Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ahmed Draia Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité:

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

OUAJI Faiza

Thème

Théorie des C_0-semi-groupes et applications

Evalué par:

Mr. KEDDI Ahmed	MCB	Université d'Adrar	Président
Mme. SOUDDI Nassira	MCB	Université d'Adrar	Encadreur
Mr. MAZOUZI Hadj	MAA	Université d'Adrar	Examinateur

Année Universitaire : 2020-2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République algérienne populaire et démocratique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE AHMED DRAYA - ADRAR | جامعة احمد دراية - ادرار

BIBLIOTHÈQUE CENTRALE | المكتبـــــة المركـــزية

Service de recherche bibliographique | مصلحة البحث الببليوغرافي

N°......................B.C/S.R.B//U.A/2021 | الرقم.............م م/م.ب.ب /ج.أ/2021

شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذ(ة): سودي نصيرة

المشرف مذكرة الماستر الموسومة بـــ : Théorie des C_0-semigroupes et applications

من إنجاز الطالب(ة): واجي فايزة

و الطالب(ة): /

كلية : العلوم والتكنولوجيا

القسم : رياضيات والإعلام آلي

التخصص: تحليل دالي وتطبيقات

تاريخ تقييم / مناقشة: 2021/06/27

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقييم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.

وبإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والاليكترونية (PDF).

- امضاء المشرف:

سودي

ادرار في :..

مساعد رئيس القسم:

د. قاسم

مساعد رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي
مكلف بما بعد التدرج والبحث العلمي بكلية
العلـــوم والتكنولوجيـــا

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
قسم الرياضيات والإعلام الآلي
جامعة أدرار كلية العلوم والتكنولوجيا

ملاحظة :لاتقبل أي شهادة بدون التوقيع والمصادقة.

◊

Tous

les mots ne

sauraient exprimer

la gratitude, l'amour, le

respect, la reconnaissance, c'est

tous simplement que : Je dédie ce tra-

vail ***À*** *l'âme de mon père, que Dieu ait pitié*

de lui. ***À*** *Ma tendre Mère* ***SAIDI Zohra*** *: Tu*

représente pour moi la source de tendresse et l'exemple

de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager . ***À*** *mon*

très cher mari ***CHERMAK Mohammed*** *: Tes sacrifices, ton*

soutien moral et matériel m'ont permis de réussir mes études. Ce travail

soit témoignage de ma reconnaissance et de mon amour sincère et fidèle. ***À***

mes chers frère : ***Salim, Boudjamaa, Foudil, Mabrouk et Ahmed***

À *mes chère belle sœurs :***Rachida et Aicha***.* ***À*** *mes chers beaux*

*parents.***À** *mes très chère amis :* ***Khadidja, Zineb, Fatima,***

Somia, Safia, Samia, Sabah, Hanan, wassila,

Zid elmal , Zahia, Asmaa , Asia, Hadjer,

Hafsa et Yamina À *tous les membres*

de ma promotion. ***À*** *tous mes ensei-*

gnants depuis mes premières an-

nées d'études. ***À*** *tous ceux*

qui me sens chers et

que j'ai omis

de citer.

◊

FAIZA

Remerciements

*Au début et avant tout, je rends grâce à **DIEU** tout puissant qui m'a aide à terminer ce travail.*

Tout d'abord, mes remerciements s'adressent à ma directrice de mémoire, Mme. SOUDDI Nassira pour son aide et son encouragement prodigués tout au long de ce travail de recherche, ainsi que pour sa grande disponibilité, sa rigueur scientifique et ses précieux conseils.

Je remercie aussi aux membres du jury : Au Mr. KEDDI Ahmed qui me fait l'honneur de présider ce jury et au : Mr. MAZOUZI Hadj qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

A tout ceux qui n'ont pas été nommément mentionnés dans cette page de remerciements mais qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de ce mémoire ; qu'ils trouve en cette dernière phrase l'expression de toute ma gratitude.

Table des matières

Notations générales

A	*Opérateur.*
X	*Espace de Banach.*
X'	*Espace dual de X.*
$\lvert . \rvert_X$	*La norme muni de l'espace de Banach X.*
$\mathcal{B}(X,Y)$	*L'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.*
$\lVert . \rVert_{\mathcal{B}(X,Y)}$	*La norme des opérateurs .*
$D(A)$	*Le domaine de l'opérateur linéaire A.*
$\rho(A)$	*L'ensemble résolvant de A.*
$\sigma(A)$	*Le spectre de A.*
$G(A)$	*Graphe de A.*
$R(\lambda, A)$	*La résolvante de A.*
A_ω	*L'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\}$ pour $\omega > 0$.*
$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{A}_\omega}$	*L'approximation généralisé de Yosida de l'opérateur A.*
(PHC)	*Problème homogène de Cauchy.*
$(PNHC)$	*Problème non homogène de Cauchy.*

Introduction générale

Compte tenu de la remarque simple que la fonction exponentielle réalise, en autre, l'isomorphisme fondamental algébrique et topologique entre le groupe topologique additif des nombres réels et le groupe topologique multiplicatif des nombres réels strictement positifs, on peut constater que la fonction $t \to \mathrm{e}^{ta}$, $a \in \mathbb{R}$, *est une solution réel continue de l'équation fonctionnelle de Cauchy* $f(t+s) = f(t)f(s)$ *avec la condition* $f(0) = 1$. *Cette équation a été étudiée par beaucoup de mathématiciens commençant avec Cauchy même. D'autre part, il est très bien connu que la fonction exponentielle* $t \to \mathrm{e}^{ta}$ *est la solution unique sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $u' = au$ *avec la condition initiale* $u(0) = 1$. *L'importance des fonctions exponentielles a connu une grande croissance après l'année 1888, quand le grand mathématicien Giuseppe Peano a eu l'inspiration d'écrire la solution du problème de Cauchy vectoriel*

$$\begin{cases} u' = Au \\ u(0) = I, \end{cases}$$

où A *est une matrice quadratique, sous la forme*

$$t \to \mathrm{e}^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Ce résultat a été étendu aux équations différentielles opératorielles $X' = AX$, *où* A *est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach X, qui a pour solution fondamentale la fonction exponentielle* $t \to \mathrm{e}^{tA}$, $A \in \mathcal{B}(X)$.
Ces extensions de la fonction exponentielle admettent un modéle général dans le cadre des algèbres de Banach abstraites. Plus précisément, si $\mathcal{B}$ *est une algèbre de Banach avec*

l'unité I et $a \in \mathcal{B}$, alors la fonction

$$\mathbb{R} \ni t \to \mathrm{e}^{ta} \in \mathcal{B}$$

$$\mathrm{e}^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!}$$

est dérivable et elle est l'unique solution du probléme de Cauchy

$$\begin{cases} u' = au \\ u(0) = I, \end{cases}$$

Compte tenu de l'unicité des solutions du probléme de Cauchy, il en résulte que la fonction $f(t) = \mathrm{e}^{ta}$ satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation fonctionnelle de Cauchy. Le problème réciproque de savoir si les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont des solutions pour les équations différentielles linéaires de premier ordre $u' = au$, s'est avéré être plus difficile, mais il a été résolu par Nathan et Yosida . Donc la double caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle de Cauchy et par l'équation différentielle linéaire de premier ordre a été établie pour le cas général des algèbres de Banach abstraites. Ces caractérisations importantes ont sugéré l'idée d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre par des extensions adéquates de la fonction exponentielle. De cette manière est apparu la nécessité de considérer les équations différentielles vectorielles de premier ordre $u' = Au$ où A n'est pas un opérateur de l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés $\mathcal{B}(X)$, mais un opérateur linéaire non-borné dans un espace de Banach X. La définition d'une fonction exponentielle comme une solution de cette équation a été réalisée par l'introduction des semi-groupes de classe C_0 . Mais, dans ce cas-là, l'équation fonctionnelle de Cauchy se réfère aux fonctions

$$[\infty, 0) \ni t \to T(t) \in \mathcal{B}(X)$$

avec $T(0) = I$, satisfaisant la relation $T(t+s) = T(t)T(s)$ et qui sont fortement continues, c'est-à-dire ayant la propriété

$$\lim_{t \to 0} T(t)x = x$$

pour tout $x \in X$.

Dans cet esprit, le mémoire est divisé en trois chapitres :

-Premier chapitre

Ce chapitre est une présentation des notions qui seront utilisées dans cette recherche et étudie théorie des semi-groupes à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés.

-Deuxième chapitre

Ce chapitre on expose les théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Philips.

-Troisième chapitre

Dans ce chapitre nous allons étudier en détails le problème abstrait de Cauchy, en appliquant les résultats des chapitres précédents. Dans un premier temps nous allons étudier le problème homogène et le problème non homogène, et par l'occasion nous donnons quelques applications illustratives à la théorie des équations aux dérivées partielles. Ensuite nous allons étudie le problème d'évolution non linéaire.

Chapitre 1

Semi-groupes de classe C_0

Ce chapitre est une présentation des notions qui seront utilisées dans cette recherche, étudie la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach en particulier les C_0-semi-groupes .

Définition 1.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance associé à la norme.*

Définition 1.2 *Soit X un espace normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. On appelle dual (topologique) de X et on note X' l'espace $X' = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$, cet espace est complet.*

Soient X, Y deux espace vectoriels normés.

Définition 1.3 *Un opérateur linéaire A de X dans Y est une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeur dans Y. $D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur A.*
On dit que A est à domaine dense si $\overline{D(A)} = X$.

Définition 1.4 *Soient X et Y deux espace de banach, on dit que $A : D(A) \subset X \to Y$ est borné s'il exist une constante $c \geq 0$*
telle que

$$| Ax |_Y < c \mid x \mid_X, \quad \forall x \in D(A).$$

Dans le cas contraire, c-à-d $\forall c > 0$ on a $| Ax |_Y \geq c \mid x \mid_X$ $\forall x \in D(A)$, on dit que

$A : D(A) \subset X \to Y$ est non-borné.

On désigne par $\mathcal{B}(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.

$\mathcal{B}(X,Y)$ est dit espace des opérateurs bornés.

on pose $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$.

Définition 1.5 *[11] L'ensemble $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \;\; \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \to X \;\; est \;\; un \;\; opérateur \;\; bijectif\}$ s'appele l'ensemble résolvant de A.*

Définition 1.6 *L'application*

$$R(., A) : \rho(A) \to \mathcal{B}(X)$$

$$\lambda \to R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}, \;\; \forall \lambda \in \rho(A)$$

s'appelle la résolvante de A.

Proposition 1.1 *[11] La résolvante d'un opérateur linéaire $A \in \mathcal{B}(X)$, a les propriétés suivantes :*

1. *Si λ , $\mu \in \rho(A)$,alors*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

2. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mid \lambda \mid > \| A \|$ alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

3. *Nous avons*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} \;\; \forall n \in \mathbb{N}^* \;\; et \;\; \lambda \in \rho(A).$$

Définition 1.7 *L'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ s'appelle le spectre de A .*

Proposition 1.2 *[11] Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. Alors :*

1. *$\sigma(A) \neq \varnothing$*

2. *$\sigma(A)$ est un ensemble compact .*

Définition 1.8 *[11] Pour un opérateur linéaire $A \in \mathcal{B}(X)$, le nombre*

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \mid \lambda \mid$$

s'appelle le rayon spectral de$A$.

