Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ahmed Draia Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

BAHRAOUI Fatiha

Thème

Etude des problèmes de minimisation convexes à contribution de la dualité

Soutenu publiquement le 14 /10/2020

devant le jury composé de :

M. BALIKI Abdessalam	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Président
M. DEBAGHE Mohammed	Maître assistant A	Université d'Adrar	Rapporteur
M. FATMI Larbi	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Examinateur

2019–2020

je dédie ce travail à l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père **Lhaj Ahmed Bahraoui**. *A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur maman que j'adore. Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures à tous mes frères et mes soeurs, mes aimables amies Ahlam, Asma, et mes collègues d'étude. Sans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire du moyen du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

♡

FATIHA.

Remerciements

A la fin de ce travail, je tiens à remercier, en tout premier lieu, je remercie le bon **DIEU** tout puissant de m'avoir accordé la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur de mémoire **M. DEBAGHE Mohammed**. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé dans le but de mener à bien ce travail.

Je voudrai également remercier les membres de mon jury **M. BALIKI Abdessalam**, qui me fait l'honneur de présider ce jury ; **M. FATMI Larbi** pour avoir accepté d'être examinateurs de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réfexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Enfin, je tenons a remercier tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction

L'un des domaines importants de l'analyse non linéaire a émergé au début des années 1960 : l'analyse convexe. Les fonctions convexes jouent un rôle important dans de nombreux domaines mathématiques telles que l'optimisation, la théorie du contrôle, la recherche opérationnelle, la géométrie, les équations différentielles, l'analyse fonctionnelle, ..., ainsi que sciences et pratiques appliquées, par exemple en économie, finance. Ils ont beaucoup de propriétés intéressantes, par exemples continuité et les propriétés de différentiabilité ou le fait qu'un minimum local se révèle être un minimum global, etc. Ils permettent même d'établir un théorie générale des fonctions convexes, en plus des ensembles convexes, la soi-disant théorie de l'analyse convexe, qui est importante non seulement pour elle-même mais aussi pour ses nombreuses applications dans la théorie de l'optimisation convexe et non convexe. La convexité de la fonction objectif engendre des problèmes d'optimisation convexes et l'étude de ces problèmes est devenue essentielle et important dans plusieurs domaines. La résolution de ces problèmes, c'est- à-dire de trouver la valeur minimale ou maximale d'une fonction peut prendre à condition que certaines conditions soient remplies. Pour donner des conditions suffisantes pour assurer l'existence de solutions, il faut recourir à ce qu'on appelle communément le principe de dualité en analyse convexe. La dualité en optimisation convexe et non convexe a fait l'objet de plusieurs études, citons à titre d'exemples les travaux de **Fenchel-Moreau**, **Rockafellar**, [20], [24, 25], elle a été introduite par **Mandelbrojt** en 1939 puis précisée et améliorée par **Fenchel** en 1949 comme généralisation de la transformation de **Legendre** 1787. Elle consiste en une correspondance un à un entre les fonctions convexes semi-continues inférieures définies sur un espace de Hilbert $X \to Y$ et les fonctions correspondantes définies sur son espace dual $Y^* \to X^*$, les fonctions correspondantes étant appelées les fonctions conjuguées les unes des autres. Cette correspondance permet d'associer chaque problème de minimisation convexe à un autre problème, connu sous le nom de le problème dual. Il s'avère alors que si le problème dual remplit certaines conditions, le problème de minimisation d'origine a une solution, et inversement. Le concept de la différentiabilité joue un rôle crucial dans l'étude des ces problèmes de minimisation convexes pour établir des conditions nécessaires d'optimalité, **Fermat** était l'un des innovateurs les plus importants dans ce domaine. La règle de Fermat dit que si une fonction f atteint sa valeur minimale en un point $\bar{x}$ alors son gradient en ce point doit être nul. Une question qui se pose maintenant naturellement est de savoir si la règle de Fermat peut être adaptée pour traiter des fonctions convexes arbitraires. La difficulté est qu'il existe de très nombreuses fonctions convexes non différentiables. Nous généralisons le concept du gradient de f en x par celui du sous-différentiel de f en x_0 noté $\partial f(x_0)$, cela nous permettra d'utiliser la règle de fermat pour couvrir les fonctions convexes, la nouvelle forme de la règle devenant : un point correspond au minimum d'une fonction convexe semi-continue inférieure si et seulement si le sous-différentiel de la fonction au point concerné contient l'élément zéro. Cette règle nous permettra d'exprimer les solutions de problèmes de minimisation convexes. Cette étude est basée sur les travaux de **Jean-Pierre Aubin**, [3, 4, 6, 7]

L'objectif de notre travail est l'etude des conditions qui assurent l'existence des solutions minimales de problèmes généraux de minimisation liés aux fonctions convexes semi-continues inférieures à l'aide de dualité.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre traite des notions mathématiques fondamentaux, on fait certain rappels de quelques notions et résultats nécessaires à la compréhension de tout ce qui suit.

Dans **la seconde chapitre**, nous présentons les propriétés des fonctions conjuguées, et étudions la relation de dualité entre les fonctions convexes et leurs fonctions conjuguées.

Au **troisième chapitre**, nous allons caractériser l'ensemble des éléments qui minimisent une fonction f à l'aide de la notion de sous-différentiel que nous allons définir, et verrons le lien entre la conjuguée de Fenchel et le sous-différentiel.

Dans **quatrième chapitre**, à l'aide des notions de conjuguées et sous-différentiels, nous exploitons la règle de Fermat pour caractériser les solutions du problème de minimisation et étudions quelques problèmes aux concepts du calcul des variations et de la théorie du contrôle optimal pour donnons les conditions d'existence des solutions minimales.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous rappelons dans ce premier chapitre quelques notions élémentaires de continuité, convexité, théorèmes d'existences. Des propriétés ainsi que des exemples.
Dans toutes ces notes, on se place dans l'espace $X = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$, on le munit d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et la norme associée $\|\cdot\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$. $\overline{\mathbb{R}}$ designe toujours $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1.1 Définitions

Soit $K \subset X$ un sous-ensemble non vide. Soit la fonction $f : K \to \mathbb{R}$.

Définition 1.1. [22] On appelle infimum de f la valeur $l \in [-\infty, +\infty[$ telle que

$$l \leq f(x) \quad \forall x \in K.$$

Cette valeur est notée $\inf_{x\in K} f(x)$.

