.s $\omega \in \Omega$. On notera $\frac{d}{dt}x(t,\omega)$ ou $x'(t,\omega)$ un chemin d'échantillon dérivé (sample path derivative) de $x(.,\omega)$ en t.

Proposition 1.3. *On dit que $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est le chemin de l'échantillon différentiable (sample path différentiable) sur $[0,T]$,*
Si $x(.,.)$ une dérivée de chemin d'échantillon (sample path derivative) pour chaque $t \in (0,T)$ et possède un chemin d'échantillon dérivée (sample path derivative) unilatérale aux points d'extrémité 0 et T.

Remarque 1.2. Si $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est un chemin d'échantillon absolument continu (sample path absolutely continuous) sur $[0,T]$ (c'est-à-dire $t \mapsto x(t,\omega)$ est absolument continue sur $[0,T]$ pour p.s $\omega \in \Omega$),
Puis une dérivée de chemin d'échantillon (sample path derivative) $x(t,\omega)$ existe pour λ p.s $t \in [0,T]$.

Définition 1.23. (voir[9])

Soit $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ un fonction absolument continue sur $[0,T]$ et soit $\alpha \in (0,1]$. Alors, pour λ p.s, $t \in [0,T]$ et pour p.s $\omega \in \Omega$, nous définissons le chemin d'échantillon fractionnaire dérivée (sample path fractional derivative) de Caputo de x par :

$$D^{\alpha}x(t,\omega) = I^{1-\alpha}x'(t,\omega) = \int_0^t g_{1-\alpha}(t-s)x'(s,\omega)ds. \tag{1.6}$$

Corollaire 1.4. *Si $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est un chemin d'échantillon différentiable (sample path différentiable) sur [0, T] et $t \mapsto x(t,\omega)$ est continu sur [0, T],*
Alors $D^x\alpha(t,\omega)$ existe et continu pour tout $t \in [0,T]$.

Propriétés 1.2. (voir[1])

a. Si $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est un Fonction Carathéodory. Alors pour tout $t \in [0,T]$ et p.s $\omega \in \Omega$ ([1],lemma 2.21)

$$D^\alpha I^\alpha x(t,\omega) = x(t,\omega). \tag{1.7}$$

b. Si $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est un chemin d'échantillon absolument continue (sample path absolutely continuous) sur $[0,T]$.
Alors pour λ p.s $t \in [0,T]$ et p.s $\omega \in \Omega$ ([1],lemma 2.22) .

$$I^\alpha D^\alpha x(t,\omega) = x(t,\omega) - x(0,\omega). \tag{1.8}$$

c. En particulier, si $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est un chemin d'échantillon différentiable (sample path différentiable) sur $[0,T]$ et $t \mapsto x(t,\omega)$ est continue sur $[0,T]$,
Alors (1.8) pour tout $t \in [0,T]$ et p.s $\omega \in \Omega$.

d. Si $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est un chemin d'échantillon absolument continue (sample path absolutely continuous) sur $[0,T]$. Alors ([1],lemma 2.22) :

$$t \mapsto y(t,\omega) := \int_0^t g_{1-\alpha}(t-s)x(s,\omega).$$

est un chemin d'échantillon absolument continue (sample path absolutely continuous) sur $[0,T]$.
De plus, pour λ p.s $t \in [0,T]$ et p.s $\omega \in \Omega$, nous avons

$$y'(t,\omega) = \frac{d}{dt}\int_0^t g_{1-\alpha}(t-s)x(s,\omega)ds = D^\alpha x(t,\omega) + \frac{x(0,\omega)}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}. \tag{1.9}$$

Définition 1.24. (voir[9])
Soit $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ un chemin d'échantillon Lebesgue intégrable (sample path Lebesgue integrable) sur $[0,T]$ et soit $\alpha \in (0,1]$. Pour p.s $\omega \in \Omega$,on définit le chemin

d'échantillonnage fractionnaire dérivée (sample path fractional derivative) de Riemann-Liouville de x par :

$$D^{\alpha}_{RL}x(t,\omega) = \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}x(t,\omega) = \frac{d}{dt}\int_0^t g_{1-\alpha}(t-s)x(s,\omega)ds. \tag{1.10}$$

Corollaire 1.5. *Si $x(.,.) : [0,T]\times\Omega \mapsto \mathbb{R}$ est un chemin d'échantillon absolument continu (sample path absolutely continuous) sur $[0,T]$ alors, par (1.9), il s'ensuite que :*

$$D^{\alpha}_{RL}x(t,\omega) = D^{\alpha}x(t,\omega) + \frac{x(0,\omega)}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}, \tag{1.11}$$

pour λ p.s $t \in [0,T]$ et p.s $\omega \in \Omega$.

1.6 Fonction Carathéodory

Définition 1.25.

Une fonction $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est dite fonction Carathéodory,
Si $t \mapsto x(t,\omega)$ est continue p.s $\omega \in \Omega$, et $\omega \mapsto x(t,\omega)$ est mesurable.

Proposition 1.6. *(voir[10]) Si $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est une fonction Carathéodory., alors la fonction $(t,\omega) \mapsto I^{\alpha}x(t,\omega)$ est aussi une fonction Carathéodory.*

1.7 Espace métrique d'éléments aléatoires

On considérez l'espace $C := C([0,T],\mathbb{R}^m)$ de toutes les fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^m$, doté de la métrique uniforme $d(x,y) := \sup_{0\leq t\leq T} \|x(t) - y(t)\|$, où $\|.\|$
est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathbb{B}(C)$ la σ-algèbre de tous les sous-ensembles de Borel de C.
par ([12],lemma 14.1) $\mathbb{B}(C)$ coïncide avec la σ-algèbre générée en C par les cartes d'évaluation $\pi_t : C \mapsto \mathbb{R}^m, t \in [0,T]$, donné par $\pi(x) = x(t)$.

Propriétés 1.3. [9]

1. Si $x : \Omega \mapsto C$, alors $x_t : \pi_t \circ x$ transforme Ω en $\mathbb{R}^m$. Par conséquent, x peut également être considéré comme une fonction $x(t,\omega) := x(\omega)$ de $[0,T] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^m$.

Alors, $x : \Omega \mapsto C$ est un élément aléatoire dans C si et seulement si $x_t : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est mesurable pour tout $t \in [0,T]$.

2. Si $x : \Omega \mapsto C$ est un élément aléatoire, alors la fonction $x(.,.) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est une fonction Carathéodory.

3. Si $x : \Omega \mapsto C$ est un élément aléatoire, alors la fonction $x(.,\omega) : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^m$ est dit une réalisation ou une trajectoire de l'élément aléatoire x, correspondant au résultat $\omega \in \Omega$.

Définition 1.26. Notons $R(\Omega,C)$ l'espace métrique de tous les éléments aléatoires en $\mathbb{C}$.