Théorème 1.1 (Banach-steinhaus) *[2] Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires bornés de X dans Y.*

On suppose que :

$$\sup_{i\in I} \mid T_i x \mid_Y < \infty$$

alors

$$\sup_{i\in I} \parallel T_i \parallel_{L(X,Y)} < \infty$$

Autrement dit il existe une constante $c \geq 0$ telle que :

$$\mid T_i x \mid_Y < c \mid x \mid_X, \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in I.$$

Définition 1.9 ***(Opérateur fermé)*** *Soient X et Y deux espaces de Banach, On dit qu'un opérateur A est fermé si le graphe de A, noté $G(A) = \{(x,Ax) : x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times Y$.*

Proposition 1.3 *[3] Un opérateur A est fermé, si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'élément de $D(A)$ telle que $x_n \to x \in X$ et $Ax_n \to y \in X$, on a alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.*

Théorème 1.2 ***(Théoréme du graphe fermé)****.[2] Soient X et Y deux espaces de Banach, soit A un opérateur linéaire de X dans Y. Si le graphe de A noté $G(A) = (x,Ax) : x \in X$ est fermé dans $X \times Y$, alors A est continue.*

Lemme 1.1 *[3] Soit $f : [a,b] \to X$ une fonction continue, alors :*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds = f(a).$$

Preuve Pour $t \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds - f(a) \| &= \| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} (f(s) - f(a))ds \| \\
&\leq \frac{1}{t} \times \sup_{s\in[a,a+t]} \| f(s) - f(a) \| \times \int_a^{a+t} ds \\
&\leq \frac{1}{t} \times \sup_{s\in[a,a+t]} \| f(s) - f(a) \| \times t \\
&= \sup_{s\in[a,a+t]} \| f(s) - f(a) \|
\end{aligned}$$

La continuité de f nous permet de conclure. □

Lemme 1.2 *Si $A \in \mathcal{B}(X)$ et $\| A \| < 1$ alors $I - A$ est inversible et $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Preuve Soit $Yn = I + A + A^2 + ... + A^n$. Alors :
$\| Y_{n+p} - Y_n \| \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1-\|A\|} \to 0$ pour $n \to \infty$.
Par conséquent, $(Y_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy. Mais $\mathcal{B}(X)$ est une algèbre de Banach. La suite $(Y_n)_{n\in N}$ est donc convergente. Notons $Y \in \mathcal{B}(X)$ sa limite. De l'égalité $(I - A)Y_n = I - A^{n+1}$, il résulte que $\lim_{n\to\infty}(I - A)Y_n = I$, d'ou $(I - A)Y = I$. Nous obtenons $Y(I - A) = I$ de façon analogue. Finalement, on voit que $I - A$ est inversible et que $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$. □

1.1 Semi-groupes uniformément continue

Nous présonterons quelques notions concernant les semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X.

Définition 1.10 *Soit X est un espace de Banach. Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{B}(X)$ est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :*

1. *$T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X),*
2. *$T(t + s) = T(t)T(s), \quad \forall t,s \geq 0.$*

Définition 1.11 *Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit un semi groupe uniformément continu sur X si :*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Définition 1.12 *On appelle le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire :*

$$A : X \to X$$

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{T(t) - I}{t}.$$

Lemme 1.3 *[3] Soit $A \in \mathcal{B}(X)$, alors $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continue d'opérateurs linéaires bornés sur X dont la générateur infinitésimal est A.*

Preuve Soit $A \in \mathcal{B}(X)$, et $t \to T(t) \in \mathcal{B}(X)$, $\forall t \geq 0$, est une application définie par :

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

La série du membre de droite de l'égalité est convergente pour la topologie de la norme de $\mathcal{B}(X)$, De plus il est évident que $T(0) = e^{(0\times A)} = I$ et $\forall t,s \geq 0$, $T(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I \right\| \\
&= \left\| I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} - 1 = e^{t\|A\|} - 1, \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\lim_{t\to 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

Donc la famille $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformément continue.

Montrons que A est le générateur infinitésimal de cette semi groupe

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t)-I}{t}-A\right\| &= \left\|\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{tA}-I-tA)\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{t}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}-I-tA)\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{t}(I+tA+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}-I-tA)\right\| \\
&\leq \frac{1}{t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k\|A\|^k}{k!} \\
&\leq \frac{1}{t}(1+t\|A\|+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k\|A\|^k}{k!}-1-t\|A\|) \\
&\leq \frac{1}{t}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\|A\|^k}{k!}-1-t\|A\|) \\
&\leq \frac{1}{t}(\mathrm{e}^{t\|A\|}-1-t\|A\|) \\
&\leq (\frac{\mathrm{e}^{t\|A\|}-1}{t\|A\|}\|A\|-\|A\|),
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{t\|A\|}-1}{t\|A\|}\|A\|-\|A\|=0,$$

nous obtenons que

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)-I}{t}-A=0.$$

Donc $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe de générateur infinitésimal A. □

Lemme 1.4 *[3] Soit A un opérateur de $\mathcal{B}(X)$. Il existe un unique semi-groupe uniformément continue $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tel que $T(t)=\mathrm{e}^{tA}$ ayant pour générateur l'opérateur A.*

Preuve Soit $A\in\mathcal{B}(X)$, alors il existe un semi groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ engendré par A.

Si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un autre semi groupe uniformément continu engendré par A, alors nous avons : $\lim_{t\to 0}\frac{T(t)-I}{t}=A$ et $\lim_{t\to 0}\frac{S(t)-I}{t}=A$

Par conséquent : $\lim_{t\to 0}\left\|\frac{T(t)-I}{t}-\frac{S(t)-I}{t}\right\|=\lim_{t\to 0}\left\|\frac{T(t)-S(t)}{t}\right\|=0.$

Soit $a>0$ fixé. Comme $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sont des semi groupes uniformément continus, alors les applications $t\to\|T(t)\|$ et $t\to\|S(t)\|$ sont continues. Il existe alors

une constante $C_a > 0$ tel le que $\sup_{t\in[0,a]}(\|T(t)\|, \|S(t)\|) \leq C_a$
Pour $t > 0$, on a $\left\|\frac{T(t)-S(t)}{t}\right\| = \left\|\frac{T(t)-I}{t} - A - (\frac{S(t)-I}{t} - A)\right\|$
Soit $\varepsilon > 0$. ce qui implique qu'il existe $\sigma > 0$ tel que pour $0 < t \leq \sigma$, on ait
$\left\|\frac{T(t)-I}{t} - A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2aC_a}$ et $\left\|\frac{S(t)-I}{t} - A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2aC_a}$
Ce qui entraîne alors que pour $0 < t \leq \sigma$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(h)-S(h)}{h}\right\| &\leq \left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| + \left\|\frac{S(h)-I}{h} - A\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{aC_a}\end{aligned}$$

Soit $t \in [0,a]$ arbitrairement fixé et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{t}{n} < \sigma$. alors :

$$\begin{aligned}\|T(t) - S(t)\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n-1}[T((n-k)\frac{t}{n})S(k\frac{t}{n}) - T((n-k-1)\frac{t}{n})S((k+1)\frac{t}{n})]\right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T((n-k)\frac{t}{n})S(k\frac{t}{n}) - T((n-k-1)\frac{t}{n})S((k+1)\frac{t}{n})\right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T((n-k-1)\frac{t}{n})T(\frac{t}{n})S(k\frac{t}{n}) - T((n-k-1)\frac{t}{n})S(k\frac{t}{n})S(\frac{t}{n})\right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T((n-k-1)\frac{t}{n})\right\|\left\|S(k\frac{t}{n})\right\|\left\|T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n})\right\| \\ &\leq C_a\frac{t}{n}\frac{\varepsilon}{aC_a}\sum_{k=0}^{n-1}1 = \varepsilon\frac{t}{a} \leq \varepsilon \quad (\text{on a } t \in [0,a] \text{ alors } \frac{t}{a} \leq 1).\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors $T(t) = S(t)$, $\forall t \in [0,a]$. Mais puisque $a > 0$ est aussi arbitraire, il s'ensuit que $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$. □

Théorème 1.3 *[3] Un opérateur $A : X \to X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continue si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Preuve • Soit $A : X \to X$ le générateur infinitésimal d'un semi groupe uniformément continue $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{B}(X)$ alors $\lim_{t\to 0}\|T(t) - I\| = 0$.

L'application $t \in [0,+\infty) \to T(t) \in \mathcal{B}(X)$ est continue, par suite $\int_0^t T(s)ds \in \mathcal{B}(X)$, donc avec le lemme 1.4 on voit que :

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)ds = T(0) = I.$$

Il existe $\tau > 0$ tel que $\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(t)dt - I \right\| < 1$, donc avec le lemme 1.3 l'élément $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(t)dt$ est inversible alors il s'ensuit que $\int_0^\tau T(t)dt$ est inversible. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h} \int_0^\tau T(t)dt &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\tau \left(T(t+h) - T(h) \right) dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} T(t)dt - \frac{1}{h} \int_0^\tau T(t)dt \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h} \int_0^\tau T(t)dt &= \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} T(t)dt - \frac{1}{h} \int_0^\tau T(t)dt \right] \\ &= T(\tau) - T(0) \\ &= T(\tau) - I \end{aligned}$$

D'où : $\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h} = [T(\tau) - I] \left[\int_0^\tau T(t)dt \right]^{-1}$

Par conséquent, le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'opérateur : $A = [T(\tau) - I] \left[\int_0^\tau T(t)dt \right]^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

- Cette implication est évidente coumpte tenu du lemme 1.4. □

Corollaire 1.1. *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformement continue et A son générateur infinitésimal, alors :*

1. *Il existe $w \geq 0$ tel que $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{wt}$ $\quad ,\forall t \geq 0$.*
2. *L'application $t \longrightarrow T(t) \in \mathcal{B}(X), \forall t \in [0, +\infty)$ est différentiable pour la topologie de la norme et $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A, \quad \forall t \geq 0$.*

Preuve Nous avons $\|T(t)\| = \|\mathrm{e}^{tA}\| \leq \mathrm{e}^{t\|A\|}$

Pour $w \geq \|A\|$, On obtient que $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{tw}$, $\forall t \geq 0$

L'assertion 2 prvient des égalités suivantes :

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)-I}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)-T(0)}{t} = \frac{d}{dt} T(0)$$

Nous déduirons que l'application $t \to T(t)$ est dérivable au point $t = 0$.

Soit $t > 0$ et $h > 0$, alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t+h)-T(t)}{h} - AT(t) \right\| &\leq \left\| \frac{T(h)-I}{h} - A \right\| \|T(t)\| \\ &\leq \left\| \frac{T(h)-I}{h} - A \right\| \mathrm{e}^{t\|A\|} \end{aligned}$$

et comme $\frac{T(h)-I}{h} \to A$ quand $t \to 0$ alors $\lim\limits_{t\to 0} \left\| \frac{T(t+h)-T(t)}{h} - AT(t) \right\| = 0$

Par conséquent, l'application $t \mapsto T(t)$ est dérivable à droite et on a $\frac{d^+T(t)}{dt} = AT(t)$, $\forall t > 0$

Soit $t > 0$ et $h < 0$ tel que $t + h > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t+h)-T(t)}{h} - AT(t) \right\| &\leq \left\| \frac{I-T(-h)}{h} - AT(-h) \right\| \|T(t+h)\| \\
&\leq \left\| \frac{T(-h)-I}{-h} - AT(-h) \right\| T(t+h)\| \\
&\leq \left\| \frac{T(-h)-I}{-h} - AT(-h) \right\| \mathrm{e}^{(t+h)\|A\|}
\end{aligned}$$

D'où il vient que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{T(t+h)-T(t)}{h} = AT(t)$.

Par conséquent, l'application $t \mapsto T(t)$ est dérivable à gauche et on a $\frac{d^-T(t)}{dt} = AT(t)$, $\forall t > 0$

Donc cette application est dérivable sur $[0, +\infty)$ et nous avons $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t)$, $\forall t \geq 0$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
T(t)A &= T(t) \lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{T(t+h)-T(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{T(h)T(t)-T(t)}{h} \\
&= AT(t).
\end{aligned}$$

alors $T(t)A = AT(t)$, $\forall t \geq 0$. □

1.2 Semi-groupes fortement continue ou C_0-semi-groupe

Définition 1.13 *On appelle C_0-semi groupe ou semi-groupe fortement continue d'opérateurs linéaires bornés sur X, un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ vérifie la propriété suivante :*

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x, \forall x \in X.$$

Définition 1.14 *On appelle le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un opérateur A définie sur l'ensemble*

$$D(A) = \{x \in X, \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A)$$

Remarque 1.1. Puisque

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - I\|\|x\| \text{ pour } x \in X \text{ et } t \geq 0$$

il en résulte que : les semi-groupes uniformement continues sont C_0-semi groupes. Mais, il existe des C_0-semi groupes qui ne sont pas uniformement continues.

Exemple 1.1 *Soit $X = C[0, +\infty) = \{f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}; f$ est uniformément continue et borné$\}$ avec la norme $\|f\|_{C[0,+\infty)} = \sup_{\alpha\in[0,+\infty)}|f(\alpha)|$.*
On définie sur X un opérateur linéaire par :

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t + \alpha), \forall t \geq 0 \text{ et } \alpha \in [0, +\infty)$$

1. *Montrons que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe :*
   (i) $(T(0)f)(\alpha) = f(\alpha), \forall\alpha \in [0, +\infty)$.
   donc $T(0) = I$.
   (ii) Soit $t,s \geq 0$, $\forall\alpha \in [0, +\infty)$,

$$T((t + s)f)(\alpha) = f(t + s + \alpha) \tag{1.1}$$

   et

$$(T(t)T(s)f)(\alpha) = T(t)f(s + \alpha) = f(t + s + \alpha) = (T(t + s)f)(\alpha), \tag{1.2}$$

   de (1.1) et (1.2), on trouve $(T(t+s)f)(\alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha), \forall\alpha \in [0, +\infty)$ $t,s \geq 0$.
   (iii) On a

$$\|T(t)f - f\|_{C[0,+\infty)} = \sup_{\alpha\in[0,+\infty)} |T(t)f(\alpha) - f(\alpha)| = \sup_{\alpha\in[0,+\infty)} |f(t + \alpha) - f(\alpha)|$$

   comme f est uniformement continue, alors :

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_{C[0,+\infty)} = 0$$

   D'où $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continue.