Nous allons étudier le problème d'optimisation où on effectue la minimisation de la fonction f.
Nous considérons donc le problème formulé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{i)} & \bar{x} \in K \\ \text{i.i)} & f(\bar{x}) = \inf_{x\in K} f(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

qui on peut réécrire sous la forme équivalente :

$$f_K(\bar{x}) = \inf_{x\in X} f_K(x) = \inf_{x\in X} \left(f(x) + \Psi_K(x)\right). \tag{1.2}$$

Tel que

$$f_{\mathrm{K}}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in K. \\ +\infty & \text{si} \quad x \notin K. \end{cases}$$

Où $K = \{x \in X : f_K(x) < +\infty\}$.
Et

$$\Psi_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K. \\ +\infty & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

est la fonction indicatrice d'un sous-ensemble K de X.
Cette forme de problème est mieux pour obtenir certaines porpriétés intéressantes de sa solution possible.

Définition 1.2. [22] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, l'ensemble

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$

est appelé domaine effectif de f .

Définition 1.3. [22] Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite propre si $\mathrm{Dom}(f) \neq \emptyset$ et $f(x) > -\infty$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.4. [22] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, l'épigraphe de f est le sous-ensemble définie par :

$$\mathrm{Ep}\ (f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} / f(x) \leqslant \lambda\}.$$

Définition 1.5. [22] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, l'ensemble :

$$S_\lambda(f) = \{x \in X : f(x) \leq \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

est appelé l'ensemble de niveau inférieure .

On a

$$f(\bar{x}) = \inf_{x \in K} f(x) \Rightarrow \forall x \in K \quad f(\bar{x}) \leq f(x). \tag{1.3}$$

Posons M l'ensemble de $\bar{x}$ tels que $\alpha = f(\bar{x})$.
Soit

$$x \in S_\lambda(f) \Rightarrow f(x) \leq \lambda. \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4), on a $f(\bar{x}) \leq \lambda$ alors $\bar{x} \in S_\lambda(f) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, donc

$$M = \cap_{\lambda > \alpha} S_\lambda(f)$$

est l'ensemble des solution de (1.1) .

Donnons nous,
un espace de pivot H, $\mathcal{D} \subset H$ dense dans H, et un espace vectoriel V tel que $\mathcal{D} \subset V \subset H$. Soit V_0 l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans V, l'espace normal associé.

Définition 1.6. [4] Soient V et E des espaces de Hilbert, V_0 l'espace normal associé, $A : V \to E^*$ un opérateur linéaire continue et A_0 la restriction de A à V_0, $A_0 : V_0 \to E^*$. Nous dirons que $A_0^* : E \to V_0^*$ défini par

$$(A_0^* e, \varphi) = [e, A\varphi] \quad \forall e \in E, \quad \forall \varphi \in V_0$$

est l'adjoint formel de A.

Définition 1.7. [4] Nous dirons que le sous-espace $\mathrm{E}\left(\mathrm{A}_0^*\right)$ défini par

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{A}_0^*\right) = \{e \in \mathrm{E} \text{ tels que } \mathrm{A}_0^* \in \mathrm{H}\}$$

muni du produit scalaire

$$((e, f))_{\mathrm{E}(\mathrm{A}_0^*)} = ((e, f))_{\mathrm{E}} + (\mathrm{A}_0^* e, \mathrm{A}_0^* f)$$

est le domaine de l'opérateur A_0^*.
$\mathrm{E}\left(\mathrm{A}_0^*\right)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.1. *[4] Soit T un espace de Hilbert, supposons que l'espace normal V_0 associé à V soit le noyau d'un opérateur surjectif $\gamma : V \to T$. Il existe alors un unique opérateur $\beta^* \in \mathcal{L}\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{A}_0^*\right), \mathrm{T}^*\right)$ tel que la formule de Green abstraite*

$$[e, Ax] - (A_0^* e, x) = \langle \beta^* e, \gamma x \rangle_{T^* x T} \tag{1.5}$$

ait lieu pour tout $e \in \mathrm{E}\left(\mathrm{A}_0^*\right)$, pour tout $x \in V$.

1.2 Semi-continuité inférieure et théorème d'existence

Soit X un espace métrique.

On rapelle qu'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in B\left(x_0, \eta\right), \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

La boule ouverte $B\left(x_0, \eta\right)$ de centre x_0 et de rayon η est un voisinage de x_0. En posant $\mathcal{V}\left(x_0\right) = B\left(x_0, \eta\right)$, la condition sur f donne deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{V}\left(x_0\right), \quad -\varepsilon < f(x) - f(x_0) \quad &\Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x). \\ \forall x \in \mathcal{V}\left(x_0\right), \quad f(x) - f(x_0) < \varepsilon \quad &\Rightarrow f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

La première condition dit que $f(x_0)$ se trouve en dessous de tous les points limite de $f(x)$, lorsque x tend vers x_0, alors que la seconde dit que $f(x_0)$ se trouve au dessus, d'où la décomposition de la continuité en semi-continuité inférieure et semi-continuité supérieure.

Définition 1.8. [22] Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en $x_0 \in X$ si :

$$\forall r < f\left(x_0\right), \exists V \in \mathcal{V}\left(x_0\right), \forall x \in V : f(x) > r.$$

La fonction f est dite semi-continue inférieurement sur un partie C de X si f est semi-continue inférieurement en tout point de C.

Une fonction f est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) en x_0 si $-f$ est semi-continue inférieurement .

Rappelons maintenant des caractérisations fondamentaux des fonctions semi-continues inférieurement.

Définition 1.9. [11] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction définie sur un espace topologique X. La limite inférieure de f en x_0 est définie par :

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) := \sup_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \inf \{f(x) : x \in V, x \neq x_0\}.$$

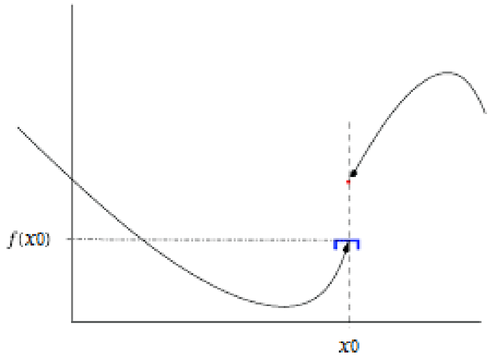

FIGURE 1.1 – Fonction semi-continue inférieurement en x_0

Proposition 1.2. *[11] Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement en x_0 si et seulement si*

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x).$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$ supposons que f est une fonction semi-continue inférieurement en x_0 alors d'après la définition pour tout $r < f(x_0)$, il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$, tel que pour tout $x \in V$, $f(x) > r$. En posant $\mathcal{V}(x_0) = B(x_0,\eta)$, alors

$$\forall x \in B(x_0,\eta), \quad f(x) > r \quad \Rightarrow \quad \inf_{x \in B(x_0,\eta)} f(x) \geq r \Rightarrow \sup_{\eta > 0} \inf_{\substack{x \in B(x_0,\eta) \\ x \neq x_0}} f(x) \geq r,$$

et comme

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\eta > 0} \inf_{\substack{x \in B(x_0,\eta) \\ x \neq x_0}} f(x),$$

alors

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq r.$$

L'inégalité étant vraie pour tout $r < f(x_0)$, on peut faire tendre r vers $f(x_0)$:

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq r \quad \Rightarrow \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

($\Leftarrow$) supposons que $f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x)$. Pour tout r tel que $f(x_0) > r$ on a par hypothèse :

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{\eta > 0} \left[\inf_{\substack{x \in B(x_0,\eta) \\ x \neq x_0}} f(x) \right] \geq f(x_0) > r.$$

Par définition du sup, pour ce r, il existe $\eta_0 > 0$ tel que :

$$\sup_{\eta > 0} \left[\inf_{\substack{x \in B(x_0,\eta) \\ x \neq a}} f(x) \right] \geq \inf_{\substack{x \in B(x_0,\eta_0) \\ x \neq x_0}} f(x) > r \Rightarrow \forall x \in B(x_0,\eta_0), f(x) > r.$$

Comme $B(x_0,\eta_0)$ est un voisinage de x_0, alors f est semi-continue inférieurement. $\square$

Proposition 1.3. *[11] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est semi-continue inférieurement.*
2. *L'épigraphe de f est fermé.*
3. *Pour tout $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau inférieure $S_\lambda(f)$ est fermé.*

Démonstration. ($1 \Rightarrow 2$) On suppose que f est semi-continue inférieurement et on va montrer que son épigraphe est fermé C.a.d on prend une suite d'éléments $(x_n, \lambda_n) \in Ep(f)$ qui converge vers (x,λ) ($(x_n, \lambda_n) \overset{n \to +\infty}{\to} (x,\lambda)$)) et montre que $(x,\lambda) \in Ep(f)$, i.e $f(x) \leq \lambda$. On a donc $(x_n, \lambda_n) \in Ep(f)$ i.e $f(x_n) \leq (\lambda_n)$ donc

$$\lim_{n \to \infty} \inf f(x_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} \inf (\lambda_n).$$

Et comme f est semi-continue inférieurement alors

$$f(x) \leqslant \lim_{n \to \infty} \inf f(x_n)$$

daprès la proposition précédente donc

$$f(x) \leqslant \lim_{n \to \infty} \inf f(x_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} \inf (\lambda_n) = \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda,$$

d'ou $f(x) \leq \lambda$.

($2 \Rightarrow 3$) On suppose que $Ep(f)$ est fermé et montre que $S_\lambda(f)$ est aussi fermé.

On considère une suite $(x_n) \in S_\lambda(f)$ converge vers x, et on va montrer que $x \in S_\lambda(f)$ i.e $(x,\lambda) \in Ep(f)$.

Comme $(x_n) \in S_\lambda(f)$ i.e $f(x_n) \leq (\lambda)$, alors $(x_n, \lambda) \in Ep(f)$ tel que $(x_n, \lambda_n) \overset{n\to+\infty}{\to} (x,\lambda)$ donc $(x, \lambda) \in Ep(f)$ car il est fermé d'après l'hypothèse .

$(3 \Rightarrow 1)$ On suppose que $S_\lambda(f)$ est fermé et on va montre que f est semi-continue inférieurement.

Soit $x_0 \in X$ tel que $\lambda < f(x_0)$, alors $(x_0, \lambda) \notin S_\lambda(f)$ qui est un ensemble fermé, alors il existe $\eta > 0$ tels que $B(x_0,\eta) \bigcap S_\lambda(f) = \emptyset$ c.a.d $\lambda < f(x)$ $\forall x \in B(x_0,\eta)$, alors f est semi-continue inférieurement. □

Exemple 1.1. la fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble fermé K est semi-continue inférieure.

Proposition 1.4. *[11] Soit $f,g,f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions semi-continues inférieurement alors :*

1. *$f + g$ est semi-continue inférieurement.*
2. *si $\alpha > 0$, αf est semi-continue inférieurement.*
3. *$\inf(f + g)$ est semi-continue inférieurement.*
4. *$\sup_{i\in I} f_i$ est semi-continue inférieurement.*

Remarque 1.1. si f et g sont à valeur positives ou nulles, alors fg est semi-continue inférieurement.

Théorème 1.5. *[11] (Généralisation du théorème de Weierstrass). Soit $K \subset X$ un sous-ensemble compact, et soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement alors, l'ensemble M de points de K lequel f atteint son minimum est non vide .*

Démonstration. Posons $\alpha = \inf_{x\in K} f(x)$ et $\lambda_0 > \alpha$. $\forall \lambda \in]\alpha, \lambda_0]$, $\exists$ une suite $(x_\lambda) \in S_\lambda(f)$. Comme K est compact, alors la suite (x_λ) d'élément de K amdet une sous-suite convergente vers $\bar{x} \in S_\lambda(f)$. Puisque f est semi-continue inférieurement alors

$$f(\bar{x}) \leqslant \lim_{x_\lambda \to \bar{x}} \inf f(x_\lambda) \leqslant \lim_{\lambda > a} \inf \quad \lambda = \alpha \leqslant f(\bar{x}).$$

Donc $f(\bar{x}) = \alpha$, alors il existe $\bar{x} \in M$ tels que $f(\bar{x}) = \inf_{x\in K} f(x)$. □

1.3 Notions de convexité

Définition 1.10. [12] Un sous-ensemble C de X est un ensemble affine si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Autrement dit, un ensemble affine contient toujours la droite passant par deux de ses points x et y.

Définition 1.11. [12](ensemble Convexe). Une partie C de X est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

De manière équivalente, pour tout $x \in C$ et tout $y \in C$, le segment

$$[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$$

est inclus dans C .

Exemple 1.2. Nous donnons quelques exemples élémentaires

1. L'ensemble vide $\emptyset$, les singletons $\{x\}$ et l'espace vectoriel X tout entier sont convexes.
2. Tout ensemble affine est convexe.
3. Dans $\mathbb{R}$ les ensembles convexes sont exactement les intervalles.
4. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel X. Pour tout $x \in X$ et r ≥ 0, la boule centrée en x et de rayon r (ouverte ou fermée) est convexe : $B(x,r) := \{y \in E|,\|x - y\| \leq r\}$.

Définition 1.12. [12] Soient $x_1, \ldots, x_m$ des éléments de X. Une combinaison convexe de $x_1, \ldots, x_m$ est une combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Définition 1.13. [12] Soit C une partie de X. on appelle enveloppe convexe de A, et on note $co(C)$ l'intersection de tous les ensembles convexes de X contenant C.