Corollaire 1.7.
On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{x_n\} \subset R(\Omega,C)$ *converge presque partout à* $x \in R(\Omega,C)$ *s'il existe* $N \subset \Omega$, *tel que* $\mathbb{P}(N) = 0$, *et* $\lim_{n\to\infty} d(x_n(\omega),x(\omega)) = 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega \setminus N$.

1.8 L'espace de toute les mesures probabilités

Définition 1.27. (voir[9])
Soit $M(C)$ l'espace de toute les mesures probabilités sur $\mathbb{B}(C)$.Si $x : \Omega \mapsto C$ est un élément aléatoire dans C, alors la mesure de probabilité $\mu_x(B)$, définie par :

$$\mu_x(B) := \mathbb{P}(x^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega; x(\omega) \in B\}),\ B \in \mathbb{B}(C)\ ,$$

est appelé la distribution de x.
Puisque C est un espace métrique complet et séparable, alors il est bien connu que $M(C)$ est un espace métrique complet et séparable par rapport à la métrique de Prohorov
$D : M(C) \mapsto [0,\infty)$, définie par (voir[14]) :

$$D(\mu,v) = \inf\{\epsilon > 0 : \mu(B) \leq v(B^\epsilon) + \epsilon, B \in \mathbb{B}(C)\},$$

où $B^\epsilon := \{x \in C : \inf_{y\in B} d(x,y) < \epsilon\}$. Si nous identifions des éléments aléatoires dans C qui ont la même distribution, alors $\rho(x,y) := D(\mu_x, \mu_y)$ est une métrique sur l'ensemble des éléments aléatoires en C ([3]).

Théorème 1.8 (Skorokhod). *(voir[2])*

Si $\{x_n\} \subset R(\Omega,C)$ *est une suite de* ρ*-Cauchy, alors une peut construire une suite* $\{y_n, y\} \subset R(\Omega,C)$ *telle que* $\rho(x_n, y_n) = 0$ *et* $y_n \to y$ *p.s.*

Définition 1.28. Une suite $\{x_n\} \subset R(\Omega,C)$ est appelée ρ- relativement compacte si chaque sous-séquence a une sous-séquence qui converge par rapport à la métrique ρ.

Puisque C est un complet et espace métrique séparable, alors la compacité ρ relative et l'étanchéité sont équivalentes.

Théorème 1.9 (Prohorov). *(voir[14])*

Une suite $\{x_n\} \subset R(\Omega, C)$ *est* ρ*-relativement compacte si et seulement si* x_n *est un serré, c'est-à-dire que pour tout* $\epsilon > 0$ *il y a un ensemble compact* $K_\epsilon \subset C$ *tel que* $\mathbb{P}(\omega \in \Omega, x_n(\omega) \in K_\epsilon) > 1 - \epsilon$ *pour tout* $n \geq 1$*.*

Chapitre 2

Équations différentielles ordinaires aléatoires

Les méthodes probabilistes (stochastiques ou aléatoires) sont plus en plus appliquées dans la modélisation, l'analyse et la prédiction des comportements des problèmes et des phénomènes physiques et naturels. Cela est dû à des combinaisons de complexité, d'incertitudes et d'ignorance qui sont présentes dans la formulation d'un grand nombre de ces problèmes.

Les équations différentielles ordinaires (EDO) décrites une grande classe de problèmes physiquement importants, et en tenant compte de divers effets aléatoires, il est naturel que les équations différentielles ordinaires impliquant des éléments aléatoires, c'est-à-dire des équations différentielles ordinaires aléatoires.

2.1 Équations différentielles ordinaires(EDO)

Définition 2.1.
La forme plus générale d'une équations différentielles ordinaires est une equation définie par un termes d'une variable $t \in I$, I intervalle réel,et une fonction inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et ses dérivées par rapport t, c'est-a-dire :

$$F(t,y(t),y'(t),y''(t),.....) = 0. \tag{2.1}$$

Une fonction qui vérifie $F(t,y(t),y'(t),y''(t),.....) = 0$, s'appelle solution de l'EDO.

Exemple 2.1. Les équations :

$$y'(t) - 1 = 0\,;$$
$$y''(t) - y(t) = 0\,;$$
$$e^{y'}(t) - t + y(t) = 0\,;$$

sont des équations différentielles ordinaires (EDO).

Remarque 2.1. Si $n = 1$ on parle d'équation différentielle scalaire,
Si n>1 on parle d'équation déffèrentielle vectorielle.

Exemple 2.2. l'EDO d'ordre 2 la plus célébré est la deuxième loi de New-ton :

$$F(x) = mx''(t).$$

qui d'écrit par exemple la dynamique d'un point matérielle soumis á la résultante des forses F.
on peut écrit la loi de Newton en terres du système de deux équations d'ordre 1 :

$$\begin{cases} x'(t) = v \\ v'(t) = \frac{1}{m}F(x) \end{cases}$$

En générale une equation scalaire d'ordre k peut être écrite comme un système de k equation d'ordre 1.
Dans la suite on va considérer des équations déffèrentielle d'ordre k sous la forme normale :

$$y^{(\mathrm{k})} = f(t,y,......,y^{(\mathrm{k\text{-}1})}), \quad k \in \mathbb{N}$$

Alors :
L'équation (1,1) on peut écrit, $f : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ et une fonction inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On considéré l'EDO :

$$y^{(k)} = f(t,y,......,y^{(k-1)}), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Corollaire 2.1. *Soit y un fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$*

1. *la fonction y est dite solution de l'équation (2.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est C^1 (i.e définie et continument dérivable sur I).*
2. *soit $(t_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ donné, la fonction y est dite solution de l'équation (2.1) à valeur initiale s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que y soit la solution de l'équation (2.1) et vérifie $y(t_0) = y_0$.*

2.2 Solution maximale et globale

Définition 2.2. (Prolongement)

Soient (x,I), $(\tilde{x},\tilde{I})$ deux soulions d'une même équation différentielle , On dit que $(\tilde{x},\tilde{I})$ est un prolongement (x,I) si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x} \setminus I = x$.

Définition 2.3. (Solution maximale)

Soient I_1, I_2 deux intervalles sur $\mathbb{R}$ tels que $I_1 \subset I_2$, On dit qu'une solution (x,I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si x n'admet pas de prolongement $(\tilde{x},\tilde{I})$ solution de l'équation différentielle telle que $I_1 \subset \tilde{I} \subset I_2$.

Définition 2.4. (Solution globale)

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, une solution (x,I) est dit globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier.