2. *Trouvons maintenent le générateur infinitésimal de* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$

Soit $A : D(A) \subseteq C[0,+\infty) \to C[0,+\infty)$ *le générateur infinitésimal de* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, *soit* $f \in D(A)$

$$Af(\alpha) = \lim_{t\to} \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t+\alpha) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,+\infty)$$

donc $D(A) \subset \{f \in C[0,+\infty)/f' \in C[0,+\infty)\}$.

Inversement, soit $f' \in C[0,+\infty)$ *tel que* $f' \in C[0,+\infty)$

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{C[0,+\infty)} = \sup_{\alpha\in[0,+\infty)} \left| \frac{f(t+\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|$$

mais,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(t+\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \left| [\frac{1}{t} f(\tau)]_{\alpha}^{t+\alpha} - f'(\alpha) \right| \\
&= \left| \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} [f'(\tau) - f'(\alpha)] d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)| d\tau
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{C[0,+\infty)} &\leq \sup_{\alpha\in[0,+\infty)} \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)| d\tau \\
&\leq \sup_{\alpha\in[0,+\infty)} \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} \sup_{\tau\in[0,+\infty)} |f'(\tau) - f'(\alpha)| d\tau \\
&\leq \frac{1}{t} \sup_{\alpha\in[0,+\infty)} \sup_{\tau\in[\alpha,\alpha+t]} |f'(\tau) - f'(\alpha)| \int_{\alpha}^{\alpha+t} d\tau, \quad f' \in C[0,+\infty) \\
&\leq \sup_{\tau\in[\alpha,\alpha+t]} |f'(\tau) - f'(\alpha)|
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{C[0,+\infty)} \leq \lim_{t\to 0} \sup_{\tau\in[\alpha,\alpha+t]} |f'(\tau) - f'(\alpha)|$$

Alors

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{C[0,+\infty)} = 0$$

Donc $f' \in C[0,+\infty)$, *D'où* $D(A) = \{f \in C[0,+\infty)/f' \in C[0,+\infty)\}$ *et*

$$Af(\alpha) = f'(\alpha), \;\; \forall \alpha \in [0,\infty), \;\; \forall f \in D(A).$$

1.2.1 Propriétés des C_0-semi-groupes

Théorème 1.4 *[3] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés. Alors :*

1. *Il existe $\tau > 0$ et $M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M \quad \forall t \in [0, \tau]$.*
2. *Il existe $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt} \quad \forall t \geq 0$.*

Preuve 1. Supposons que : pour $\forall \tau \geq 0$ et $M \geq 0$, il existe $t \in [0, \tau]$ tel que $\|T(t)\| > M$.
En particulier pour $\tau = \frac{1}{n}$ et $M = n \in \mathbb{N}^*$ il existe $t_n \in [0,\frac{1}{n}]$, tel que $\|T(t_n)\| > n$, donc la suite $(\|T(t_n)\|)_n \in \mathbb{N}^*$ est non bornée alors d'aprés le théorème de Banach Steinhaus (1) la suite $(\|T(t_n)x_n\|)_n \in \mathbb{N}^*$ est non bornèe pour tout $x_n \in X$, donc il existe $x_0 \in X$ tel que $(\|T(t_n)x_0\|)_n \in \mathbb{N}^*$ soit non bornèe. Ce qui controdiut par la dèfinition : on a $\lim_{n\to 0}\|T(tn)x_0\| = \|x_0\|$ (car $(t_n \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty)$. Donc $\exists \tau > 0$ et $M \geq 0$ tel que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \in [0,\tau]$.

2. Soit t quelconque tel que $t = n\tau + r, n \in \mathbb{N}^*$, $\tau \geq 0$, $0 \leq r \leq \tau$ alors,

$$\begin{aligned}
\|T(t)\| &= \|T(n\tau + r)\| = \|T(n\tau)T(r)\| \\
&= \|T(n\tau)\|\|T(r)\| \\
&= \Bigg\|T(\underbrace{\tau + \tau + ... + \tau}_{n\ fois})\Bigg\| \|T(r)\| \\
&= \|T(\tau)\|^n\|T(r)\| \\
&\leq M^n M \qquad (D'après\ \ le\ \ théorème\ 1.4) \\
&\leq M\mathrm{e}^{n\ln M} \\
&\leq M\mathrm{e}^{\frac{t-r}{\tau}\ln M} \\
&\leq M\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}\ln M}\mathrm{e}^{\frac{-r}{\tau}\ln M}, \quad (\mathrm{e}^{\frac{-r}{\tau}\ln M} \leq 1) \\
&\leq M\mathrm{e}^{(\frac{1}{\tau}\ln M)t}
\end{aligned}$$

Donc, on prend $w = \frac{1}{\tau}\ln M$ $\square$

Corollaire 1.2. *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe, alors l'application $t \in [0, +\infty) \to T(t)x \in X$ est continue sur $[0, +\infty)$, $\forall x \in X$.*

Preuve Soient $t_0 \in [0,+\infty)$, $h > 0$ et $x \in X$

Si $t_0 < h$, nous avons

$$\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0)\|\|T(h)x - Ix\|$$

donc

$$\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| \leq M\mathrm{e}^{wt_0}\|T(h)x - Ix\|$$

alors

$$\lim_{h\to 0}\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| = 0.$$

Si $t_0 > h$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\|T(t_0-h)x - T(t_0)x\| &\leq \|T(t_0-h)\|\|T(h)x - x\| \\ &\leq M\mathrm{e}^{w(t_0-h)}\|T(h)x - x\|\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\|T(t_0-h)x - T(t_0)x\| = 0.$$

D'où la continuité de cette application est vérifiée. □

Remarque 1.2. Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe, alors avec le théorème 1.4, on voit qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ et$M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt}$, $\forall t \geq 0$. Si $w < 0$ alors nous obtenons $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt} \leq M$, $\forall t \geq 0$. Par conséquen on peut considérer que pour $\omega \geq 0$ on note $SG(M{,}\omega)$ l'ensemble des C_0-semi groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tels que : $\exists \omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$.

Propriétés 1.1. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M{,}\omega)$ et A son générateur infinitésimal, si $x \in D(A)$ alors $T(t)x \in D(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x,\ \forall t \geq 0$.

Preuve Soit $x \in D(A)$, alors pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
T(t)Ax &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)x - x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)+T(t)x - T(t)x}{h}\\
&= AT(t)x.
\end{aligned}$$

donc $T(t)x \in D(A)$ et on a : $T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geq 0, \forall x \in D(A)$. □

Théorème 1.5 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors, l'application $t \in [0,+\infty) \to T(t)x \in X$ est dérivable sur $[0,+\infty)$ pour tout $x \in D(A)$ et nous avons :*

1. $\frac{dT(t)}{dt}x = T(t)Ax = AT(t)x, \forall t \geq 0.$
2. $T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds, \forall t \geq 0.$

Preuve 1. Soient $x \in D(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t)\|\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\|\\
&\leq Me^{\omega t}\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\|
\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim\limits_{t\to 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax$, $\forall t \geq 0$. Donc $\frac{d^+T(t)}{dt}x = T(t)Ax$.
D'autre part, soit $t - h > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - T(h)Ax\right\|\\
&\leq Me^{\omega(t-h)}\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax\right\|\\
&\leq Me^{\omega(t-h)}\left(\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| + \|T(h)Ax - Ax\|\right)
\end{aligned}$$

Par suite $\lim\limits_{t\to 0}\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = T(t)Ax$, $\forall t \geq 0$. Donc $\frac{d^-T(t)}{dt}x = T(t)Ax$, $\forall t \geq 0$.
Il s'ensuit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0,+\infty)$, $\forall x \in D(A)$. De plus, $\frac{dT(t)}{dt}x = T(t)Ax = AT(t)x$, $\forall t \geq 0$.

2. Soit $x \in D(A)$, alors nous avons :

$$\frac{dT(s)}{ds}x = T(s)Ax, \forall s \in [0,t], t \geq 0.$$

D'où

$$\int_0^t dT(s)x = \int_0^t T(s)Axds.$$

Donc

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds, \forall t \geq 0.$$

Lemme 1.5 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe, alors :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x, \forall x \in X, t \geq 0.$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x\| &= \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(s)x - T(t)x)ds\| \\
&\leq \sup_{s\in[t,t+h]} \|T(s)x - T(t)x\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} ds \\
&= \sup_{s\in[t,t+h]} \|T(s)x - T(t)x\|
\end{aligned}$$

Comme l'application $t \in [0, +\infty) \to T(t)x \in X$, est continu on trouve le résultat. □

Propriétés 1.2. Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in X$, alors $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ et on a l'égalité

$$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \forall t \geq 0.$$

Preuve Soient $x \in X$ et $h > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)xdu \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)xdu.
\end{aligned}$$

Par passage à limite pour $h \to 0$ et compte tenu du lemme précédent, nous obtenons :$A\int_0^t T(s)xds = T(t)x - x, \forall t \geq 0$ et $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$ $\square$

Théorème 1.6 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal, alors :*

1. $\overline{D(A)} = X$.
2. *A est un opérateur fermé.*

Preuve 1. Soient $x \in X$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$.
Alors $x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds \in D(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds = T(0)x = x$. Par conséquent $\overline{D(A)} = X$.

2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\|\|Ax_n - y\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}\|Ax_n - y\|, \forall s \in [0,t].$$

Par suite :

$$T(s)Ax \to T(s)y, \text{ pour } n \to +\infty$$

uniformément par rapport à $s \in [0,t]$. D'autre part, puisque $x_n \in D(A)$, nous avons

$$T(s)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

d'ou

$$\lim_{n\to\infty}[T(s)x_n - x_n] = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_n ds$$

ou bien,$T(s)x - x = \int_0^t T(s)yds$.

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(s)x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds = y.$$

Par suite, $x \in D(A)$ et $A(x) = y$, d'où, il résulte que A est un opérateur fermé. $\square$

Théorème 1.7 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal et $F \in \mathcal{B}(X)$. Alors $T(t)F = FT(t)$ pour tout $t \geq 0$ si et seulement si*

$$FD(A) \subseteq D(A)$$

et

$$FAx = AFx, \forall x \in D(A).$$

Théorème 1.8 (l'unicité de l'engendrement) *Soient deux C_0 semi groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors $T(t) = S(t), \forall t \geq 0$.*

Preuve Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. Définissons l'application

$$s \in [0,t] \to U(s)x = T(t-s)S(s)x.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x \\ &= 0, \forall x \in D(A).\end{aligned}$$

Par suite, $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$, d'où $T(t)x = S(t)x$, $\forall x \in D(A)$ et $t \geq 0$. Puisque $\overline{D(A)} = X$ alors $T(t), S(t) \in \mathcal{B}(X)$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que : $T(t)x = S(t)x$, $\forall t \geq 0$ et $x \in X$. Ou bien : $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$. $\square$

1.3 C_0-Semi groupe de contraction

Définition 1.15 *Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe sur* X.

1. *$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est dit uniformément borné sur X s'il existe $M \geqslant 1$ telle que $\|T(t)\| \leqslant M, \forall t \geqslant 0$.*
2. *$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ est dit un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe de contractions si $\|T(t)\| \leqslant 1, \forall t \geqslant 0$.*

Chapitre 2

Théorème de Hille-Yosida

Dans la suite nous présentons un résultat important concernant les semi groupe de classe C_0. Il s'agit le théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui soit générateurs de C_0-semi groupe.

2.1 La transformé de Laplace d'un C_0 semi-groupe

Définition 2.1 *Nous désignerons par A_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\}$ pour $\omega > 0$.*

Théorème 2.1 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $\lambda \in A_\omega$, alors l'application*

$$R_\lambda : X \to X$$

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

Définit un opérateur linéaire borné sur X, $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda, A)x$ pour tout $x \in X$.