Proposition 1.6. *[12] L'enveloppe convexe de C est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes finies d'éléments de C :*

$$\mathrm{co}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i / n \geq 1, x_i \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.14. Une partie Γ de X est un cône de sommet x_0 si et seulement si

$$\forall x \in \Gamma \text{ et },\forall \lambda > 0 \text{ alors}, \; x_0 + \lambda\left(x - x_0\right) \in \Gamma.$$

Proposition 1.7. *[12] Une partie Γ de X est un cône convexe si et seulement si*

$$\Gamma + \Gamma \subset \Gamma \quad \textit{et} \quad \lambda\Gamma \subset \Gamma \quad \forall \lambda > 0.$$

Définition 1.15. [12](Fonction convexe) Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si pour tout $x,y \in X$ et tout $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

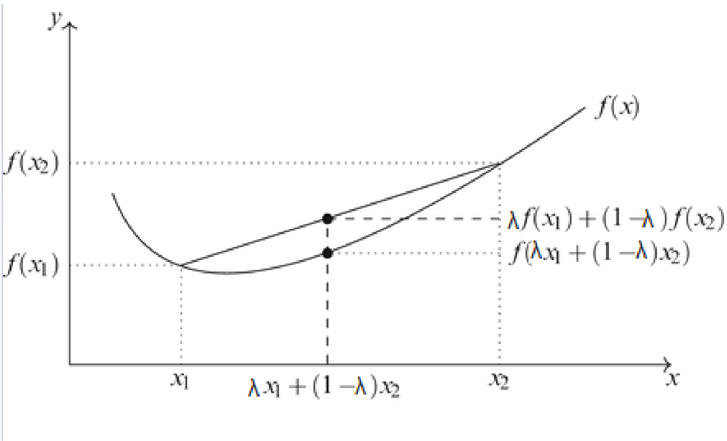

FIGURE 1.2 – Fonction convexe

Exemple 1.3. [1]

1. e^{ax}.
2. $-\log(x)$.
3. x^a (défini sur $\mathbb{R}_{++}$), $a \geq 1$ ou $a \leq 0$.

Proposition 1.8. *[3] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe .*
2. *$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right)$ $\forall \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \forall x_i \in X, \forall m \in \mathbb{N}$.*

3. *$Ep(f)$ est un ensemble convexe.*

Proposition 1.9. *[3] Soit $f,g,f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions convexes alors :*

1. *$f + g$ est convexe.*
2. *si $\alpha > 0$, αf est convexe.*
3. *Pour une application linéaire $A : Y \to X$ alors $f \circ A : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe.*
4. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, et $g : \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante, alos $g \circ f$ est convexe .*
5. *$\sup_{i \in I} f_i$ est convexe .*

Proposition 1.10. *[3] Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, alors l'ensemble de niveau inférieure $S_\lambda(f)$ est convexe .*

Définition 1.16. [12] On dit que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est strictement convexe si pour tout $x,y \in X$ avec $x \neq y$ et tout $\lambda \in (0,1)$,on a :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Cette définition nous donne une condition suffisante pour avoir unique solution de problème d'optimisation.

Proposition 1.11. *[3] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction strictement convexe. alors l'ensemble M de solution $x \in X$ de problème $f(\bar{x}) = \inf_{x \in X} f(x)$ contient au plus un point.*

Démonstration. On suppose que la fonction f strictement convexe et on va montrer que l'ensemble M contient au plus un point c.a.d on va montrer que le problème
$f(\bar{x}) = \inf_{x \in X} f(x)$ a au plus un solution.
On raisonne par l'absurde. Soient $x_1 \in X$ et $x_2 \in X$ deux solutions distinctes, vérifiant donc

$$f(x_1) = f(x_2) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Comme f est strictemet convexe (on prend $\lambda = \frac{1}{2}$), alors

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) = \inf_{x \in X} f(x).$$

On aurait donc un point $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ appartenant à X, donc $f(x) < f(x_1)$. Ceci contredirait l'optimalité de x_1 et x_2. $\square$

1.4 Convexité et différentiabilité

Définition 1.17. [6] On appelle dérivée droite de $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ en x_0 dans la direction v la limite suivante :

$$Df\left(x_0\right)\left(v\right) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f\left(x_0 + hv\right) - f\left(x_0\right)}{h}.$$

Si cette limite existe, on dit que $Df\left(x_0\right)\left(v\right)$ est la dérivée droite de f en x_0 dans la direction v .

Définition 1.18. [6] On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux en x_0, si l'application $v \to Df\left(x_0\right)\left(v\right)$ est linéaire continue .

Remarque 1.2. [6] La forme linéaire continue définie par :

$$\forall v \in X, \quad \left\langle \nabla f\left(x_0\right), v\right\rangle = Df\left(x_0\right)\left(v\right)$$

est appellé gradient de f en x_0 .

Corollaire 1.12. *Une fonction f, convexe propre et Gâteaux-différentiable en tout point de son domaine effectif admet un minimum au point $x_0 \in Dom(f)$ si et seulement si $\nabla f\left(x_0\right) = 0$.*

Proposition 1.13. *[12] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction Gâteaux-différentiable sur $Dom(f)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe.*
2. *$f(y) - f(x) \geq \left\langle \nabla f\left(x\right), y - x\right\rangle \quad \forall x,y \in Dom(f)$.*
3. *$\nabla^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in Dom(f)$.*

Exemple 1.4. [1](Fonction convexe multivariée).Soit la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \langle Qx,x\rangle - \langle c,x\rangle + d$, tels que $Q \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carré réelle symétrique de taille n avec $c \in \mathbb{R}^n$ un vecteur et $d \in \mathbb{R}$ un scalaire. Cette fonction est applée fonction quadratique.
Donc la fonction quadratique est convexe si et seulement si $Q \geq 0$.
La preuve est facile, nous utilisons la caractérisation du second ordre de la convexité.

1.5 Les théorèmes de projection et séparation

Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, tels que X est un espace de Hilbert, $\|\|$ est la norme de cet espace, et λ est un paramètre positif.

Définition 1.19. [19] Si K un sous-ensemble de X et x un élément quelconque de X, on dit q'un point x_1 de K est la meilleure approximation de x sur K si il vérifie :

$$\|x - x_1\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|.$$

Si x appartient à K, la meilleure approximation est unique et c'est x. Si x n'appartient pas à K on a le résultat suivant .