2.3 Existence et Unicité pour le problème de cauchy

Soit I un intervalle réel, $f : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.On considéré l'EDO :

$$y'(t) = f(t,y(t)).$$

On peut penser à cette équation comme un phénomène évolutif en temps (la variable t).comme le problème de déterminer toutes les primitive d'une fonction donnée, cette problème admet en général un nombre infini de solutions.Pour choisir une solution particulière on impose une condition initiale, c'est à dire :

$$y(t_0) = y_0.$$

ce qui veut dire que à l'instant initial t_0 la loi évolutive vaut y_0.

Définition 2.5. (Problème de cauchy)

On appelle problème de cauchy le probléme de trouver une intervalle I tel que $t_0 \in I$, une fonction y :$I \mapsto \mathbb{R}^n$ qui vérifie :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) & t \in I, \\ y(t_0) = y_0 & t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Définition 2.6. (Solution problème de cauchy)(voir[6])
Une solution du problème de Cauchy sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $(t_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \mapsto \mathbb{R}^m$ telle que

i. pour tout $t \in I, (t_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}^m$,

ii. y est continu sur I,

iii. pour tout $t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$,

2.3.1 Existence locale

Définition 2.7. (Fonction localement lipschitzienne)
Soient I un intervalle réel, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. soient $(t_0, y_0) \in I \times D$ et $J \subset D$ un voisinage du point y_0.
On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable y dans le voisinage J si il existe une constante $L > 0$, et il existe un voisinage $U \subset I$ du point t_0 tels que :

$$\|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))\| \leq L\|y_1(t) - y_2(t)\|.$$

pour $(ty_1(t)),(t,y_2(t))$ dans $U \times J$.

Théorème 2.2 (Cauchy-Lipschitz). *(voir[6])*

Soient I un intervalle, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. Soient $(t_0, y_0) \in I \times D$.Si f est continue et lipschitzienne par rapport à deuxième variable dans un voisinage du point y_0, alors le probléme de cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) & t \in I; \\ y(t_0) = y_0 & t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \tag{2.3}$$

admet un unique solution $\bar{y}$ définie dans un petit voisinage du point t_0.
De plus la solution est de classe C^1 dans ce voisinage.

2.3.2 Existence globale

Définition 2.8.
Soient I un intervalle réel, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. soient $(t_0, y_0) \in I \times D$. On dit que f est globalement lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe L>0 tel que pour tout (t,x),(t,y) dans $I \times \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t,x(t)) - f(t,y(t))\| \leq L\|x(t) - y(t)\|.$$

Théorème 2.3 (Existence et unicité globale). *(voir[6]) On suppose $f \in C(I\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ et globalement lipschitzienne par rapport à deuxième variable . Alors, $\forall(t_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ il existe une unique solution du problème (2.3).*

Exemple 2.3. Le système suivant est un probléme de Cauchy :

$$y'(t) = \frac{5}{4}y(t)^{\frac{1}{5}}, y(0) = 0 \tag{2.4}$$

Le problème (2.4) admet une seule solution.

2.4 Équations différentielles ordinaires aléatoires(EDOA)

2.4.1 Introduction :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, où $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre sur Ω et $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité. Soit $X = (X_1,......,X_d)^T \in \mathbb{R}^d$ un d-variable aléatoire.

Soient $I = [0,T]$ un intervalle réel et , $X_t(\omega) : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Propriétés 2.1. (voir[11])

1. Si les réalisations d'un processus stochastique X_t sont continues pour tout $\omega \in \Omega$, alors le processus stochastique X_t est dit continu. En outre le processus X_t est appelé différentiable par chemin sur I s'il existe $\Omega_1 \subset \mathcal{F}$ tell que $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$, et $\forall \omega \in \Omega$ la dérivée :

$$X_t'(\omega) := \frac{d}{dt} X_t(\omega) := \lim_{h \to 0} \frac{X_{t+h}(\omega) - X_t(\omega)}{h}, \quad t \in \overset{\circ}{I}. \tag{2.5}$$

existe. L'application $X_t'(.) : I \times \Omega_1 \to \mathbb{R}^d$ est appelée la dérivée.

2. D'une manière analogue, on dit que le processus (X_t) admet une intégrale par chemin sur I si l'intégrale $\int_I X_t(\omega) dt$ existe $\forall \omega \in \Omega$.

2.4.2 Équation différentiel aléatoire

Soit maintenant $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ un processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, avec des trajectoires continues, et $f : I \times \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue.

Définition 2.9. [15] Une équations différentielles ordinaire aléatoire sur $\mathbb{R}^d$

$$\frac{dX_t}{dt} = f(t, X_t(\omega), \omega), \quad X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d, \tag{2.6}$$

est une équation différentielle ordinaire non autonome (EDO)

$$x' = \frac{dx_t}{dt} = F_\omega(t,x), \quad x = X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d, \tag{2.7}$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Définition 2.10. [15]

Un processus stochastique X_t défini sur l'intervalle I est appelé solution de l'équation différentielle aléatoire (2.6) si pour presque tout $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ est une solution de l'équation différentielle ordinaire déterministe non autonome (2.7).

Remarque 2.2. 1. Dans la suite, une solution de l'équation différentielle aléatoire réfère à une solution 'pathwise' au sens de la définition précédente.

2. Pour souligner la dépendance du processus stochastique avec les éléments de Ω, nous écrivons parfois $X_t(.)$.

2.4.3 Solution de l'équation différentielle aléatoire

Supposons que $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ une fonction continue, et on pose $F_\omega(t,x) := f(t,X_t(.),\omega)$. Considérons le problème de valeur initiale (PVI) suivant :

$$\frac{dx_t}{dt} = F_\omega(t,x), \quad x = X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d, x(t_0) = x_0, x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.8}$$

Une solution de PVI (2.8) est une fonction continuellement différentiable $x : [t_0, T] \longmapsto \mathbb{R}^d$ avec $x(t_0) = x_0$ tel que

$$\frac{d}{dt}x(t) = F_\omega(t,x), \quad pour \quad tout \quad t \in (t_0,T).$$

L'intégration de l'équation différentielle aléatoire (2.8) donne l'équation intégrale suivante :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F_\omega(s,x)ds, \quad t \in [t_0,T]. \tag{2.9}$$

Une solution de PVI (2.8) est donc une solution de l'équation intégrale (2.9). l'inverse est également valable.

Définition 2.11. (Unicité de la solution)

La solution de (2.8) est dite unique sur I si pour deux processus arbitraires X_t et Y_t solutions par chemin"pathwise" du problème (2.8) alors $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$, pour tout $(t,\omega) \in I \times \Omega^*$, avec $\Omega^* \subset \Omega$, et $P(\Omega^*) = 1$.

Remarque 2.3.

Signalons qu'une solution d'une équation différentielle aléatoire est un processus stochastique défini sur un intervalle I défini indépendamment de ω.