Preuve Soit $\lambda \in A_\omega$ puisque $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ nous avons

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

et on voit que :

$$\begin{aligned}\|e^{-\lambda t}T(t)x\| &\leq e^{-Re\lambda t}\|T(t)\|\|x\| \\ &\leq Me^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\|,\ \forall x\in X\end{aligned}$$

On définit l'application :

$$R_\lambda :\quad X\to X$$

par :

$$R_\lambda x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire de plus on a :

$$\|R_\lambda x\|\leq\int_0^{+\infty}\|e^{-\lambda t}T(t)x\|dt\leq\frac{M}{Re\lambda-\omega}\|x\|,\ \forall x\in X$$

D'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné, si $x\in X$ alors nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{T(h)R_\lambda x-R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t+h)xdt-\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{+\infty}e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds-\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^{+\infty}e^{-\lambda s}T(s)xds-\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left[\int_0^{+\infty}e^{-\lambda s}T(s)xds-\int_0^{h}e^{-\lambda s}T(s)xds\right]-\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda s}T(s)xds-\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h}e^{-\lambda s}T(s)xds\end{aligned}$$

Par passage à limite on obtient :

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)R_\lambda x-R_\lambda x}{h}=\lambda R_\lambda x-x$$

Il en résulte que :

$$R_\lambda x\in D(A)\ et\ AR_\lambda x=\lambda R_\lambda x-x,\ \forall x\in X$$

Ou bien :

$$(\lambda I-A)R_\lambda x=x,\ \forall x\in X$$

Si $x \in D(A)$, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned} R_\lambda Ax &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)Axdt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t)xdt \\ &= [\mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x]_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)xdt \\ &= -x + \lambda R_\lambda x \end{aligned}$$

D'où :

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x, \ \forall x \in D(A)$$

Finalement, on voit que $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda, A)x$, pour tout $x \in X$. □

Définition 2.2 *L'opérateur*

$$R_\lambda : X \to X$$

$$R_\lambda x = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)xdt$$

S'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in SG(M,\omega)$.

Théorème 2.2 *Soient* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *un* C_0 *semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal, pour tout* $\lambda \in A_\omega$ *on a :*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe alors :

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{wt} \quad \forall t \geq 0.$$

Compte tenu de théorème (2.1), si $\lambda \in A_\omega$ nous avons :

$$\lambda \in \rho(A) \ \ et \ \ R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x dt, \ \ \forall x \in X.$$

De plus :

$$\|R(\lambda, A)x\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)}.$$

Il est claire que :

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x = -\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x dt, \ \ \forall x \in X$$

et par récurrence on peut montre que :

$$\frac{d}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x dt, \ \ \forall x \in X \ \ et \ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

D'autre part nous avons :

$$\frac{d}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} x, \ \ \forall x \in X \ \ et \ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Par suit on a :

$$(-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} x = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t} T(t)x dt, \ \ \forall x \in X \ \ et \ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus :

$$\begin{aligned}\|R(\lambda,A)^n x\| &\leq \frac{M\|x\|}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-(Re\lambda-\omega)t}dt\\ &\leq \frac{M\|x\|(n-1)}{(n-1)!(Re\lambda-\omega)}\int_0^{+\infty} t^{n-2}\mathrm{e}^{-(Re\lambda-\omega)t}dt = ...\\ &= \frac{M\|x\|}{(Re\lambda-\omega)^n}\end{aligned}$$ □

quel que soient $x \in X$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$, par conséquent :

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

2.2 L'approximation généralisée de Yosida

Lemme 2.1 *Soit* $A : D(A) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) A *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = X$

(ii) Il existe $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 0$ *tel que* $A_\omega \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in A_\omega$ *on a :*

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors pour tout $\lambda \in A_\omega$ *nous avons :*

$$\lim_{Re\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda,A)x = x,\ \forall x \in X.$$

De plus :

$$\lambda AR(\lambda,A) \in \mathcal{B}(x) \text{ et } \lim_{Re\lambda\to+\infty} \lambda AR(\lambda,A)x = Ax,\ \forall x \in D(A).$$

Preuve Soient $x \in D(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > \omega$ alors $R(\lambda, A)(\lambda I - A)x = x$, Si $Re\lambda \to +\infty$ nous avons :
$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \|R(\lambda, A)\|\|Ax\| \leq \dfrac{M}{Re\lambda - \omega}\|Ax\| \to 0.$
D'où il résulte que :

$$\lim_{Re\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall x \in D(A).$$

Soit $x \in X$, puisque $\overline{D(A)} = X$, il existe une suite $(x_n)_n \in \mathbb{N} \subset D(A)$ tel que $x_n \to x$ si $n \to +\infty$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)x_n\| + \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&\leq \|\lambda R(\lambda, A)\|\|x_n - x\| + \|\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&\leq \frac{\mid \lambda \mid M}{Re\lambda - \omega}\|x_n - x\| + \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|Ax_n\| + \|x_n - x\| \\
&= \frac{\mid \lambda \mid M + Re\lambda - \omega}{Re\lambda - \omega}\|x_n - x\| + \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|Ax_n\|
\end{aligned}$$

Mais $x_n \to x$ si $n \to \infty$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|x_{n_\varepsilon} - x\| < \varepsilon \frac{Re\lambda - \omega}{\mid \lambda \mid M + Re\lambda - \omega}.$$

Par conséquent :

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \leq \varepsilon + \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|Ax_{n_\varepsilon}\|.$$

D'où :

$$\lim_{Re\lambda \to +\infty} \sup\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \leq \varepsilon \ \forall x \in X.$$

Ou bien

$$\lim_{Re\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall x \in X.$$

De plus :

$$\begin{aligned}\lambda AR(\lambda, A) &= \lambda[\lambda I - (\lambda I - A)]R(\lambda, A) \\ &= \lambda[\lambda R(\lambda, A) - I] \\ &= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.\end{aligned}$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}\|\lambda AR(\lambda, A)x\| &= \|\lambda[\lambda R(\lambda, A) - I]x\| \\ &\leq \mid \lambda \mid \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| \\ &\leq \mid \lambda \mid (\|\lambda R(\lambda, A)x\| + \|x\|) \\ &\leq \mid \lambda \mid \left(\frac{\mid \lambda \mid M}{Re\lambda - \omega} + 1\right) \|x\|, \ \forall x \in X\end{aligned}$$

et on voit que $\lambda AR(\lambda, A) \in \mathcal{B}(X)$. Si $x \in D(A)$, alors nous avons :

$$\begin{aligned}\lambda R(\lambda, A)Ax &= [\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I]x \\ &= \lambda AR(\lambda, A)x.\end{aligned}$$

D'où il résulte que :

$$\begin{aligned}\lim_{Re\lambda \to +\infty} \lambda AR(\lambda, A)x &= \lim_{Re\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax \\ &= Ax, \ \ \forall x \in D(A).\end{aligned}$$ □

Remarque 2.1 *On peut dire que les opérateurs bornés $\lambda AR(\lambda, A)$ sont des approximations pour l'opérateur non borné A.*

Définition 2.3 *La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{A}_\omega}$, où $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ S'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A.*

Lemme 2.2 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = X$

(ii) Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $A_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in A_\omega$ on a :

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n},\ n \in \mathbb{N}^*$$

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{A}_\omega}$ est l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A, alors pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_\omega$ nous avons :

$$\|e^{tA\alpha}x - e^{tA\beta}x\| \leq M^2 t e^{\omega t}\|A_\alpha x - A_\beta x\|,\ \forall x \in X \text{ et } t \geq 0$$

Preuve Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_\omega, v \in [0,1]$ *et* $x \in X$ alors :

$$\frac{d}{dv}(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x) = tA_\alpha e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x$$

On peut facilement vérifier que $A_\alpha, A_\beta, e^{vtA_\alpha}$ *et* $e^{(1-v)tA_\beta}$ commutent quels que soit $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_\omega$ et $t \geq 0$ nous obtenons :

$$\int_0^1 \frac{d}{dv}(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x)dv = \int_0^1 (tA_\alpha e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x)dv$$

D'où :

$$[e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x]_0^1 = \int_0^1 (tA_\alpha e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x)dv$$

Où bien :

$$e^{tA\alpha}x - e^{tA_\beta}x = t\int_0^1 e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}(A_\alpha x - A_\beta x)dv$$

quels que soient $t \geq 0$ *et* $x \in X$ nous en déduisons que :

$$\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\| \leq t\int_0^1 \|e^{vtA_\alpha}\|\|e^{(1-v)tA_\beta}\|\|A_\alpha x - A_\beta x\|dv$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|e^{tA_\alpha}\| = \|e^{t(\alpha^2R(\alpha,A)\alpha t-I)}\| &= \|e^{\alpha tI}e\alpha^{2t}R(\alpha,A)\| \\
&\leq e^{-Re\ \alpha t}\left\|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k\alpha^{2k}R(\alpha,A)^K}{k!}\right\| \\
&\leq e^{-Re\ \alpha t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k\mid\alpha\mid^{2k}\|R(\alpha,A)^K\|}{k!} \\
&\leq e^{-Re\ \alpha t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k\mid\alpha\mid^{2k}M}{k!(Re\ \alpha-\omega)^k} \\
&= Me^{-Re\ \alpha t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\frac{t\mid\alpha\mid^2}{Re\ \alpha-\omega})^k}{k!}
\end{aligned}$$

□

2.3 Théorème de Hille-Yosida

Théorème 2.3 (Hille-Yosida) *Un opérateur linéaire*

$$A : D(A) \subset X \to X$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq0} \in SG(M,\omega)$ *si et seulement si :*

(i) A *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = X$

(ii) Il existe $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que* $A_\omega \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in A_\omega$ *on a :*

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n},\ n \in \mathbb{N}^*$$

Preuve Si $\{T(t)\}_{t\geq0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal alors d'après le théorème 1.6 on obtient (i) et d'après le théorème 2.2 on obtient (ii)

Réciproquement supposons que l'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ possède les propriétés (i) et (ii)

Soit $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ l'approscimation généraliseé de Yosida de l'opérateur A. d'après le lemme 2.1 il résulte que

$$A_\lambda \in \mathcal{B}(X) \text{ et } \lim_{\mathrm{Re}\,\lambda\to+\infty} A_\lambda x = Ax, \forall x \in D(A)$$

Pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, soit $\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0} = \left(e^{tA_\lambda}\right)_{t\geq 0}$ le semi-groupe uniformément continue engendré par A_λ, avec le lemme 2.2 on a :

$$\|T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x\| \leq M^2 te^{\omega t} \|A_\alpha x - A_\beta x\| \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda_\omega \text{ et } x \in D(A), \text{ et } \forall t \geq 0.$$

Soient l'espace $(D(A))$ de Banach $D(A)$ avec la norme $\|\cdot\|_{D(A)}$ et $\mathcal{B}(D(A), X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés défini sur $(D(A))$ avec valeur dans X, muni de la topoligie forte.

On note par $C([0, +\infty[, \mathcal{B}((D(A)), X))$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0, +\infty[$ a valeur dans $\mathcal{B}((D(A)), X)$ muni de la topolpgie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0, +\infty[$ Si $[a, b] \subset [0, +\infty[$, alors pour tout $x \in D(A)$ on a :

$$\sup_{t\in[a,b]} \|T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x\| \leq M^2 be^{\omega b} (\|A_\alpha x - Ax\| + \|A_\beta x - Ax\|)$$

et

$$(\|A_\alpha x - Ax\| + \|A_\beta x - Ax\|) \to 0 \text{ si } \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta \to +\infty$$

D'où il résulte que $\left\{\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $C([0,+\infty[, \mathcal{B}((D(A)), X))$, donc il existe un unique $T_0 \in C([0, +\infty[, \mathcal{B}((D(A)), X))$ tel que

$$T_\lambda(t)x \overset{C.U}{\to} T_0(t)x, \text{ si } \operatorname{Re}\lambda \to +\infty, \forall x \in D(A)$$

Puisque

$$\|T_\lambda(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$$

Par suite

$$\|T_\lambda(t)x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|, \forall t \geq 0 \text{ et } x \in D(A)$$

Soit l'application linéaire

$$\psi_0 : D(A) \to C([a, b], X)$$
$$\psi_0 x = T_0(.)x, \forall a, b \in [a, b] \subset [0, +\infty[$$

Comme on a :

$$\|\psi_0 x\|_{C([a,b],X)} \leq \sup_{t\in[a,b]} \|T_0(t)x\| \leq Me^{\omega b}\|x\|_{D(A)}, \forall x \in D(A)$$

Donc ψ_0 est continue et puisque $\overline{D(A)} = X$, elle se prolonge de façon unique application linéaire continue $\psi : X \to C([a,b], X)$ tel que

$$\psi_{/D(A)} = \psi_0$$

et

$$\|\psi x\|_{C([a,b],X)} \leq Me^{\omega b}\|x\|, \forall x \in X$$

Par conséquent, il existe un seul opérateur $T \in C([a,b], \mathcal{B}(X))$ tel que

$$\psi x = T(.)x, \forall x \in X$$

Ainsi quel que soit $[a,b] \subset [0,+\infty[$, il existe un seul opérateur noté $T \in C([a,b], \mathcal{B}(X))$ tel que pour tout $x \in X$ on a :

$$T_\lambda(t)x \to T(t)x, \text{ si } \operatorname{Re}\lambda \to +\infty$$

Uniformément par rapport à t sur les intervalle compacts de $[0,+\infty[$ de plus

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

D'autre part

$$T(0)x = \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} T_\lambda(t)x = x, \forall x \in X$$

et

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = \lim_{t\to 0}\left(\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty} T_\lambda(t)x\right) = \lim_{\operatorname{Re}\lambda\to+\infty}\left(\lim_{t\to 0} T_\lambda(t)x\right) = x, \forall x \in X.$$

Soient $t, s \in [0,+\infty[$ et $x \in X$, alors

$$\begin{aligned}
\|T(t+s)x - T(t)T(s)x\| &\leq \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \|T_\lambda(t+s)x - T_\lambda(t)T(s)x\| \\
&\quad + \|T_\lambda(t)T(s) - T(t)T(s)x\| \\
&\leq \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \|T_\lambda(t)\|\,\|T_\lambda(s)x - T(s)x\| \\
&\quad + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\|
\end{aligned}$$

Puisque $T_\lambda(t) \to T(t)$ si $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$ pour la topologie forte de $\mathcal{B}(X)$, par suite $T(t+s)x = T(t)T(s)x$ pour tout $x \in X$, par conséquent $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$.