Théorème 1.14. *[19] Soit K un sous ensemble convexe fermé sur un espace hilbertien X de dimension finie. Tout élément x de K a une unique meilleure approximation sur K, notée Jx et appelée aussi le projection de x sur C. Le point Jx est donc caractérise par la propriété suivante :*

$$\|x - Jx\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|.$$

En outre Jx vérifie les inégalités variationnelles

$$\forall \mathrm{y} \in K, \langle Jx - x, Jx - y\rangle \leq 0. \tag{1.6}$$

Nous considérons les problèmes de minimisation de la forme :

$$f_\lambda(x) = \inf_{y \in \mathrm{X}} \left[f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 \right].$$

Théorème 1.15. *[3] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement. Alors il existe unique solution noté $J_\lambda x$ de problème :*

$$f_\lambda(x) = f\left(J_\lambda x\right) + \frac{1}{2\lambda} \left\|J_\lambda x - x\right\|^2.$$

Cette solution est caractérisée par l'inégalité suivante :

$$\forall y \in X, \quad \frac{1}{\lambda}\langle J_\lambda x - x, J_\lambda x - y\rangle + f\left(J_\lambda x\right) - f(y) \leq 0. \tag{1.7}$$

Démonstration. 1. On va montrer que tout solution $\bar{x}$ de problème

$$f_\lambda(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{x} - x\|^2.$$

Satisfait

$$\forall y \in X, \quad \frac{1}{\lambda}\langle \bar{x} - x, \bar{x} - y\rangle + f(\bar{x}) - f(y) \leq 0.$$

On a : $f(\bar{x}) = \inf_{x \in K} f(x)$, alors $f(\bar{x}) \leq f(z)\ \forall z \in K$.

On prend $z = \bar{x} + \theta(y - \bar{x}) = \theta y + (1-\theta)\bar{x} \quad \theta \in]0,1[$. Alors

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{x} - x\|^2 &\leqslant f(\bar{x} + \theta(y - \bar{x})) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{x} + \theta(y - \bar{x}) - x\|^2 \\ &= f(\theta y + (1-\theta)\bar{x}) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{x} + \theta(y - \bar{x}) - x\|^2. \end{aligned}$$

Et comme f est convexe

$$f(\bar{x}) + \tfrac{1}{2\lambda}\|\bar{x} - x\|^2 \leqslant \theta f(y) + (1-\theta) f(\bar{x}) + \tfrac{1}{2\lambda}\|\bar{x} - x\|^2 + \tfrac{\theta}{\lambda}\langle \bar{x} - x, y - \bar{x}\rangle + \tfrac{\theta^2}{2\lambda}\|y - \bar{x}\|^2.$$

On multiple les deux membre d'inégalité par $\frac{1}{\theta}$ et simplifier :

$$f(\bar{x}) - f(y) + \frac{1}{\lambda}\langle \bar{x} - x, \bar{x} - y\rangle \leqslant \frac{\theta}{2\lambda}\|y - \bar{x}\|^2.$$

On met θ tends vers 0 d'ou :

$$\frac{1}{\lambda}\langle \bar{x} - x, \bar{x} - y\rangle + f(\bar{x}) - f(y) \leqslant 0.$$

2. L'existence et l'unicité :

   <u>L'existence</u> :

   On considère une suite minimisante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in X$ satisfaisante

$$f(x_n) + \frac{1}{2\lambda}\|x_n - x\|^2 \leqslant f_\lambda(x) + \frac{1}{n}. \tag{1.8}$$

   On va montrer que cette suite est de Cauchy :

   Soit $n,m \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité suivante

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n - x\|^2 + 2\|x_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - x\right\|^2. \tag{1.9}$$

D'après (2.1)

$$\|x_n - x\|^2 \leqslant 2\lambda(f_\lambda(x) + \frac{1}{n} - f\left(x_n\right)).$$

On substitue dans (2.5)

$$\begin{aligned}
&\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2\lambda\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + 4f_\lambda(x) - 2f\left(x_m\right) - 2f\left(x_n\right)\right) \\
&+ 8\lambda\left(f\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - f_\lambda(x)\right) \\
&\leqslant 4\lambda \quad (\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + 2f\left(\frac{x_n + x_m}{2}\right) - f_\lambda(x) - f(x_n) - f(x_m)) \\
&\leqslant 4\lambda \quad \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)
\end{aligned}$$

car f est convexe .

Alors (x_n) est une suite de Cauchy, donc elle est convergente vers $\bar{x} \in X$ car X est un espace complet.

Et comme f est un fonction semi-continue inférieurement alors :

$$f(\bar{x}) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{x} - x\|^2 \leqslant \lim_{x_n \to \bar{x}} \inf f\left(x_n\right) + \lim_{x_n \to \bar{x}} \frac{1}{2\lambda}\|x_n - \bar{x}\|^2.$$

D'après

$$f\left(x_n\right) \leqslant f_\lambda(x) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2\lambda}\left\|x_n - x\right\|^2.$$

Donc

$$f(\bar{x}) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{x} - x\|^2 \leqslant \liminf_{x_n \to x}\left(f_\lambda(x) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2\lambda}\left\|x_n - \bar{x}\right\|^2\right) + \lim_{x_n \to \bar{x}} \frac{1}{2\lambda}\|x_n - \bar{x}\|^2.$$

En passant à la limite $n \to +\infty$

$$f(\bar{x}) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{x} - x\|^2 \leqslant f_\lambda(x).$$

Par suite : $f_\lambda(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2\lambda}\|\bar{x} - x\|^2$.

<u>L'unicité</u> :

Par l'absurde, on suppose qu'ils existent deux solutions différentes $\bar{x}$ et $\bar{\bar{x}}$ appartiennent X alors :

Si $\bar{x}$ est le solution est vérifie l'inégalité (1.7) : pour $y = \bar{\bar{x}}$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{\bar{x}}) + \frac{1}{\lambda}\langle\bar{x} - x, \bar{x} - \bar{\bar{x}}\rangle \leqslant 0.$$

Si $\bar{\bar{x}}$ est le solution est vérifie l'inégalité (1.7) : pour $y = \bar{x}$

$$f(\bar{\bar{x}}) - f(\bar{x}) + \frac{1}{\lambda}\langle \bar{\bar{x}} - x, \bar{\bar{x}} - \bar{x}\rangle \leqslant 0.$$

Par sommation ces deux inégalités on trouve :

$$\frac{1}{\lambda}\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|^2 \leqslant 0.$$

Donc $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$, Contradiction.