2.4.4 Exemple

Soit $a(\omega)$ une variable aléatoire distribuée suivant une loi exponentielle. L'équation différentiel aléatoire :

$$X_t' = a(\omega)X_t^2, \quad X_0 = 1,$$

$\left[\frac{1}{X_t}\right]_{t_0}^{t} = [a(\omega)]_{t_0}^{t}$ a une solution unique pour chaque $\omega \in \Omega$.

L'équation admet une solution unique définie par

$$X(t,\omega) = \frac{1}{1 - a(\omega)t}.$$

Cependant, elle n'a pas de solution par chemin (pathwise solution) pour cette condition initiale, car, la solution

$$X(t,\omega) = \frac{1}{1 - a(\omega)t}.$$

de cette équation différentielle aléatoire n'existe que dans l'intervalle $[0,(a(\omega))^{-1}]$. Ainsi, il n'y a pas d'intervalle commun $J \subset [0.T]$ tel que la solution existe pour presque tout $\omega \in \Omega$. processus stochastique.

Lemme 2.4. *(voir[8])*

Une fonction continue $x : [t_0, T] \mapsto \mathbb{R}^d$ vérifiant l'intégrale équation (2.9) est une solution de PVI(2.8). En particulier, il est continuellement différentiable dans (t_0, T).

Preuve L'application $t \mapsto F_\omega(t,x(t))$ est continu, car l'application $t \mapsto x(t)$ et

$(t,x) \mapsto F_\omega(t,x)$ sont continus. D'où le théorème fondamental de l'intégrale et le calcul différentiel s'applique ici et donne :

$$\tfrac{d}{dt}\textstyle\int_{t_0}^{t} F_\omega(s,x(s))ds = F_\omega(t,x(t)) \quad \text{pour} \quad \text{chaque} \;, \quad t \in (t_0, T).$$

Cela signifie que le côté droit de l'équation intégrale (2.9) est continuellement différentiable Par conséquent, lorsque $x(t)$ satisfait l'équation intégrale (2.9), il est également différentiable et satisfaisant

$$\tfrac{d}{dt}x(t) = F_\omega(t,x(t)) \;, \quad \text{pour} \quad \text{chaque} \quad t \in (t_0, T)$$

Enfin, pour $t = t_0$, l'équation intégrale se réduit à $x(t_0) = x_0$, donc x est une solution de (2.8). $\square$

2.4.5 Existence et unicité des solutions 'pathwise'

Théorème 2.5 (Théorème de Picard – Lindelöf). *(voir[8])*
Soit $F_\omega : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}^d$ une fonction continue sur un parallélépipède,

$R := \{(t,x) : t_0 \leq t \leq t0 + a, |x - x_0| \leq b\}$ et uniformément Lipschitz continue en x et continue en t.
De plus, soit M un lié pour $\mid F_\omega(t,x) \mid$ sur R et notons $\mu := min\{a, \frac{b}{M}\}$. Puis la valeur initiale le problème (2.8) a une solution unique $x^* = x^*(t)$ sur $[t_0, t_0 + \mu]$.

Preuve Soit $x_0(t) = x_0$. Supposons que $x_k(t)$ a été défini sur $[t_0, t_0 + \mu]$, est continue et satisfait $|x_k(t) - x_0| \leq b$ pour $k = 0,..., n$. Mettre

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F_\omega(s,x_n(s))ds. \tag{2.10}$$

Alors $x_{n+1}(t)$ est défini et continu sur $[t_0, t_0 + \mu]$, puisque $F_\omega(t,x_n(t))$ l'est. Également il est clair que :

$$|x_{n+1}(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |F_\omega(s,x_n(s))ds| \leq M\mu \leq b.$$

D'où $x_0(t)$, $x_1(t)$,. . . sont définies et continues sur $[t_0, t_0+\mu]$, et satisfont $|x(t)-x_0| \leq b$. Il sera montré ensuite par induction que

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{Mk^n(t - t_0)^{n+1}}{(n + 1)!}, pour \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \mu, n = 0, 1,... \tag{2.11}$$

où k est une constante de Lipschitz pour F dans sa composante x.
Tout d'abord, il est simple de voir que (2.11) est valable pour n =0. Supposons que (2.11) vaut pour $1,..., n - 1$. Par (2.10), pour $n \geq 1$:

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_{t_0}^{t} [F_\omega(s,x_n(s)) - F_\omega(s,x_{n-1}(s))]ds.$$

Par conséquent, la condition de Lipschitz de F implique que

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1}(t) - x_n(t)| &\leq k \int_{t_0}^{t} |x_n(s) - x_{n-1}(s)| ds \\
&\leq \frac{Mk^n}{n!} \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^n ds = \frac{Mk^n (t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

ce qui prouve (2.11).Considérez maintenant

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [x_{n+1}(t) - x_n(t)].$$

Il résulte de (2.11) que $x(t)$ est uniformément convergent sur $[t_0, t_0 + \mu]$, c'est-à-dire, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n(t) = x^*(t)$ existe uniformément.
Puisque $F_\omega(t,x)$ est uniformément continue sur R en raison de sa continuité et de ses limites, il suit que $F_\Omega(t,x_n(t))$ converge vers $F_\omega(t,x^*(t))$ uniformément sur $[t_0, t_0 + \mu]$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Ainsi (2.10) peut être intégré terme par terme pour donner :

$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F_\omega(s,x^*(s)) ds,$$

c'est-à-dire que $x^*(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n(t)$ est une solution de (2.7).
Pour prouver l'unicité, soit $y(t)$ toute autre solution de (2.7) sur $[t_0, t_0 + \mu]$, alors

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F_\omega(s,y(s)) ds,$$

et il résulte de l'induction que

$$|x_n(t) - y(t)| \leq \frac{Mk^n (t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, t_0 \leq t \leq t_0 + \mu, n = 0, 1, \ldots. \tag{2.12}$$

Laisser $n \longrightarrow \infty$ dans (2.12) donne immédiatement que $|x^*(t) - y(t)| = 0$, donc $y(t) \equiv x^*(t)$. $\square$

Théorème 2.6 (Théorème d'existence de Peano). *(voir[8])*
Soit $F_\omega : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}^d$ une continuos sur un parallélépipède,

$R := \{(t,x) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b\}$. En plus, soit M une borne supérieure pour $|F_\omega(t,x)|$ sur R et notons $\mu := min\{a, \frac{b}{M}\}$. Puis PVI (2.8) admet au moins une solution $x = x(t)$ sur $[t_0, t_0 + \mu]$.

Preuve Soit $\delta > 0$ et $x_0(t)$ un vecteur d-dimensionnel continuellement différentiable fonction valuée sur $[t_0 - \delta, t_0]$, vérifiant $x_0(t) = x_0$, $|x_0(t) - x_0| \leq b$ et

$|x_0(t) - x_0(s)| \leq M|t - s|$ pour tout $t,s \in [t_0 - \delta, t_0]$.