Montrons que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. pour tout $x \in D(A)$ on a :

$$\begin{aligned}\|T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax\| &\leq \|T_\lambda(s)\| \, \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \\ &\leq Me^{\omega t} \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \to 0 \text{ si } \operatorname{Re}\lambda \to +\infty\end{aligned}$$

uniformément par rapport à $s \in [0, t]$ D'où

$$\begin{aligned}T(t)x - x &= \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} [T_\lambda(t)x - x] \\ &= \lim_{\operatorname{Re}\lambda \to +\infty} \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Axds\end{aligned}$$

quel que soient $x \in D(A)$ et $t \geq 0$.

Soit B le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, si $x \in D(A)$ alors :

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Axds = Ax$$

donc $x \in D(B)$, par conséquent $D(A) \subset D(B)$ et $B_{/D(A)} = A$. D'autre part on a l'inégalité

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$$

$$\text{Si } \lambda \in \Lambda_\omega \text{ alors } \lambda \in \rho(A) \cap \rho(B).$$

Soit $x \in D(B)$, on a donc $(\lambda I - B)x \in X$ et comme l'opérateur $(\lambda I - A) : D(A) \to X$ est bijectif, il existe que $x' \in D(A)$ tel que

$$(\lambda I - A)x' = (\lambda I - B)x$$

et comme $\lambda \in \rho(B)$ il en résulte que $x' = x$. Par suite, $x \in D(A)$ et donc $D(B) \subset D(A)$. On a donc

$$D(B) = D(A) \text{ et } A = B.$$

Ainsi, A est le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et d'après le théorème 1.8 il résulte que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'unique C_0 semi-groupe engendré par A. □

Théorème 2.4 *[3] Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe de contractions $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur X si et seulement si :*

1. *$\overline{D(A)} = X$ et A est un opérateur fermé,*
2. *$]0, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a $\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$.*

2.4 Théorème de Lumer-Phillips

Dans ce paragraphe, nous présentons une autre caractérisation concernant les C_0-semi-groupes de contractions. Il s'agit du théorème de Lumer-Phillips.
Pour $f \in X'$ et $x \in X$ notons $f(x)$ par $\langle f, x\rangle$ ou $\langle x, f\rangle$.
Pour tout $x \in X$ on note $\mathcal{F}(x) = \{f \in X' : \langle f, x\rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$.

Définition 2.4 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est dit dissipatif si pour tout $x \in D(A)$, il existe $f \in \mathcal{F}(x)$ telle que $\mathrm{Re}\langle f, Ax\rangle \leqslant 0$.*

Lemme 2.3 *Si $(\mathcal{H}, <\ ,\ >)$ est un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opémateur linéaire. Alors A est dissipatif si et seulement si*

$$\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leqslant 0, \quad \forall x \in D(A)$$

Théorème 2.5 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est dissipatif si et seulement si :*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geqslant \lambda\|x\|, \forall\lambda > 0, \forall x \in D(A)$$

Preuve Soient A un opérateur dissipatif, $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$. Si $f \in \mathcal{F}(x)$ et $\mathrm{Re}\langle f, Ax\rangle \leqslant 0$, alors

$$\|\lambda x - Ax\|\|x\| \geqslant |\langle \lambda x - Ax, f\rangle| \geqslant \mathrm{Re}\langle \lambda x - Ax, f\rangle \geqslant \lambda\|x\|^2$$

Réciproquement, Soit $x \in D(A)$ tel que $\lambda\|x\| \leqslant \|\lambda x - Ax\|$ pour tout $\lambda > 0$. Si $f_\lambda \in \mathcal{F}(\lambda x -$
$g_\lambda = \dfrac{f_\lambda}{\|f_\lambda\|}$, alors $\|g_\lambda\| = 1$ et
$Ax)$

$$\begin{aligned}\lambda\|x\| &\leqslant \|\lambda x - Ax\| \leqslant \|f_\lambda\|^{-1}\|\lambda x - Ax\|\,\|f_\lambda\| = \|f_\lambda\|^{-1}\langle \lambda x - Ax, f_\lambda\rangle = \langle \lambda x - Ax, g_\lambda\rangle \\ &= \lambda\,\mathrm{Re}\,\langle x, g_\lambda\rangle - \mathrm{Re}\,\langle Ax, g_\lambda\rangle \\ &\leqslant \lambda\|x\| - \mathrm{Re}\,\langle Ax, g_\lambda\rangle\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Re}\,\langle Ax, g_\lambda\rangle \leqslant 0$. Puisque $\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant -|\alpha|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, alors pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathrm{Re}\,\langle x, g_\lambda\rangle \geqslant \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \tag{2.1}$$

Par le théorème d'Alaoglu-Bourbaki la boule unité de X' est * -faiblement compacte, donc la suite généralisée g_λ, pour $\lambda \to +\infty$, admet une valeur d'adhérence pour la topologie faible-* $g \in X'$, $\|g\| \leqslant 1$. De l'inégalité (2.1) on a $\mathrm{Re}\langle Ax, g\rangle \leqslant 0$ et $\mathrm{Re}\langle x, g\rangle \geqslant \|x\|$. D'autre part on a $\mathrm{Re}\langle x,g\rangle \leqslant |\langle x,g\rangle| \leqslant \|x\|$, et donc $\langle x,g\rangle = \|x\|$ Soit $f=\|x\|g$, alors $f\in\mathcal{F}(x)$ et $\mathrm{Re}\langle f,Ax\rangle \leqslant 0$. Donc pour tout $x\in D(A)$ il existe $f\in\mathcal{F}(x)$ telle que $\mathrm{Re}\langle f,Ax\rangle \leqslant 0$, et donc A est dissipatif. $\square$

Proposition 2.1 *Soit $A: D(A)\subset X \longrightarrow X$ un opérateur dissipatif, Alors :*

1. *$\lambda I - A$ est injectif pour tout $\lambda>0$, et on a*
$$\left\|(\lambda I-A)^{-1}y\right\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|y\|, \forall y\in \mathrm{Im}(\lambda I-A) \tag{2.2}$$
2. *Il existe $\lambda_0>0$ tel que $\lambda_0 I-A$ soit surjectif si et seulement si, $\lambda I-A$ est surjectif pour tout $\lambda>0$. Dans ce cas $]0,+\infty[\subset\rho(A)$.*
3. *A est fermé si et seulement $\mathrm{Im}\,(\lambda_0 I-A)$ est fermé pour un certain $\lambda_0>0$, et donc $\mathrm{Im}(\lambda I-A)$ est fermé pour tout $\lambda>0$.*

Preuve 1. Découle immédiatement de l'inégalité (II.4.1) du théorème 2.5.

2. Supposons qu'il existe $\lambda_0>0$ tel que $\lambda_0 I-A$ soit surjectif, alors il suit de 1) que $\lambda_0 I-A$ est bijectif et donc $\lambda_0\in\rho(A)$ et que $\left\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{\lambda_0}$
On en déduit que $(\lambda_0 I-A)^{-1}$ est un opérateur borné et donc il est fermé. Donc $\lambda_0 I-A$ est aussi fermé, ce qui entraine alors que A est un opérateur fermé.
Maintenant, montrons que pour tout $\lambda>0, \mathrm{Im}(\lambda I-A)=X$. Pour cela, considérons l'ensemble :
$$\Lambda=\{\lambda\in]0,+\infty[: \mathrm{Im}(\lambda I-A)=X\}$$
On a $\Lambda\neq\emptyset$. Montrons que Λ est à la fois ouvert et fermé dans $]0,+\infty[$.
Soit $\lambda\in\Lambda$, alors par l'inégalité (II.4.1), $\lambda\in\rho(A)$, et comme $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, il existe un voisinage V de λ tel que $V\subset\rho(A)$. Il est clair que $V\cap]0,+\infty[$ est un voisinage de λ contenu dans Λ. Ainsi Λ est un ouvert de $]0,+\infty[$.
D'autre part, soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}\subset\Lambda$ telle que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\lambda} > 0$ Pour tout $y\in X$, il existe $(x_n)_{n\geqslant 0}\subset D(A)$ telle que :
$$y=\lambda_n x_n - Ax_n \tag{2.3}$$
Il vient de l'inégalité (2.2) que
$$\|x_n\| \leqslant \frac{1}{\lambda_n}\|\lambda_n x_n - Ax_n\| = \frac{1}{\lambda_n}\|y\| \leqslant C$$

où C est une constante positive. De la dissipativité de A et de l'égalité (2.3) il vient que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on ait

$$\begin{aligned}\lambda_m \|x_n - x_m\| &\leqslant \|(\lambda_m I - A)(x_n - x_m)\| \\ &\leqslant \|\lambda_m x_n - \lambda_m x_m - A(x_n - x_m)\| \\ &= \|\lambda_m x_n - \lambda_m x_m - (\lambda_n x_n - \lambda_m x_m)\| \\ &= |\lambda_n - \lambda_m| \|x_n\| \\ &\leqslant C |\lambda_n - \lambda_m|\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est de Cauchy dans X qui est un espace de Banach. Soit alors $x = \lim x_n$ Par l'égalité (2.2) on a $Ax_n = \lambda_n x_n - y \underset{n \to +\infty}{\lambda} x - y$. Comme A est fermé, alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et que $Ax = \lambda x - y$, d'où $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = X$. Donc $\lambda \in \Lambda$, ainsi Λ est fermé dans $]0, +\infty[$.

Finalement. Λ est à la fois ouvert et fermé non vide dans $]0, +\infty[$ qui est connexe, on en déduit que $\Lambda =]0, +\infty[$. Ainsi pour tout $\lambda > 0, \mathrm{Im}(\lambda I - A) = X$, et donc $]0, +\infty[\subset \rho(A)$.

3. L'opérateur A est fermé si et seulement si il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\lambda_0 I - A$ soit fermé. Ce qui est équivalent à $(\lambda_0 I - A)^{-1} : \mathrm{Im}(\lambda_0 I - A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ est fermé.
   Or par l'inégalité (2.2) l'opérateur $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est borné sur $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A)$.
   On déduit alors du lemme I.2.4 que, $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est fermé si et seulement si $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A)$ est fermé dans X. $\square$

Théorème 2.6 ***(Lumer-Phillips)*** *Soit A un opérateur linéaire à domaine $D(A)$ dense dans X.*

1. *Si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que Im $(\lambda_0 I - A) = X$, alors A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe de contractions sur X.*

2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe de contractions sur X, alors $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$ et A est un opérateur dissipatif. De plus pour tout $x \in D(A)$ et tout $f \in \mathcal{F}(x)$ on a $\mathrm{Re}\langle f, Ax \rangle \leqslant 0$.*

Chapitre 3

Problème abstrait de Cauchy

Dans ce chapitre, nous utilisons la théorie des semi groupes pour résoudre le problème abstrait de Cauchy.