Alors il existe unique solution $\bar{x}$ de problème de minimisation. □

Proposition 1.16. *[6] Les applications $J_\lambda x$ et $1 - J_\lambda x$ sont lipschitziennes avec constante 1 (indépendant de λ) et monotones dans le sens où :*

$$\begin{cases} \textit{i)}\ \langle J_\lambda x - J_\lambda y, x - y\rangle \geq \|J_\lambda x - J_\lambda y\|^2. \\ \textit{ii)}\ \langle (1 - J_\lambda)\, x - (1 - J_\lambda)\, y, x - y\rangle \geq \|(1 - J_\lambda)\, x - (1 - J_\lambda)\, y\|^2. \end{cases}$$

Définition 1.20. Un hyperplan est un ensemble de la forme

$$H = \{x \in E : \langle p, x\rangle = b\}.$$

Tel que $p \in X^*$ est une forme linéaire continue non nul et $b \in \mathbb{R}$.On dit que H est l'hyperplan d'équation $[p = b]$.

Définition 1.21. (séparation au sens strict et large).Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes disjoints non vides d'espace X, et H est l'hyperplan d'équation $[p = b]$.On dit que :

— H sépare C_1 et C_2 au sens large si :

$$\forall x_1 \in C_1, \quad \forall x_2 \in C_2 : \quad \langle\, p, x_1\rangle \leq b \leq \langle\, p, x_2\rangle\,.$$

— H sépare C_1 et C_2 au sens strict si :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x_1 \in C_1, \quad \forall x_2 \in C_2 : \quad \langle\, p, x_1\rangle \leq b - \epsilon \leq b + \epsilon \leq \langle\, p, x_2\rangle\,.$$

Théorème 1.17. *[6](Séparation stricte) Soit K un sous-ensemble non vide, convexe fermé d'un espace de Hilbert X, si x_0 un élément de X n'appartenant pas à K, alors il existe une forme linéaire continue $p \in X^*$ et $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\sup_{y \in K} \langle p, y \rangle \leq \langle p, x_0 \rangle - \varepsilon.$$

Démonstration. Nous considèrons le projecteur de meilleure approximation Jx_0 de x_0 sur K et posons :

$$p = x_0 - Jx_0.$$

D'après les inégalités variationnelles (1.6) on a

$$\|p\|^2 - \langle p, x_0 - y \rangle = \langle p, p - x_0 + y \rangle = \langle x_0 - Jx_0, y - Jx_0 \rangle \leq 0.$$

Donc

$$\forall y \in K \quad \langle p, y \rangle \leqslant \langle p, \mathrm{x}_0 \rangle - \|p\|^2.$$

Puisque x_0 n'appartient pas à K, p est non nul alors $\|p\|^2$ est strictement positif. Par suite

$$\sup_{y \in K} \langle p, y \rangle \leq \langle p, x_0 \rangle - \varepsilon.$$

Remarque 1.3. Si on pose $a = \langle p, x_0 \rangle - \sup_{y \in K} \langle p, y \rangle$ et

$$b = \langle p, x_0 \rangle - \frac{a}{2} = \sup_{y \in K} \langle p, y \rangle + \frac{a}{2}.$$

Alors l'hyperplan $H = \{x \in E : \langle p, x \rangle = b\}$, sépare x_0 et K strictement tel que

$$\forall y \in K : \quad \langle\, p, y \rangle < b < \langle\, p, x_2 \rangle\, .$$

Théorème 1.18. *[6] (Séparation large) Soit K un sous-ensemble non vide, convexe d'un espace de dimension finie X, si x_0 un élément de X n'appartenant pas à K, il existe une forme linéaire $p \in X^*$ tel que*

$$p \neq 0 \text{ et } \sup_{y \in K} \langle p, y \rangle \leq \langle p, x_0 \rangle\, .$$

Corollaire 1.19. *On considère deux sous-ensembles disjoints non vides d'un espace de Hilbert X.*

a) *Si nous supposons que*

$$\text{l'ensemble } M - N \text{ est convexe et fermé,}$$

alors il existe une forme linéaire continue $p \in X^*$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{x \in M} \langle p, x \rangle \leq \inf_{y \in N} \langle p, y \rangle - \varepsilon.$$

b) *Si nous supposons que*

$$X \text{ est de dimension finie et } M - N \text{ est convexe ,}$$

il existe une forme linéaire $p \in X^*$ tel que

$$p \neq 0 \text{ et } \sup_{x \in M} \langle p, x \rangle \leq \inf_{y \in N} \langle p, y \rangle.$$

Chapitre 2

Fonctions conjuguées et dualité

Dans ce chapitre, nous définissons les fonctions conjuguées et démontrons ses propriétés principaux. Nous donnons quelques exemples pour calculer la conjuguée d'un fonction et certain résultats de dualité comme le théorème de Fenchel.
X est un espace de Hilbert, et X^* son espace dual.

2.1 Caractérisations des fonctions convexes semi-continues inférieures

Définition 2.1. [3] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors la fonction $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ définit par

$$\forall p \in X^*, f^*(p) = \sup_{x \in X}[\langle p, x\rangle - f(x)]$$

est appelée le conjugué de f, ou la fonction conjuguée de Fenchel.

Une conséquence immédiate de la définition

Proposition 2.1. *[3] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre :*

i) $\forall x \in X, \forall p \in X^*, \quad \langle p, x\rangle \leqslant f(x) + f^*(p).$
Appelée l'inégalité de Fenchel.

ii) *f^* est propre si et seulement si f est minorée par une fonction affine continue.*

Exemple 2.1.

Soit $f = \|.\|$ la norme de l'espace X. Alors

$$\forall p \in X^*, f^*(p) = \sup_{x \in X}[\langle p, x\rangle - \|x\|]$$

Si $\|p\|_* > 1$, alors $\sup_{\|x\| \leqslant 1}\langle p, x\rangle > 1$. $\exists \quad x \in X$ tels que $\|x\| \leqslant 1$ et $\langle p, x\rangle > 1$, donc $\langle p, x\rangle - \|x\| > 0$.
Et comme $\lim_{\lambda \to +\infty}\langle p, \lambda x\rangle - \|\lambda x\| = +\infty$, alors $\|p\|_* = +\infty$.
Au contraire si $\|p\|_* \leqslant 1$, $\langle p, x\rangle - \|x\| \leqslant 0$ avec égalité lorsque $x = 0$, Ainsi $\|p\|_* = 0$. Donc f^* est la fonction indicatrice de la boule unité pour la norme duale i.e $f^* = \Psi_B$ où $B = \{p \in X^*/\|p\|_* \leqslant 1\}$.

Exemple 2.2. [24] Conjuguer paires de fonctions convexes sur $\mathbb{R}$

1. $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$,
   $$f^*(x^*) = \begin{cases} x^* \log x^* - x^* & \text{Si} \quad x^* > 0. \\ 0 & \text{Si} \quad x^* = 0. \\ +\infty & \text{Si} \quad x^* < 0. \end{cases}$$
   Ci-dessous on a : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
2. $f(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{p})x^p & \text{Si} \quad x \geq 0, 0 < p < 1. \\ +\infty & \text{Si} \quad x < 0. \end{cases}$
   $$f^*(x^*) = \begin{cases} -(\frac{1}{q})\,|x^*|^q & \text{Si} \quad x^* < 0, -\infty < q < 0. \\ +\infty & \text{Si} \quad x^* \geq 0. \end{cases}$$
3. $f(x) = -(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Si} \quad |x| \leq a, a \geq 0.$
   $f^*(x^*) = a\,(1 + x^{*2})^{1/2}$.