Pour tout $0 < \epsilon \leq \delta$, définir une fonction $x_\epsilon(t)$ sur $[t_0 - \delta, t_0 + \mu]$ par :

$$x_\epsilon(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ x_0 + \int_{t_0}^t F_\omega(s,x_\epsilon(s - \epsilon))ds, & t \in [t_0,t_0 + \mu]. \end{cases} \tag{2.13}$$

Notons que (2.13) définit une extension $x_\epsilon(t)$ de $x_0(t)$ de $[t_0 - \delta, t_0]$ à $[t_0 - \delta, t_0 + min\{\mu,\epsilon\}]$ et satisfait à cet intervalle

$$|x_\epsilon(t) - x_0| \leq b, |x_\epsilon(t) - x_\epsilon(s)| \leq M|t - s|. \tag{2.14}$$

Par (2.13), $x_\epsilon(t)$ peut être étendu comme une fonction C^0 sur $[t_0 - \delta, t_0 + \min\{\mu,2\epsilon\}]$ donc il satisfait (2.14).

En poursuivant ainsi, (2.13) sert à définir $x_\epsilon(t)$ sur $[t_0 - \delta, t_0 + \mu]$ tel que $x_\epsilon(t)$ est une fonction C^0 sur $[t_0 - \delta,t_0 + \mu]$ et satisfait (2.14).

Il s'ensuite que de fonctions, $x_\epsilon(t)_{0<\epsilon\leq\delta}$ est équicontinue. Par conséquent, par le théorème 1.2 de sélection d'Arzelà, il existe une suite $\epsilon_1 > \epsilon_2 > ....$, telle que $\epsilon_n \to 0$ comme $n \to \infty$ et

$$\lim_{n\to\infty} x_{\epsilon_n} = x(t) \text{ existe uniformément.}$$

sur $[t_0 - \delta,t_0 + \mu]$. Par la continuité uniforme de F_ω, il s'ensuite que $F_\omega(t,x_{\epsilon_n}(t - \epsilon_n))$ converge vers $F_\omega(t,x(t))$ uniformément lorsque $n \to \infty$. Donc en intégrant (2.13) avec $\epsilon = \epsilon_n$ terme par terme donne

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F_\omega(s,x(s))ds,$$

c'est-à-dire que $x(t)$ est une solution à PVI (2.8). $\square$

2.4.6 Exemple

Soit $\Omega^* \subset \Omega$ tel que $\Omega^* \notin \mathcal{F}$. pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction

$$X_t^*(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \Omega^*, \\ \frac{1}{4}t^2, & \omega \in \Omega \setminus \Omega^*. \end{cases}$$

est une solution sur $[0, +\infty)$ de l'équation différentielle aléatoire

$$x' = \sqrt{|x|} \text{ avec la condition initiale } X_0(\omega) = 0$$

Cependant, X_t^* n'est pas un processus stochastique et donc n'est pas une solution (pathwise) de l'équation.

Chapitre 3

Application : Résultat d'existence de solutions d'équation différentielle d'ordre fractionnaire aléatoire :

3.1 Introduction :

On considérons le problème de valeur initiale :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t,\omega) = f(t,x(t,\omega),\omega) \\ x(0,\omega) = x_0(\omega) \end{cases} \tag{3.1}$$

où x_0 est un vecteur aléatoire, D^{α} est la dérivée fractionnaire de Caputo de x par rapport à la variable $t \in [0,T]$ avec $T > 0$, et $f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est une fonction donnée. Dans ce qui suit, supposons que :

H1. La fonction $(t,x) \mapsto f(t,x,\omega)$ est continue pour p.s $\omega \in \Omega$,

H2. La fonction $\omega \mapsto f(t,x,\omega)$ est mesurable pour chaque $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m$,

H3. Il existe $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que $x_0(\omega) \in \bar{B}(y_0,l)$ pour p.s $\omega \in \Omega$, où

$$\bar{B}(y_0,l) := \{x \in \mathbb{R}^m; \|x - x_0\| \leq l\}.$$

H4. Il existe $K > 0$, $l > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tels que :

$$\|f(t,x,\omega)\| \leq K,$$

pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \bar{B}(y_0,l)$ et pour p.s $\omega \in \Omega$.

Définition 3.1.
Une fonction mesurable $x : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est dite une solution (Pathwise) pour le problème (3.1) si :

a. $x(.,\omega)$ est continue sur $[0,T]$ pour p.s $\omega \in \Omega$.

b. $x(t,\omega)$ satisfait (3.1) pour p.s $t \in [0,T]$ et p.s $\omega \in \Omega$.

Corollaire 3.1. *(voir[9])*
Si $(t,\omega) \mapsto f(t,x(t,\omega),\omega)$ est mesurable et $t \mapsto f(t,x(t,\omega),\omega)$ est Lebesgue intégrable sur $[0,T]$ pour p.s $\omega \in \Omega$, alors par (1.7) et (1.8), on observe que $x : [0,T] \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ est une solution pour (3.1) si et seulement si

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \int_0^t g_\alpha(t-s) f(s,x(s,\omega),\omega)ds. \tag{3.2}$$

pour tout $t \in [0,T]$ et pour p.s $\omega \in \Omega$.

Remarque 3.1. On peut considérer l'équation différentielle aléatoire (3.1) comme une famille (par rapport au paramètre ω) d'équations différentielles déterministes, à savoir

$$\begin{cases} D^\alpha x(t,\omega) = f(t,x(t,\omega),\omega) \\ x(0,\omega) = x_0(\omega) \end{cases} \tag{3.3}$$

En général, il n'est pas correct de résoudre chaque problème (3.3) pour obtenir les solutions de (3.1).

3.2 Résultat d'existence locale

Théorème 3.2. *(voir[9])*
Soit $f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ une fonction donnée, et soit $x_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ un vecteur aléatoire. Si (H1)-(H4) vérifié, alors le problème (3.1) admet au moins une solution sur $[0,a]$ pour tout $a \leq T$ convenable.

Preuve Définissons la suite $x_n(t,\omega)$ par $x_1(t,\omega) = x_0(\omega)$, et

$$x_n(t,\omega) = x_0(\omega) + \int_0^t g_\alpha(t-s)f(s,x_{n-1}(s,\omega),\omega)ds, \quad n \geq 2,$$

pour tout $t \in [0,T]$ et pour p.s $\omega \in \Omega$.

Puisque par (H1) et (H2), $(t,\omega) \mapsto I^\alpha x(t,\omega)$ est une fonction Carathéodory(voir[10]), il s'ensuite que pour chaque $n \geq 1$, $(t,\omega) \mapsto x_n(t,\omega)$ est également une fonction Carathéodory.