3.1 Problème homogène à valeur initiale

On s'intéresse dans un premier temps à l'étude du problème homogène abstrait de la forme :

$$(PHC)\begin{cases} u'(t) = Au(t), t \geqslant 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

où t est la variable temps, u est une fonction à valeurs dans l'espace de Banach X, avec $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ est un opérateur linéaire et $x \in X$ est la valeur initiale.

Définition 3.1

1. *Le problème à valeur initiale*

$$(PHC)\begin{cases} u'(t) = Au(t), t \geqslant 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

   est dit le problème homogène abstrait de Cauchy associé à $(A, D(A))$ et de valeur initiale $x \in X$.

2. *Une fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ est dite solution (classique) du problème (PHC), si u est continue pour $t \geqslant 0$, continument différentiable et $u(t) \in D(A)$ pour $t > 0$, et u vérifie (PHC).*

Notons que puisque $u(t) \in DA)$ *pour* $t > 0$ *et* u *est continue en* $t = 0$, (PHC) *ne peut pas avoir une solution pour* $x \notin \overline{D(A)}$.

Théorème 3.1 *Soit* $(A, D(A))$ *le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$ *-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *sur* X. *Alors pour tout* $x \in D(A)$, *la fonction* $u : t \longmapsto u(t) := T(t)x$ *est l'unique solution classique du problème* (PHC) *à valeur initiale* x.

Preuve Soit $x \in D(A)$, alors il vient de l'assertion 1 du théorème 1.5 que $u(t) = T(t)x$ est une solution classique du problème (PHC). Soit v une autre solution classique de (PHC). Soit $t > 0$. Alors pour tout $s \in [0, t]$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(T(t-s)v(s))}{\mathrm{d}s} &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)v'(s)\\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ce qui entraine alors que pour tout $x \in D(A)$, la fonction $s \longmapsto T(t-s)v(s)$ est constante, et en particulier ses valeurs aux points $s = t$ et $s = 0$ coincident. D'où

$$v(t) = T(t)x, \forall t \geqslant 0.$$

Définition 3.2 *Une fonction continue* $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ *est dite solution faible du problème* (PHC) *de valeur initiale* x, *si pour tout* $t \geqslant 0$

$$\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \in D(A) \text{ et } u(t) = x + A\left(\int_0^t u(s)\mathrm{d}s\right).$$

Théorème 3.2 *Soit* $(A, D(A))$ *le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$ *-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ *sur* X. *Alors pour tout* $x \in X$, *la fonction* $u : t \longmapsto u(t) := T(t)x$ *est l'unique solution faible du problème* (PHC) *de valeur initiale* x.

Preuve Soit $x \in D(A)$, alors il vient de l'assertion 2 du théorème 1.5 que $u(t) = T(t)x$ est une solution faible du problème (PHC). Soit v une autre solution faible de (PHC). Soit $t > 0$. Alors pour tout $s \in [0, t]$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\left(T(t-s)\int_0^s(u(r)-v(r))\mathrm{d}r\right)}{\mathrm{d}s} &= -T(t-s)A\int_0^s(u(r)-v(r))\mathrm{d}r + T(t-s)(u(s)-v(s))\\ &= -T(t-s)(u(s)-v(s)) + T(t-s)(u(s)-v(s))\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne alors que pour tout $x \in X$, la fonction $s \longmapsto T(t-s)\int_0^s (u(r)-v(r))\mathrm{d}r$ est constante, et en particulier ses valeurs aux points $s=t$ et $s=0$ coincident. D'où

$$\int_0^t (u(r)-v(r))\mathrm{d}r = 0.$$

ce qui implique

$$\int_0^t u(r)\mathrm{d}r = \int_0^t v(r)\mathrm{d}r$$

Par suite

$$u(t) = x + A\left(\int_0^t u(r)\mathrm{d}r\right) = x + A\left(\int_0^t v(r)\mathrm{d}r\right) = v(t), \forall t \geqslant 0.$$

Lemme 3.1 *Soit $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X$ une fonction continue sur $[0,T]$. Si :*

$$\left\|\int_0^T e^{ns}u(s)ds\right\| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3.1}$$

Alors $u \equiv 0\,\mathrm{sur}[0,T]$.

Preuve Soit $f \in X'$ et posons $\varphi(t) = \langle f, u(t)\rangle$, alors il est clair que φ est continue sur $[0,T]$ et

$$\left|\int_0^T e^{ns}\varphi(s)\mathrm{d}s\right| = \left|\left\langle f, \int_0^T e^{ns}u(s)\mathrm{d}s\right\rangle\right| \leqslant \|f\|\cdot M = M_1, \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3.2}$$

Montrons que 3.2 implique que $\varphi \equiv 0$ sur $[0,T]$ et puisque $f \in X'$ est arbitraire, il s'ensuit que $u \equiv 0$ sur $[0,T]$. Considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn\tau} = 1 - \exp\left(-e^{n\tau}\right)$$

Cette série converge uniformément en τ sur les intervalles bornés, et par suite

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn(t-T+s)}\varphi(s)\mathrm{d}s\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}e^{kn(t-T)}\left|\int_0^T e^{kns}\varphi(s)\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant M_1\left(\exp\left(e^{n(t-T)}\right)-1\right)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Pour $t < T$, le membre de droite de 3.3 tend vers 0 quand $n \to \infty$. D'autre part on a

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn(t-T+s)}\varphi(s)\mathrm{d}s = \int_0^T \left(1-\exp\left(-e^{\mathrm{n}(t-T+s)}\right)\right)\varphi(s)\mathrm{d}s \tag{3.4}$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue et par la relation de Chasles, le membre de droite de 24 converge vers $\int_{T-t}^T \varphi(s)\mathrm{d}s$ quand $n \to \infty$. Il s'ensuit alors que pour tout $0 \leqslant t < T, \int_{T-t}^T \varphi(s)\mathrm{d}s = 0$, ce qui implique que $\varphi \equiv 0$ sur $[0,T]$. □

Théorème 3.3 *(Théorème d'unicité de Lyubich) Soit A un opérateur linéaire à domaine dense. Si $R(\lambda, A)$ existe pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$ et*

$$\limsup_{\lambda \to +\infty} \frac{\log \|R(\lambda, A)\|}{\lambda} \leqslant 0 \tag{3.5}$$

alors le problème à valeur initiale (PHC) admet au plus une solution pour tout $x \in X$.

Preuve Notons d'abord que u est une solution du problème (PHC) si et seulement si $e^{\alpha t}u(t)$ est une solution du problème à valeur initiale :

$$v'(t) = (A + \alpha I)v, v(0) = x$$

Donc, quitte à translater A par αI, on peut supposer que $R(\lambda, A)$ existe et que (3.5) est vérifiée, pour tout réel $\lambda \geqslant 0$.
Soit u une solution du problème (PHC) satisfaisant $u(0) = 0$. Montrons que $u \equiv 0$. Pour cela, considérons la fonction $t \longmapsto R(\lambda, A)u(t)$ pour $\lambda > 0$. Puisque u est une solution du problème (PHC) alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R(\lambda, A)u(t) = R(\lambda, A)Au(t) = \lambda R(\lambda, A)u(t) - u(t)$$

Ce qui entraine, en utilisant la formule de la variation de la constante que :

$$R(\lambda, A)u(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.6}$$

D'après l'hypothèse 3.6 il s'ensuit que pour tout $\sigma > 0$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\sigma\lambda}\|R(\lambda, A)\| = 0 \tag{3.7}$$

Donc d'après 3.7 on a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-\tau)}u(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \text{ pour } 0 \leqslant \tau \leqslant t - \sigma \tag{3.8}$$

Par le lemme 3.1 il vient que $u(\tau) = 0$ pour $0 \leqslant \tau \leqslant t - \sigma$. Puisque t et σ sont arbitraires alors $u \equiv 0$ pour tout $t \geqslant 0$. □

Le théorème 3.3 montre que l'unicité des solutions du problème (PHC) n'impose pas de supposer que A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe, ou d'une manière *équivalente que pour un certain $\omega \geqslant 0,]\omega, +\infty[\subset \rho(A$, et $\|R(\lambda, A)^n\| \leqslant \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$, pour $\lambda > \omega$. En effet plusieurs hypothèses plus faibles suffisent pour assurer l'unicité, de même pour l'existence. Cependant, pour obtenir l'existence et l'unicité pour tout $x \in D(A)$ aussi bien que la différentiabilité de la solution sur $[0, +\infty[$, il faut supposer que A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe.*

Lemme 3.2 *Soit u une solution de (PHC) avec A un opérateur fermé. Alors :*

$$\int_0^t u(s)ds \in D(A) \text{ et } A\left(\int_0^t u(s)ds\right) = \int_0^t Au(s)ds.$$

Preuve Puisque $Au(t) = u'(t)$, alors $t \longmapsto Au(t)$ est continue. De plus on a

$$\begin{aligned}\int_0^t Au(s)\mathrm{d}s &= \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Au\left(\frac{kt}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} A\left(\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(\frac{kt}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} AS_n\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\int_0^t u(s)\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(\frac{kt}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Donc

$$S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t u(s)\mathrm{d}s \text{ et } AS_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t Au(s)\mathrm{d}s.$$

Puisque A est fermé, alors $\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \in D(A)$ et $A\left(\int_0^t u(s)\mathrm{d}s\right) = \int_0^t Au(s)\mathrm{d}s$. $\square$

Théorème 3.4 *Soit A un opérateur linéaire à domaine $D(A)$ dense dans X tel que $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors le problème à valeur initiale (PHC) admet une solution unique, qui est continument différentiable sur $[0, +\infty[$, pour toute donnée initiale $x \in D(A)$ si et seulement si, A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$.*

Preuve Si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$, alors par le théorème 3.1 il s'ensuit que pour tout $x \in D(A)$, la fonction $u : t \longmapsto u(t) := T(t)x$ est l'unique solution du problème (PHC). De plus u est continument différentiable sur $[0, +\infty[$.

Réciproquement, supposons que (PHC) admet une solution unique qui est continument

différentiable sur $[0,+\infty[$ pour tout $x \in D(A)$, notée $u(t,x)$. Montrons que A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe.
Pour $x \in D(A)$, on définit la norme graphe $|x|_G = \|x\| + \|Ax\|$.
Puisque $\rho(A) \neq \emptyset$, alors A est fermé et par suite $D(A)$ muni de la norme graphe $|\cdot|_G$ est un espace de Banach qu'on note $[D(A)]$.
Soit $X_{t_0} = \mathcal{C}\left([0,t_0], [D(A)]\right)$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[0,t_0]$ dans $[D(A)]$, muni de la norme supérieure.
Considérons l'application $S : [D(A)] \longrightarrow X_{t_0}$ définie par $Sx = u(t,x)$ pour tout $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Par linéarité du problème (PHC) et l'unicité de la solution, il est clair que S est un opérateur linéaire défini sur $[D(A)]$. De plus l'opérateur S est fermé, en effet, si $x_n \to x$ dans $[D(A)]$ et $Sx_n \to v$ dans X_{t_0}, alors puisque A est fermé et $u(t,x_n) = x_n + \int_0^t Au(\tau,x_n)\,\mathrm{d}\tau$, et en faisant tendre $n \to \infty$ et en utilisant le lemme 3.2, il s'ensuit que $v(t) = x + \int_0^t Av(\tau)\mathrm{d}\tau$. Ce qui entraine que $v(t) = u(t,x)$ et par suite S est fermé.
Il vient du théorème du graphe fermé que S est borné et

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} |u(t,x)|_G \leqslant C|x|_G. \tag{3.9}$$

Maintenant, on définit l'application $T(t) : [D(A)] \longrightarrow [D(A)]$ par $T(t)x = u(t,x)$.
Par unicité de la solution du problème (PHC) il vient que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ vérifie la propriété des semigroupes.
D'après (3.9) on a pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$, $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est uniformément borné.
Cela implique (voir la démonstration du théorème 1.4) que $T(t)$ est prolongeable par

$$T(t)x = T(t-nt_0)\,T(t_0)^n x, \text{ pour } nt_0 \leqslant t \leqslant (n+1)t_0$$

en un semi-groupe sur $[D(A)]$ vérifiant :

$$|T(t)x|_G \leqslant Me^{\omega t}|x|_G.$$

Montrons que

$$T(t)Ay = AT(t)y, \forall y \in D\left(A^2\right). \tag{3.10}$$

Posons :

$$v(t) = y + \int_0^t u(s,Ay)\mathrm{d}s. \tag{3.11}$$

On a

$$\begin{aligned} v'(t) = u(t, Ay) &= Ay + \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u(s, Ay)\mathrm{d}s \\ &= A\left(y + \int_0^t u(s, Ay)\mathrm{d}s\right) = Av(t), \end{aligned} \tag{3.12}$$

Puisque $v(0) = y$, d'après l'unicité de la solution du $(PHC), v(t) = u(t, y)$ ce qui entraîne que $Au(t, y) = v'(t) = u(t, Ay)$. D'où l'égalité (IV.1.9). Maintenant, puisque $D(A)$ est dense dans X et $\rho(A) \neq \emptyset$ alors $D\left(A^2\right)$ est aussi dense dans X. Soit $\lambda_0 \in \rho(A), \lambda_0 \neq 0$ fixé et soit $y \in D\left(A^2\right)$. Si $x = \left(\lambda_0 I - A\right) y$, alors par (IV.1.9)

$$T(t)x = \left(\lambda_0 I - A\right) T(t)y$$

et donc

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| &= \left\|\left(\lambda_0 I - A\right) T(t)y\right\| \\ &\leqslant C_0 |T(t)y|_G \leqslant C_1 e^{\omega t} |y|_G \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'autre part on a $|y|_G = \|y\| + \|Ay\| \leqslant C_2\|x\|$, ce qui entraîne que $\|T(t)x\| \leqslant C_2 e^{\omega t}\|x\|$. Il s'ensuit alors que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ est prolongeable par continuité sur X tout entier, et donc $(T(t))_{t\geqslant 0}$

devient un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe sur X.