Proposition 2.2. *Le conjugué de Fenchel est toujours convexe.*

Démonstration. Afin de prouver que la fonction conjuguée est convexe, nous devons prouver que pour tout $\lambda \in [0{,}1]$, $f^*(\lambda \mathbf{z}_1 + (1-\lambda)\mathbf{z}_2) \leq \lambda f^*(\mathbf{z}_1) + (1-\lambda) f^*(\mathbf{z}_2)$.
On a alors,

$$
\begin{aligned}
f^*(\lambda q+(1-\lambda)p) &= \sup_{x\in X}[\langle \lambda q+(1-\lambda)p, x\rangle - f(x)] \\
&= \sup_{x\in X}[\langle \lambda q, x\rangle + \langle (1-\lambda)p, x\rangle - f(x)] \\
&= \sup_{x\in X}[\lambda\langle q, x\rangle + (1-\lambda)\langle p, x\rangle - f(x)] \\
&= \sup_{x\in X}[\lambda(\langle q, x\rangle - f(x)) + (1-\lambda)(\langle p, x\rangle - f(x))] \quad (\text{car} f(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x))\square \\
&\leq \lambda \sup_{x\in X}[\langle q, x\rangle - f(x)] + (1-\lambda)\sup_{x\in X}[\langle p, x\rangle - f(x)] \\
&(\text{car } \sup(x+y) \leq \sup(x) + \sup(y)) \\
&= \lambda f^*(q) + (1-\lambda) f^*(p).
\end{aligned}
$$

Définition 2.2. [3] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, et $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ sa conjuguée. La biconjuguée de f qui sera notée f^{**} est la fonction $f^{**} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall x \in X, f^{**}(x) = \sup_{p\in X^*} \left[\langle p{,}x\rangle - f^*(p)\right].$$

Remarque 2.1. Pour toute fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on a $\forall x \in X, f^{**}(x) \leq f(x)$.

Proposition 2.3. *soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, semi-continue inférieurement et propre. Alors, f^* est convexe, semi-continue inférieurement et propre .*

Théorème 2.4. *(Fenchel-Moreau) [3] soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors $f = f^{**}$ si et seulement si f est convexe et semi-continue inférieurement.*

Remarque 2.2. [3] Puisque dans ce cas

$$f(x) = \sup_{p\in X^*} \left[\langle p, x\rangle - f^*(p)\right].$$

On en déduit que toute fonction semi-continue inférieure convexe propre est l'enveloppe supérieure de la fonction affine qui la minorise .

Démonstration. On rappelle que f est semi-continue inférieurement si et seulement si son épigraphe est fermé et que f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe. Nous allons montrer que pour tout $a < f(x)$, l'inégalité $a \leq f^{**}(x)$ est satisfaite.

1. On suppose que $a < f(x)$. Puisque le couple $(x,a) \notin Ep(f)$, qui est convexe et fermé, il existe une forme linéaire et continue $(p,b) \in X^* \times \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall y \in \mathrm{Dom}(f), \forall \lambda \geqslant f(y), \langle p, y\rangle - b\lambda \leqslant \langle p, x\rangle - ba - \varepsilon \tag{2.1}$$

d'après théorème de séparation.

2. On observe que $b \geq 0$. Sinon, prenons y dans le domaine de f et $\lambda = f(y) + \mu$. On aurrait

$$-b\mu \leqslant \langle p, x - y\rangle + b(f(y) - a) - \varepsilon < +\infty.$$

On obtient alors une contradiction en faisant tendre μ vers $+\infty$.

3. Montrons que si $b > 0$, alors $a \leq f^{**}(x)$. En effet, on peut diviser l'inégalité (2.1) par b : on obtient, en posant $\bar{p} = \frac{p}{b}$ et en prenant $\lambda = f(y)$,

$$\forall y \in \mathrm{Dom}(f), \langle \bar{p}, y\rangle - f(y) \leqslant \langle \bar{p}, x\rangle - a - \frac{\varepsilon}{b}$$

et par suite, en prenant le supermum, par rapport à y, que

$$f^*(\bar{p}) < \langle \bar{p}, x\rangle - a.$$

Cela implique que

$$\begin{cases} \text{i) } \bar{p} \text{ appartient au domaine de } f^* \text{ .} \\ \text{ii) } a < \langle \bar{p}, x\rangle - f^*(\bar{p}) \leqslant f^{**}(x). \end{cases}$$

4. Considérons le cas où x appartient au domaine de f. Alors, dans ce cas, $b > 0$: il suffit pour cela de prendre $y = x$ et $\lambda = f(x)$ dans l'inégalité (2.1) pour constater que $b \geq \frac{\varepsilon}{f(x)-a}$, puisque $f(x) - a$ est un nombre réel strictement positif. On déduit alors de la partie 2 l'existence de $\bar{p} \in \mathrm{Dom}(f^*)$ et que $a \leq f^{**}(x) \leq f(x)$, pour tout $a < f(x)$. Donc $f^{**}(x) = f(x)$.

5. Considérons le cas où $f(x) = +\infty$ et a est un nombre fini aussi grand que l'on veut. Ou bien $b > 0$ et dans ce cas, la partie 2 implique que $a < f^{**}(x)$. Ou bien $b = 0$ l'inégalité (2.1) entraîne alors que

$$\forall y \in \mathrm{Dom}(f), \langle p, y - x\rangle + \varepsilon \leqslant 0. \tag{2.2}$$

Prenons $\bar{p}$ dans le domaine de f^* (nous avons montré qu'il en existe un, puisque $\mathrm{Dom}(f)$ est non vide). L'inégalité de Fenchel implique que

$$\langle \bar{p}, y\rangle - f^*(\bar{p}) - f(y) \leq 0.$$

Prenons $\mu > 0$, multiplions par μ l'inégalité(2.2) et additionnons-la à l'inégalité au-dessus. On obtient

$$\langle \bar{p} + \mu p, y\rangle - f(y) \leqslant f^*(\bar{p}) + \mu\langle p, x\rangle - \mu\varepsilon.$$

En prenant le supremum par rapport à y, il vient :

$$f^*(\bar{p} + \mu p) \leqslant f^*(\bar{p}) + \mu\langle p, x\rangle - \mu\varepsilon$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\langle \bar{p}, x\rangle + \mu\varepsilon - f^*(\bar{p}) \leqslant \langle \bar{p} + \mu p, x\rangle - f^*(\bar{p} + \mu p) \leqslant f^{**}(x).$$