Choisissez $0 < a \leq T$ tel que $\frac{Ka^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{l}{2}$. Ensuite nous avoir

$$\begin{aligned}\|x_n(t,\omega) - x_0(\omega)\| &\leq \int_0^t g_\alpha(t-s)\|f(s,x_{n-1}(s,\omega),\omega)\|ds \\ &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \leq \frac{Ka^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{l}{2}.\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,a]$ et pour p.s $\omega \in \Omega$. Ainsi, $x_n(t,\omega) \in \bar{B}(y_0,l)$ pour tout $t \in [0,a]$ et pour p.s $\omega \in \Omega$.

Soit $\epsilon > 0$. Si on choisit $\sigma > 0$ tel que $\sigma^\alpha \leq \frac{\epsilon\Gamma(\alpha+1)}{2K}$, alors pour chaque $s,t \in [0,a]$ avec $0 < t-s < \sigma$ on a que

$$\begin{aligned}\|x_n(t,\omega) - x_n(s,\omega)\| &\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_0^s [(s-\tau)^{\alpha-1} - (t-\tau)^{\alpha-1}]d\tau \\ &+ \frac{K}{\Gamma(\alpha)}\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau \leq \frac{2K}{\Gamma(\alpha+1)}(t-s)^\alpha < \epsilon,\end{aligned}$$

pour p.s $\omega \in \Omega$. Il s'ensuite que la famille $\{x_n(.,\omega)\}$ est équicontinue. et uniformément borné, donc par le théorème (1.2), $\{x_n(.,\omega)\}$ est un sous-ensemble relativement compact de $C_a := C([0,a],\mathbb{R}^m)$ pour p.s $\omega \in \Omega$.

Maintenant par le théorème 1.9, $x_n \subset R(\Omega,C)$ est ρ-relativement compact. Ainsi x_n a une sous-séquence ρ-Cauchy. De plus par le théorème 1.8, nous pouvons construire une suite $y_n \subset R(\Omega,C)$ et $x \in R(\Omega,C)$ tels que $\rho(x_n,y_n) = 0$ et $y_n(.,\omega) \to x(.,\omega)$ pour p.s $\omega \in \Omega$.

Ensuite, nous montrons que x (.,.) est une solution de (3.1).Depuis, pour $t \in [0,a]$ fixe, la fonction $x \to f(t,x,\omega)$ est continue pour p.s $\omega \in \Omega$, alors il s'ensuite que

$f(.,y_n(.,\omega),\omega) \to f(.,x(.,\omega),\omega)$ pour p.s $\omega \in \Omega$. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $n_0 \geq 1$ tel que

$$d(f(.,y_n(,\omega),\omega),f(.,x(.,\omega),\omega)) \leq \frac{\epsilon\Gamma(\alpha+1)}{a^\alpha},$$

pour tout $n \geq n_0$ et pour p.s $\omega \in \Omega$. Ensuite, nous avons cela

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t g_\alpha(t-s) f(s,y_n(s,\omega),\omega)ds - \int_0^t g_\alpha(t-s)f(s,x(s,\omega),\omega)ds \right\| \\
&\leq \int_0^t g_\alpha(t-s) \| f(s,y_n(s,\omega),\omega)ds - f(s,x(s,\omega),\omega)\| ds \\
&\leq \int_0^t g_\alpha(t-s) d(f(.,y_n(.,\omega),\omega), f(.,x(.,\omega),\omega))ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}\frac{\epsilon\Gamma(\alpha+1)}{a^\alpha}ds \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

C'est

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t g_\alpha(t-s)f(s,y_n(s,\omega),\omega)ds = \int_0^t g_\alpha(t-s)f(s,x(s,\omega),\omega)ds,$$

pour tout $t \in [0,a]$ et pour p.s $\omega \in \Omega$ Il s'ensuite que

$$\begin{aligned}
x(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} y_n(t,\omega) &= \lim_{n\to\infty}\left[x_0(\omega) + \int_0^t g_\alpha(t-s)f(s,y_{n-1}(s,\omega),\omega)ds\right] \\
&= x_0(\omega) + \int_0^t g_\alpha(t-s)f(s,x(s,\omega),\omega)ds,
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,a]$ et pour p.s $\omega \in \Omega$.

Par conséquent x (.,.) est une solution de (3.2), et donc une solution de (3.1). □

3.3 Solution maximale et existence globale

Définition 3.2. (Solution maximale)

Soit $r(.,.) : [0,T) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ un processus de solution (pathwise) d'équation différentielle aléatoire sur $[0,T)$:

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t,\omega) = g(t,u(t,\omega),\omega), \\ u(0,\omega) = u_0(\omega), \end{cases} \tag{3.4}$$

Alors $r(.,.)$ est dit processus de solution maximale (3.4) sur $[0,T)$ si, pour toute solution (pathwise) de (3.4) sur $[0,T)$, l'inégalité $u(t,\omega) \leq r(t,\omega)$ est vérifiée.

Définition 3.3.
Un processus aléatoire mesurable $x : [0,T) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est dit localement absolument continue (sample locally absolutely continuous), Si la fonction $t \to x(t,\omega)$ est localement absolument continu pour p.s $\omega \in \Omega$.

Lemme 3.3.
Soit $v,u : [0,T) \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ localement absolument continu (sample locally absolutely continuous), et supposons que la fonction $g : [0,T) \times \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ satisfait (H1) et(H2) Si :

a. $D^{\alpha}v(t,\omega) \leq g(t,v(t,\omega),\omega)$,

b. $D^{\alpha}u(t,\omega) \geq g(t,u(t,\omega),\omega)$,

pour p.s $t \in [0,T)$ et p.s $\omega \in \Omega$, et l'une des inégalités est stricte, alors v(0)<u(0) implique que :

$$v(t,\omega) < u(t,\omega), \tag{3.5}$$

pour p.s $t \in [0,T)$et p.s $\omega \in \Omega$.