Il reste à montrer que A est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$.
Soit B le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et $x \in \mathcal{D}(A)$.
Par définition on a $T(t)x = u(t, x)$ et donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t)x = AT(t)x$ pour $t \geqslant 0$.
Ce qui implique que $\left.\frac{\mathrm{d}T(t)x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = Ax$, d'où $D(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $Ax = Bx, \forall x \in D(A)$.
Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}\lambda > \omega$ et $y \in D\left(A^2\right)$. Par l'égalité (3.10) et comme $Ax = Bx, \forall x \in D(A)$, il vient que :

$$e^{-\lambda t} AT(t)y = e^{-\lambda t} T(t)Ay = e^{-\lambda t} T(t)By \tag{3.14}$$

En intégrant (3.14) entre 0 et $+\infty$ on obtient :

$$AR(\lambda, B)y = R(\lambda, B)By \tag{3.15}$$

D'autre part on a pour tout $y \in D\left(A^2\right)$,

$$BR(\lambda, B)y = R(\lambda, B)By$$

et donc

$$AR(\lambda, B)y = BR(\lambda, B)y$$

Puisque la famille $(BR(\lambda, B))_{\lambda>0}$ est uniformément bornée, A est fermé et $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans X, il en résulte que

$$AR(\lambda, B)y = BR(\lambda, B)y \text{ pour tout } y \in X$$

Ce qui implique que $\operatorname{Im} R(\lambda, B) = D(B) \subset D(A)$, et que $Ax = Bx, \forall x \in \mathcal{D}(B)$. D'où $A = B$. □

3.2 Problème non homogène à valeur initiale

Dans cette section nous étudions le problème non homogène à valeur initiale suivant :

$$(PNHC) \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

où $f : [0, T[\longrightarrow X$ est une fonction. On suppose dans cette section que A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, par conséquent l'équation homogène correspondante à $f \equiv 0$ admet une solution unique pour tout $x \in D(A)$.

Définition 3.3 *Une fonction $u : [0, T[\longrightarrow X$ est dite solution (classique) du problème $(PNHC)$ sur $[0, T[$ si :*

(i) u est continue sur $[0, T[$.

(ii) u est continument différentiable sur $]0, T[$.

(iii) $u(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et u vérifie $(PNHC)$.

Proposition 3.1 *Si $f \in L^1(0, T; X)$, alors pour tout $x \in X$ le problème à valeur initiale $(PNHC)$ admet au plus une solution. Dans le cas où la solution existe, elle est donnée par :*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{3.16}$$

Preuve Soit $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe de générateur infinitésimal A et soit u une solution de $(PNHC)$. Alors la fonction $s \longmapsto g(s) := T(t-s)u(s)$ est différentiable pour $0 < s < t$ et

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Or $f \in L^1(0,T;X)$ donc $s \longmapsto T(t-s)f(s)$ est intégrable et en intégrant (3.17) entre 0 et t on obtient :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

Remarque 3.1 *Pour tout $f \in L^1(0,T;X)$, le membre de droite de la formule (3.16) définit une fonction continue sur $[0,T]$. Donc il est naturel de le considérer comme une solution "généralisée" de $(PNHC)$ même s'il n'est pas différentiable et ne vérifie pas exactement $(PNHC)$ au sens de la définition 3.3 D'où la motivation pour introduire la définition suivante :*

Définition 3.4 *Soit A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ et soit $x \in X$ et $f \in L^1(0,T;X)$. La fonction $u \in \mathcal{C}([0,T],X)$ donnée par*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s, 0 \leqslant t \leqslant T$$

est appelée la solution faible du problème à valeur initiale $(PNHC)$ sur $[0,T]$.

Notons que pour $f \equiv 0$, on retrouve la définition 3.2 de $t \longmapsto T(t)x$ comme la solution faible du problème homogène à valeur initiale (PHC).
Il est clair qu'une solution faible n'est pas en général une solution classique du problème $(PNHC)$ même dans le cas $f \equiv 0$.
Un cas simple : si $x \notin D(A)$ et $f \equiv 0$, alors $u(t) = T(t)x$ n'est pas différentiable en 0^+.
Pour $f \in L^1(0,T;X)$ le problème à valeur initiale $(PNHC)$ admet une solution faible unique.

Remarque 3.2 *En général, la continuité de f n'est pas suffisante pour assurer l'existence des solutions de $(PNHC)$ pour $x \in D(A)$.*

Exemple 3.1 *Soit A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ et soit $x \in X$ tel que $T(t)x \notin D(A)$ pour tout $t \geqslant 0$. On considère la fonction f définie par $f(s) = T(s)x, 0 \leqslant s < T$. Alors f est continue pour $s \geqslant 0$. Considérons le problème à valeur initiale :*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + T(t)x, t > 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Le problème (3.18) n'admet pas de solution malgré que $u(0) = 0 \in D(A)$. En effet, la solution faible de (3.18) est :

$$u(t) = T(t)0 + \int_0^t T(t-s)T(s)x \, \mathrm{d}s = tT(t)x$$

Or $t \longmapsto tT(t)x$ n'est pas différentiable pour $t > 0$, et donc ne peut pas être une solution de (3.18).

Lemme 3.3 *Soit $g : [a, b[\longrightarrow X$ une fonction continue admettant une dérivée à droite g'_d continue sur $[a, b[$. Alors g est continument différentiable sur $[a, b[$.*

Preuve Voir ([10], Corollary 1.2, pag. 43). □

Théorème 3.5 *Soient A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, $f \in L^1(0, T; X)$ continue sur $]\, 0, T]$ et soit v la fonction définie par :*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, 0 \leqslant t \leqslant T \; . \tag{3.19}$$

Le problème à valeur initiale $(PNHC)$ admet une solution u sur $[0, T[$ pour tout $x \in D(A)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) v est continument différentiable sur $]0, T[$.

(ii) $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et la fonction $t \longmapsto Av(t)$ est continue sur $]0, T[$. Réciproquement, si $(PNHC)$ admet une solution u sur $[0, T[$ pour un certain $x \in D(A)$, alors v vérifie les conditions (i) et (ii).

Preuve Si le problème à valeur initiale $(PNHC)$ admet une solution u pour un certain $x \in D(A)$, alors cette solution est donnée par (3.16). Par conséquent, $t \longmapsto v(t) = u(t) - T(t)x$ est différentiable pour $t > 0$ comme différence de deux fonctions différentiables

et on a $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$, donc v' est clairement continue sur $]0, T[$ et par suite (i) est vérifiée.
De plus si $x \in D(A)$ alors $T(t)x \in D(A)$ pour $t \geqslant 0$ et par suite $v(t) = u(t) - T(t)x \in D(A)$ pour $t > 0$ et $Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$. Donc $t \longmapsto Av(t)$ est continue sur $]0, T[$. Ainsi (ii) est vérifiée.
D'autre part on a pour tout $h > 0$:

$$\frac{T(h) - I}{h} v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) \mathrm{d}s \tag{3.20}$$

Puisque f est continue, alors $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s) f(s) \mathrm{d}s = f(t)$.

- Si v est continument différentiable sur $]0, T[$, il s'ensuit alors de (3.20) que $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t) = v'(t) - f(t)$. Puisque $v(0) = 0$ alors $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution du problème à valeur initiale $(PNHC)$ pour $x \in D(A)$.
- Si $v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$, il vient de l'égalité (3.20) que v est différentiable à droite en t et sa dérivée à droite est $v'_d(t) = Av(t) + f(t)$. Comme v'_d est continue, il vient alors par le lemme 3.3 que v est continument différentiable sur $]0, T[$ et $v'(t) = Av(t) + f(t)$.

Puisque $v(0) = 0, u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution de $(PNHC)$ pour $x \in D(A)$. □

Comme conséquence du théorème 3.5 on obtient les deux corollaires suivants :

Corollaire 3.1 *Soit A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$. Si f est continument différentiable sur $[0, T]$, alors le problème à valeur initiale $(PNHC)$ admet une solution u sur $[0, T[$ pour tout $x \in D(A)$*

Preuve On a

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) f(s) \mathrm{d}s = \int_0^t T(s) f(t-s) \mathrm{d}s. \tag{3.21}$$

Ce qui entraîne que v est différentiable pour $t > 0$, et par la règle intégrale de Leibniz on a

$$\begin{aligned} v'(t) &= -T(t) f(0) + \int_0^t T(s) f'(t-s) \mathrm{d}s \\ &= -T(t) f(0) + \int_0^t T(t-s) f'(s) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

D'où v' est continue sur $]0, T[$. La condition (i) du théorème 3.5 permet donc de conclure. □

Corollaire 3.2 *Soit A le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$. Soit $f \in L^1(0,T;X)$ une fonction continue sur $]0,T[$. Si $f(s) \in D(A)$ pour $0 < s < T$ et $s \longmapsto Af(s) \in L^1(0,T;X)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème à valeur initiale $(PNHC)$ admet une solution sur $[0,T[$.*

Preuve D'après les conditions du corollaire on a $T(t-s)f(s) \in D(A)$, pour tout $s > 0$, et la fonction $s \longmapsto AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ est intégrable. Ainsi $v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s \in D(A)$ pour $t > 0$ et

$$Av(t) = A\left(\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s\right) = \int_0^t T(t-s)Af(s)\mathrm{d}s$$

Donc $t \longmapsto Av(t)$ est continue, et la condition (ii) du théorème 3.5 permet de conclure.$\square$

Théorème 3.6 *Soit $f \in L^1(0,T;X)$. Si u est la solution faible de $(PNHC)$ sur $[0,T]$ alors pour tout $T' < T, u$ est la limite uniforme sur $[0,T']$ de la suite des solutions de $(PNHC)$.*

Preuve On suppose que $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$. Soient $(x_n)_{n\geqslant 0} \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \to x$ et $(f_n)_{n\geqslant 0} \subset \mathcal{C}^1([0,T],X)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^1(0,T;X)$.
D'après le corollaire 3.1 il s'ensuit que pour tout $n \geqslant 0$ le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} u_n'(t) = Au_n(t) + f_n(t), t > 0 \\ u_n(0) = x_n \end{cases} \tag{3.22}$$

admet une solution $u_n(t)$ sur $[0,T[$ vérifiant

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s)\mathrm{d}s$$

Si u est la solution faible de $(PNHC)$ sur $[0,T]$ alors :

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &\leqslant Me^{\omega t}\|x_n - x\| + \int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|f_n(s) - f(s)\|\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant Me^{\omega T}\left(\|x_n - x\| + \int_0^T \|f_n(s) - f(s)\|\,\mathrm{d}s\right) \end{aligned} \tag{3.23}$$

D'où le résultat. $\square$

3.3 Quelques applications

Dans ce paragraphe nous donnons quelques applications de la théorie des semi-groupes et l'étude du problème abstrait de Cauchy dans la résolution de quelques équations aux dérivées partielles classiques en physique.

Exemple 3.2 *(L'équation d'advection) Considérons l'équation d'advection qui décrit les phénomènes du transport :*

$$(EA)\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)=0, t\geqslant 0, x\in\mathbb{R} \\ v(x,0)=f(x) \end{cases}$$

On cherche les solutions dans l'espace de Banach $X=L^2(\mathbb{R})$. Écrivons le problème (EA) sous la forme abstraite en posant $u(t)=v(\cdot,t)$:

$$(PHC)\begin{cases} u'(t)=Au(t), t\geqslant 0, \\ u(0)=f \end{cases}$$

où $A=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ avec le domaine $D(A)=H^1(\mathbb{R})=\{u\in L^2(\mathbb{R})\mid u'\in L^2(\mathbb{R})\}$.
Pour trouver la résolvante de A, nous résolvons l'équation

$$(\lambda I-A)g=\lambda g+g'=f,\ g\in D(A),$$

on supposant que f donné dans l'espace X. Si $\lambda\geq 0$, alors la solution est

$$g(s)=(R(\lambda,A)f)(x)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\lambda(x-s)}f(s)ds,\ x\in\mathbb{R}$$

utilisant la transformation de fourier, il n'est pas difficile de vérifier que l'état de Hille-Yosida $\|R(\lambda,A)\|\leq\dfrac{1}{\lambda}$ est vérifier pour $\lambda\geq 0$, aussi est uniformément bien posé sur $D(A)$. D'autre part A est le générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe défini sur X par

$$(T(t)f)(x)=f(x-t), x\in\mathbb{R}, t\geqslant 0$$

alors il vient du théorème 3.1 que pour tout $f\in D(A)$, la fonction définie par

$$u(x,t)=(T(t)f)(x)=f(x-t)$$

est l'unique solution de (EA).

Exemple 3.3 *(L'équation de la chaleur) L'équation de la chaleur et le semi-groupe de Gauss-Weierstrass dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:*
Considérons l'équation de la chaleur qui décrit les phénomènes de diffusion :

$$(EC)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
On va utiliser la transformée de Fourier partielle par rapport à x pour trouver une solution (formelle) de (EC).
Rappelons que pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^\infty(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier partielle par rapport à x de u est la fonction notée $\hat{u}$ définie par :

$$\hat{u}(\xi,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x,t)\mathrm{d}x, \xi \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}(\xi,t) = i\xi\hat{u}(\xi,t)$$

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}(\xi,t) = -\xi^2\hat{u}(\xi,t)$$

$$\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}(\xi,t) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t)$$

En appliquant la transformée de Fourier à (EC) On trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) = -\xi^2\hat{u}(\xi,t), t > 0, \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi), \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.24}$$

L'équation (3.24) est une équation différentielle ordinaire, où ξ joue le rôle d'un paramètre, et dont la solution est donnée par :

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi), t \geqslant 0, \xi \in \mathbb{R}$$

Pour trouver u on applique la transformée de Fourier inverse en utilisant le fait que $e^{-t\xi^2} = \widehat{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-\varepsilon^2}{4t}}}$ pour $t > 0$ et que $\hat{u}\hat{v} = \widehat{u * v}$. Par suite On trouve que $u(\cdot,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-\xi^2}{4t}} * f$.
D'où :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\mathrm{d}y, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} . \tag{3.25}$$

Puisque $f \in BC(\mathbb{R})$ et en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral, on montre que u est bien une solution de (EC). Notons que la condition initiale de (EC) est vérifiée par u donnée par (3.25) dans le sens suivant :
$\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et on note encore $u(x,0) = f(x)$.
Le résultat se reproduit dans le langage des semi-groupes de la façon suivante : pour toute fonction $f \in BC(\mathbb{R})$ et tout $t \geqslant 0$ on pose : $T(t)f = u(\cdot,t)$, où u est l'unique solution classique de (EC) donnée par 3.24. On définit ainsi le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $BC(\mathbb{R})$ appelé le semi-groupe de Gauss-Weierstrass par :

$$(T(t)f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\mathrm{d}y, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{et } T(0) = I.$$

Le semi-groupe de Gauss-Weierstrass n'est pas un $\mathcal{C}_0$ -semi-groupe. Il s'avère que $T(t)f \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} f$ dans $BC(\mathbb{R})$ si et seulement si $f \in BUC(\mathbb{R})$, où $BUC(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions bornées uniformément continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 3.4 *(L'équation des ondes)*

Considérons l'équation des ondes qui décrit les phénomènes de propagation :

$$(EO) \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = 0, \ \text{sur } \Omega \times [0,T] \\ v = 0 \ , \ \text{sur } \partial\Omega \times [0,T] \\ v(x,0) = v_0 \ \text{et } \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1, \ \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où Ω est un sous-ensemble régulier de $\mathbb{R}^n$ et $v_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), v_1 \in H_0^1(\Omega)$.

Posons $u = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$, l'équation (EO) s'écrit sous la forme abstraite :

$$(PHC) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.26}$$

où

$$Au = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix} \ \text{et } u_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. *Le domaine de* A *est* $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ *Montrons que* $(A, D(A))$ *est m-dissipatif sur* X *lorsqu'il est muni du produit scalaire :*

$$\langle u, v\rangle_X = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u_2 v_2 \, \mathrm{d}x, \text{ où } u = (u_1, u_2) \text{ et } v = (v_1, v_2)$$

D'abord A *est dissipatif car* $\langle Au, u\rangle_X = \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla u_1 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \Delta u_1 u_2 \, \mathrm{d}x = 0,$ *(d'après la formule de Green).*
Soient $(f, g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. *L'équation* $u - Au = (f, g)$ *est équivalente au système :*

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = f \\ u_2 - \Delta u_1 = g \end{cases}$$

En remplaçant $u_2 = u_1 - f$ *dans la deuxième équation, on obtient l'équation*

$$u_1 - \Delta u_1 = f + g$$

qui admet une solution unique $u_1 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *d'aprés le théorème de Lax-Milgram. Par conséquent* $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ *est unique. Donc* $\mathrm{Im}(I - A) = X$ *et* A *est dissipatif.*
Par le théorème de Lumer-Phillips il vient que A *est le générateur infinitésimal d'un* $\mathcal{C}_0$ *-semi-groupe de contraction* $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ *et par suite (3.26) admet une solution unique donnée par*

$$u(t, x) = (T(t)u_0)(x).$$

3.4 Equation d'évolution non linéaire

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{3.27}$$

Où A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *sur un espace de Banach* X, *et* $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ *est continue.*

Définition 3.5 *On dit que u est une solution (solution classique) de l'équation 3.27 si et seulement si :*

1. $u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^+, X), u(t) \in D(A), t \geq 0;$

2. u satisfait l'équation (3.27).

Théorème 3.7 *Si u est une solution de l'équation (3.27), alors :*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds, t \geq 0. \tag{3.28}$$

Preuve Si u est une solution de l'équation (3.27), alors u est solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + g(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x \end{cases}$$

mais $g(t) = f(t,u(t))$ et $y(t) = u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds, t \geq 0$ □

Remarque 3.3 *Si u satisfait (3.28) alors u n'est pas nécessairement une solution de (3.27).*

probléme 1. *Est-ce-qu'une solution faible de l'équation (3.27) existe ?*

Exemple 3.5 *$A \equiv 0$,l'équation 3.27 devient :*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t,u(t)), & t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

La continuité de f ne suffit pas pour obtenir l'existence de solution faible.

Théorème 3.8 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ est Lipschitz par rapport à la seconde variable alors pour tout $x \in X$, l'équation (3.27) a une solution faible unique sur $\mathbb{R}^+$.*

Preuve Soit $u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds = (Hx)(t), t \geq 0$. Nous devons montrer que u est une solution faible de l'équation (3.27) si et seulement si $Hu = u$.
On définit $C_a := C([0,a],X)$ tel que $H : C_a \to C_a$. Soient $u_1, u_2 \in C_a$:

$$(Hu_1)(t) - (Hu_2)(t) = \int_0^t T(t-s)\left(f\left(s,u_1(s)\right) - f\left(s,u_2(s)\right)\right)ds.$$

Soit $M_a = \sup_{t\in[0,a]} \|T(t)\| \leq Me^{\omega a} < +\infty, \omega > 0$

$$\|(Hu_1)(t) - (Hu_2)(t)\| \leq M_a K t \|u_1 - u_2\|$$

K étant la constante de Lipschitz pour f. On a $H^2 = H \circ H$, alors

$$\begin{aligned}
\left\| H^2 u_1(t) - H^2 u_2(t) \right\| &\leq M_a K \int_0^t \| H u_1(t) - H u_2(t) \| \, ds \\
&\leq M_a K \int_0^t (M_a K s) \| u_1 - u_2 \| \, ds, (\forall) t \in [0, a] \\
&= \frac{(M_a K)^2}{2!} t^2 \| u_1 - u_2 \|, (\forall) t \in [0, a] \\
&\vdots \\
\| H^n u_1(t) - H^n u_2(t) \| &\leq \frac{(M_a K)^n}{n!} a^n \| u_1 - u_2 \|, (\forall) t \in [0, a]
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\| H^n u_1(t) - H^n u_2(t) \| \leq \frac{(M_a K)^n}{n!} a^n \| u_1 - u_2 \|, (\forall) u_1, u_2 \in C_a.$

Puisque $\frac{(M_a K)^n}{n!} a^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{(M_a K)^p}{p!} a^p < 1$. Il en résulte que $H^p = H \circ \cdots \circ H$ est une contraction puis $\exists ! u \in C_a$ tel que $H^p u = u$. On a $Hu = u$ En effet, $H^p(u) = u$ implique que $H^{p+1}(u) = Hu$, on peut écrire $H^p(H(u)) = H(u)$ il s'ensuit que $H(u)$ est un point fixe de H^p et puisque le point fixe est unique nous obtenons $H(u) = u$. Nous concluons que $Hu = u$ est une solution faible de l'équation (3.27) sur $[0; a]$, cela est vrai pour tous $a > 0$.

D'où l'équation (3.27) a une solution faible unique sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

Conclusion

La théorie des semi groupes est un domaine de recherche qui suscite depuis quelques années beaucoup d'intérêt, il a connu des développement et des applications très intéressants, en particulier dans les équations d'évolution (problème de Cauchy).
Notre étude à examiné la relation entre l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy abstrait et l'opérateur associé a ce problème.

Bibliographie

[1] M. Agti, Explication des idempotents assosies au semi-groupe ne vérifiant pas certaines inégalité prés de l'origine, université de Laghouat, 2009.

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Dunod. Paris, 1999

[3] S.-E. CHORFI, Théorie des semi-groupes : problème abstrait de cauchy et équations d'évolution. Master's thesis, Université Cadi Ayyad, 2017.

[4] K. J. Engel, R. Nagel, One parameter semigroups for linear evolution equations, Springer-Verlag, New York 2000.

[5] D. Feyel, Résumé d'analyse fonctionnelle élémentaire, Université d'Evry-Val d'Essonne,M1, Année 2006-07

[6] E. Hille and R.S. Phillips, Functional analysis and semigroups, American Mathematical Society, Providence, R.I,1974, third printing of the revised edition of 1957,American Mathematical Society Colloquim Publication, Vol XXXI.

[7] L. D. Lemle, Semi-groupes d'opérateurs, L'unicité des pre-generateurs et application, Universite Blaise Pascal Clermont-Ferrand, 2007.

[8] L. D. Lemle, La formule de Lie-Trotier pour les semi-groupes fortement continus, Université Claude Bernard Lyons 1, 2001.

[9] D.Li, Le théorème de convergence dominée et ses conséquences, Université d'Artois, 2011.

[10] A. Pazy, semigroups of linear operators and applications to partial equations, SpringerVerlage, New York, 1983.

[11] H. Queffélec, J. Charles, and M. Mbekhta, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : Rappels de cours et exercices corrigés. Dunod, 2010.

[12] I. I- Vrabie, C0-semigroups and applications, University of Rochester New York, 2003.

Bibliographie

الملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو من جهة دراسة نصف زمر المؤثرات الخطية على فضاء بناخ و من جهة أخرى ندرس تحت أي شروط تقبل مسألة كوشي المتجانسة و غير المتجانسة حلا وحيدا(وجود و وحدانية الحل)

***الكلمات المفتاحية** : نصف زمرة،C0 نصف زمرة، مولد*

Abstract:

The main objectives of this research paper consiste in part to study the theory of semigroup in Banach space, and another part to study under what condition the abstract Cauchy problem homogeneous and inhomogeneous has unique solution (existence and uniqueness of solution).

***Key words:** Semi-group, C0-semigroup, generator infinitesimal.*

Résumé :

Le but de ce mémoire est d'étudié d'une part la théorie des semi groupes dans un espace de Banach, d'autre part on étudie sous quelles condition le problème de Cauchy abstrait homogène et non homogène admet une solution unique (l'existence et l'unicité de solution).

***Mots clés** Semi-groupe, C0-semi groupe, générateur infinitésimal.*