Preuve Soit $J_0 \subset [0,T)$ tel que $\lambda(J_0) = 0$, (a) et (b) vérifier pour tout $t \in [0,T)\diagdown J_0$ et p.s $\omega \in \Omega$.
Supposons que la conclusion (3.5) ne soit pas vraie. Aussi supposons que l'inégalité (b) est stricte. Alors il existe un $t \in [0,T)\diagdown J_0$ tel que $v(\tau,\omega) = u(\tau,\omega)$ pour p.s $\omega \in \Omega$, et $v(t,\omega) \geq u(t,\omega)$, $0 \leq t \leq \tau$, $\omega \in \Omega$. Alors pour $h > 0$, on avoir :

$$\tfrac{v(\tau,\omega)-v(\tau-h,\omega)}{h} \geq \tfrac{u(\tau,\omega)-u(\tau-h,\omega)}{h} \text{ pour p.s } \omega \in \Omega,$$

Il s'ensuite que $v'(\tau,\omega) \geq u'(\tau,\omega)$ pour p.s $\omega \in \Omega$, et donc $D^{\alpha}v(\tau,\omega) \geq D^{\alpha}u(\tau,\omega)$ pour p.s $\omega \in \Omega$. En utilisant (a) et (b), nous obtenons que :

$$g(\tau,v(\tau,\omega),\omega) \geq D^{\alpha}v(\tau,\omega) \geq D^{\alpha}u(\tau,\omega) > g(\tau,u(\tau,\omega),\omega), \text{ pour p.s } \omega \in \Omega$$

C'est une contradiction puisque $v(\tau,\omega) = u(\tau,\omega)$ pour p.s $\omega \in \Omega$. D'où $v(t,\omega) < u(t,\omega)$ pour p.s $t \in [0,T)$ et p.s $\omega \in \Omega$. □

Théorème 3.4. *(voir[9])*

Supposons que $g : [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ satisfait (H1)-(H4) et que la fonction $u \rightarrow g(t,u,\omega)$ est un non décroissant pour $t \in [0,T]$ fixé et p.s $\omega \in \Omega$.
Alors le problème (3.4) a une solution maximale sur [0, a] pour un convenable $a < T$.

Preuve Soit $0 < \epsilon < l/2$. Considérons l'équation différentielle aléatoire d'ordre fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(t,\omega) & = g_{\epsilon}(t,u(t,\omega),\omega) \\ u(0,\omega) & = u_0(\omega) + \epsilon \end{cases} \tag{3.6}$$

où $g_{\epsilon}(t,u(t,\omega),\omega) = g(t,u(t,\omega),\omega) + \epsilon$ et $u_0(\omega) \in \bar{B}(x_0,\frac{l}{2})$.

Il est facile de voir que g_{ϵ} satisfait (H1) - (H4) avec K remplacé par $K + \frac{l}{2}$. Puis par le théorème 3.2, l'équation différentielle fractionnaire aléatoire (3.6) a une de solution $u_{\epsilon}(.,\omega)$ sur $[0,a]$ pour certains $a \in (0,T]$.
Soit $\{\epsilon_n\}$ une suite strictement décroissante telle que $0 < \epsilon_n \leq \epsilon$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$. Aussi pour chaque $n \geq 1$, soit $u_{\epsilon_n}(.,.)$ solution de

$$\begin{cases} D^{\alpha}u_{\epsilon_n}(t,\omega) & = g_{\epsilon_n}(t,u_{\epsilon_n}(t,\omega),\omega) \\ u_{\epsilon_n}(0,\omega) & = u_0(\omega) + \epsilon_n \end{cases} \tag{3.7}$$

Cela implique que $u_{\epsilon_n}(0,\omega) > u_{\epsilon_{n+1}}(0,\omega)$ et

$$\begin{aligned} D^{\alpha}u_{\epsilon_{n+1}}(t,\omega) &= g_{\epsilon_{n+1}}(t,u_{\epsilon_{n+1}}(t,\omega),\omega) = g(t,u_{\epsilon_{n+1}}(t,\omega),\omega) + \epsilon_{n+1} \\ &< g(t,u_{\epsilon_{n+1}}(t,\omega),\omega) + \epsilon_n = g_{\epsilon_n}(t,u_{\epsilon_{n+1}}(t,\omega),\omega). \end{aligned}$$

Alors du Lemme 3.3, il s'ensuite que $u_{\epsilon_{n+1}}(t,\omega) < u_{\epsilon_n}(t,\omega)$ pour tout $t \in [0,a]$ et p.s $\omega \in \Omega$.

Puisque la famille de fonctions $\{u_{\epsilon_n}(.,.)\}$ est équicontinue et uniformément borné, alors la limite uniforme $r(t,\omega) = \lim_{n\to\infty} u_{\epsilon_n}(t,\omega)$ existe sur $[0, a]$ pour p.s $\omega \in \Omega$.

Ensuite, nous montrons que $r(.,.)$ est une solution de (3.4).

Il est évident que $r(0,\omega) = u_0(\omega)$. Puisque $u \mapsto g(t,u,\omega)$ est un fonction continue pour fixé $t \in [0, a]$, alors $\lim_{n\to\infty} g_{\epsilon_n}(t,u_{\epsilon_n}(t,\omega),\omega) = g(t, r(t,\omega),\omega)$ p.s sur $[0, a]$. Comme dans la preuve de Théorem 3.2, on peut montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t g_\alpha(t-s)g(s,u_{\epsilon_n}(t,\omega),\omega)ds = \int_0^t g_\alpha(t-s)g(s,r(s,\omega),\omega)ds,$$

pour tout $t \in [0, a]$ et pour p.s $\omega \in \Omega$. Il s'ensuite que

$$\begin{aligned} r(t,\omega) &= \lim_{n\to\infty} u_{\epsilon_n}(t,\omega) = \lim_{n\to\infty}[u_0(\omega) + \int_0^t g_\alpha(t-s)g(s,u_{\epsilon_n}(s,\omega),\omega)ds] \\ &= u_0(\omega) + \int_0^t g_\alpha(t-s)g(s, r(s,\omega), \omega)ds, \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, a]$ et p.s $\omega \in \Omega$.

Par conséquent, $r(.,.)$ est une solution de (3.4).

Maintenant nous montrons que $r(.,.)$ est la solution maximale de (3.4) Pour cela, soit $u(.,.)$ une solution quelconque de (3.4), d'après le lemme 3.3. On a que $u(t,\omega) < u_{\epsilon_n}(t,\omega)$ pour tout $t \in [0, a]$ et p.s $\omega \in \Omega$. Il s'ensuite que $u(t,\omega) \leq \lim_{n\to\infty} u_{\epsilon_n}(t,\omega) = r(t,\omega)$ uniformément sur $[0, a]$, et le théorème est prouvé. $\square$

Corollaire 3.5.

Supposons que $g : [0, T) \times \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ satisfait aux hypothèses de Théorème 3.4, et que $r(.,.)$ est une solution maximale d'échantillon de (3.4) sur $[0, T)$.

Laisser $v \in C([0, T), R(\Omega,\mathbb{R}))$ soit tel que $v(0,\omega) \leq u_0(\omega)$ pour p.s $\omega \in \Omega$. et $D^\alpha v(t,\omega) = g(t,v(t,\omega),\omega)$ pour p.s $t \in [0, a]$ et p.s $\omega \in \Omega$. Alors $v(t,\omega) \leq r(t,\omega)$ p.s $t \in [0,a]$ et p.s $\omega \in \Omega$.

Preuve Si $u(.,.)$ est un solution de (3.6) pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, alors par Lemme 3.3, on a $v(t,\omega) \leq u(t,\omega)$ pour p.s $t \in [0,a]$ et p.s $\omega \in \Omega$. Depuis $\lim_{n\to\infty} u_\epsilon(t,\omega) = r(t,\omega)$ un intervalle très fermé contenu dans $[0, T)$, preuve est complète. $\square$

Théorème 3.6. *Suppose que :*

i $f : [0,T) \times \mathbb{R}^m \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ *satisfait (H1)-(H4)*

ii $g : [0,T) \times \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *satisfait les hypothèses du théorème 3.4*

iii $u(t,\omega) \equiv 0$*, pour p.s* $\omega \in \Omega$*, est la solution unique d'équation différentielle fractionnaire aléatoire.*

$$D^\alpha u(t,\omega) = g(t,u(t,\omega),\omega), \qquad u(0,\omega) = 0, \tag{3.8}$$

existant sur $[0,a]$ *pour un* $a < T$ *convenable,*

iv $f(t,x,\omega) - f(t,y,\omega) \leq g(t,x-y,\omega)$ *pour tout* $(t,x),(t,y) \in [0,a] \times \bar{B}(x_0,\rho)$ *et p.s* $\omega \in \Omega$.

Alors l'équation différentielle fractionnaire aléatoire (3.1) a une solution unique sur $[0,a]$.

Preuve De (i) et du théorème 3.2, il s'ensuite que (3.1) a une solution.Soit $x(.,.)$ et $y(.,.)$ deux solutions de (3.1) sur $[0,a]$, et soit $v(t,\omega) := \|x(t,\omega) - y(t,\omega)\|$ pour $t \in [0,a]$ et p.s $\omega \in \Omega$.

Alors $v(t,\omega)$ est un échantillon absolument continu (sample locally absolutely continuous) et, en utilisant (iv),on a

$$\begin{aligned} D^\alpha v(t,\omega) &\leq \|D^\alpha x(t,\omega) - D^\alpha y(t,\omega)\| \\ &= f(t,x(t,\omega),\omega) - f(t,y(t,\omega),\omega) \leq g(t,v(t,\omega),\omega), \end{aligned}$$

pour p.s $t \in [0,a]$ et $\omega \in \Omega$.

Puisque $v(0,\omega) = 0$ pour p.s $\omega \in \Omega$, puis par Corollaire 3.5, on a $v(t,\omega) \leq r(t,\omega)$ pour p.s $t \in [0,a]$ et $\omega \in \Omega$, où $r(t,\omega)$ est le maximum processus de solution de (3.8). Par conséquent, en utilisant (iii), il s'ensuite que $v(t,\omega) \equiv 0$ sur $[0,a]$, pour p.s $\omega \in \Omega$. Ainsi, la preuve du théorème est complète. □

Exemple 3.1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité de mesure complet. Considérez un problème de valeur initiale de la forme :

$$\begin{cases} D^{1/2}x(t,\omega) = \sqrt{\pi}x(t,\omega), t \in [0,\infty), \\ x(0,\omega) = K(\omega), \end{cases} \tag{3.9}$$

où $K : \Omega \mapsto (0,\infty)$ est une variable aléatoire. Il est facile de montrer que, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$x(t,\omega) = \frac{K(\omega)}{\sqrt{1-(K(\omega))^2 t}}.$$

est une solution de (3.9) sur l'intervalle $[0, 1/(K(\omega))]$. Choisissons un $a > 0$ tel que $\Omega \setminus K^{-1}(0, 1/\sqrt{a}) \neq \emptyset$.
Puisque

$$\Omega = K^{-1}((0,\infty)) = K^{-1}((0, 1/\sqrt{a}) \bigcup K^{-1}([1/\sqrt{a}, \infty)),$$

il s'ensuite que

$$\mathbb{P}(1/(K(\omega))^2 > a) = 1 - \mathbb{P}(1/(K(\omega))^2 \leq a) < 1.$$

Par conséquent, toutes les solutions $x(\Delta,\omega)$ ne sont pas bien définies sur un intervalle commun $[0, a)$.

Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire à été de donner quelques notions générales et définition des équations différentielle ordinaire aléatoire et aussi donner la définition d'une solution par échantillon (pathwise solution) d'équations différentielle ordinaire aléatoire.

L'existence et l'unicité d'une classe d'équation différentielle ordinaire aléatoire. l'existence de la solution locale, globale et maximale a été démontré en utilisant les théorèmes de point fixe de Picard – Lindelöf et le Théorème d'existence de Peano.

Nous avons donné une application pour l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle aléatoire d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, "North-Holland Mathematics Studies", Vol. 204, Elsevier Science *B.V., Amsterdam*, 2006.

[2] Billingsley, P. (1971). *Faible convergence des mesures : applications en probabilité* . Société de mathématiques industrielles et appliquées.

[3] Bollobas,B.,Dudley,R.M.,&Fulton, W.(2002). *Real Analysis and Probability* Cambridge Studies in Advance Mathematic ; 74.Cambridge University Press.

[4] Calatayud, J., Cortés, J. C., & Jornet, M. (2019). Random differential equations with discrete delay. *Stochastic Analysis and Applications*, 37(5), 699-707.

[5] Djabri, H. E., Haddadi, S., & Kheloufi-Mebarki, K. (2015).*mémoire Sur la théorie du point fixe dans les espaces métriques et applications* (Doctoral dissertation, Université abderrahmane mira béjaia).

[6] *Equations Différentielles Ordinaires et Partielles* pdf sur http ://math.univ-lyon1.fr/ pujo/coursEDO.pdf disponible le 25/05/202

[7] Fekrache, S., & Boufekane, S. (2019). *mémoire Sur le théorème d'Ascoli-Arzelà* (Doctoral dissertation, University of Jijel).

[8] Han, X., & Kloeden, P. E. (2017).*Random ordinary differential equations and their Numerical solution.* Springer Singapore.

[9] Lupulescu, V., & O'Regan, D. (2014). *Existence results for random fractional differential equations.* Opuscula Mathematica, 34.

[10] Lupulescu, V., & Ntouyas, S. K. (2012). Random fractional differential équations *Int. Electron. J. Pure Appl. Math*, 4(2), 119-136.

[11] Neckel, T., & Rupp, F. (2013). *Random differential equations in scientific computing.* Walter de Gruyter.

[12] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2002.

[13] *Première partie du cours de Processus Stochastiques* pdf sur http ://math.univ-lille1.fr.pdf disponible le 26/05/2021

[14] Prokhorov, YV (1956). Convergence des processus aléatoires et théorèmes limites en théorie des probabilités. *Théorie de la probabilité et ses applications* , 1 (2), 157-214.

[15] Soong, T. T., & TT, S. (1973). *Random differential equations in science and engineering.*

[16] W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hiber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*," Monographs in Mathematics', Vol. 96, Birkhäuser, Basel, 2011.