En prenant $\mu = \frac{a + f^*(\bar{p}) - \langle \bar{p}, x\rangle}{\varepsilon}$, qui est strictement positif, on a encore démontré que $a \leq f^{**}(x)$. Donc $f^{**}(x)$ étant plus grand que tout nombre fini, on en déduit que $f^{**}(x) = +\infty$. □

2.2 Théorème de Fenchel

Définition 2.3. Supposons que nous avons deux espaces de Hilbert X et Y,
soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres, convexes et semi-continues inférieurement.
Soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire continue, on note A^* sa transposé tel que
$A^* : Y^* \to X^*$ définie par $\langle A^* y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle \quad \forall\ (x,y) \in X \times Y$.
Soit le problème de minimisation

$$v = \inf_{x \in X} [f(x) + g(Ax)].$$

On pose la fonction $\mathcal{F} : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\mathcal{F}(x, Ax) = f(x) + g(Ax)$,

alors le problème v s'écrit, $v = \inf_{x \in X} \mathcal{F}(x,Ax)$.
Le problème v_* donné par

$$v_* := \inf_{q \in Y^*} \mathcal{F}^*(-A^*q,q)$$

est appelé le problème dual associe au ce problème. Par suite

$$v_* := \inf_{q \in Y^*} [f^*(-A^*q) + g^*(q)],$$

tels que $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ est la fonction conjuguée de f et $g^* : Y^* \to \overline{\mathbb{R}}$ est la fonction conjuguée de g.

On va étudier le problème de minimisation

$$v = \inf_{x \in X} [f(x) + g(Ax)].$$

La fonction que nous proposons de minimiser est propre seulement si
$A\,\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \neq \emptyset$, i.e. $0 \in A\,\mathrm{Dom}(f) - \mathrm{Dom}(g)$, en ce cas on a $v < +\infty$.
Aussi pour que le problème dual v_* a un sens seulement si $0 \in A^*\,\mathrm{Dom}(g^*) + \mathrm{Dom}(f^*)$.
On a $v + v_* \geq 0$, car d'après l'inégalité de Fenchel

$$f(x) + g(Ax) + f^*(-A^*q) + g^*(q) \geq \langle -A^*q,x\rangle + \langle q,Ax\rangle = 0.$$

On va montrer que $v + v_* = 0$, et que le problème dual a une solution .

Théorème 2.5. *[6] Soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire continue, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions propres, convexes et semi-continues inférieurement. Supposons que $0 \in Int(A\,\mathrm{Dom}(f) - \mathrm{Dom}(g))$, et $0 \in Int(A^*\,\mathrm{Dom}(g^*) + \mathrm{Dom}(f^*))$.*
Si on suppose que

$$0 \in Int(A\,\mathrm{Dom}(f) - \mathrm{Dom}(g)),$$

alors

i) $v + v_* = 0$

ii) $\exists\, \bar{q} \in Y^*$ *tels que* $\quad f^*(-A^*\bar{q}) + g^*(\bar{q}) = v_*$.

Si on suppose que

$$0 \in Int(A^* \operatorname{Dom}(g^*) + \operatorname{Dom}(f^*)),$$

alors

i) $v + v_* = 0.$

ii) $\exists\, \bar{x} \in X$ *tels que* $f(\bar{x}) + g(A\bar{x}) = v.$

Démonstration. On pose l'application ϕ tels que $\phi : Dom(f) \times Dom(g) \to Y \times \mathbb{R}$, définie par :

$$\phi(x,y) = (Ax - y, f(x) + g(y))$$

et aussi

i) le vecteur $(0,v) \in Y \times \mathbb{R}$.

ii) le cône $Q = \{0\} \times]0, \infty[\subset Y \times \mathbb{R}$.

Il est facile de montrer que la linéarité de A et la convexité de la fonction f et g impliquent que $\phi(Dom(f) \times Dom(g)) + Q$ est un sous-ensemble convexe de $Y \times \mathbb{R}$.
De plus, si on suppose $(0,v) \in \phi(Dom(f) \times Dom(g)) + Q$, alors il existe $x \in Dom(f)$ et $y \in Dom(g)$ tels que $Ax - y = 0$ et $v > f(x) + g(y) = f(x) + g(Ax)$ ce qui contredirait la définition de v, donc

$$(0,v) \notin \phi(Dom(f) \times Dom(g)) + Q,$$

par suite d'après théorème de séparation large, il existe une forme linéaire $(p,a) \in Y^* \times \mathbb{R}$ tels que $(p,a) \neq 0$ et

$$\begin{aligned} av &= \langle (p,a),(0,v) \rangle \\ &\leq \inf_{\substack{x \in \operatorname{Dom}(f) \\ y \in \operatorname{Dom}(g)}} [a(f(x) + g(y)) + \langle p, Ax - y \rangle] + \inf_{\theta > 0} a\theta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Puisque le nombre $\inf_{\theta>0} a\theta$ est fini, on déduit qu'il est nul et que $a \geq 0$. On ne peut pas avoir $a = 0$ car en ce cas l'inégalité (2.3) implique

$$0 \leq \inf_{\substack{x \in \operatorname{Dom}(f) \\ y \in \operatorname{Dom}(g)}} \langle p, Ax - y \rangle = \inf_{z \in A \operatorname{Dom}(f) - \operatorname{Dom}(g)} \langle p,z \rangle.$$

D'après l'hypothèse $0 \in Int(A\,\mathrm{Dom}(f) - \mathrm{Dom}(g))$, alors $\exists\ \eta$, tels que la boule de centre 0 $B(0,\eta) \in A\,\mathrm{Dom}(f) - \mathrm{Dom}(g)$, on déduit que $0 \leq -\eta\|p\|$, donc $p = 0$ c'est un contradiction car $(p,a) \neq 0$, par suite $a > 0$.
On divise l'inégalité (2.3) par a et prend $\bar{p} = \frac{p}{a}$, on trouve

$$\begin{aligned} v &\leq \inf_{\substack{x \in \mathrm{Dom}_f \\ y \in \mathrm{Dom}_g}} \left[\langle A^* \bar{p}, x\rangle - \langle \bar{p}, y\rangle + f(x) + g(y)\right] \\ &= - \sup_{y \in \mathrm{Dom}} \left[\langle -A^* \bar{p}, x\rangle + \langle \bar{p}, y\rangle - f(x) - g(y)\right] \\ &= -f^*\left(-A^* \bar{p}\right) - g^*(\bar{p}) \\ &= -v_*. \end{aligned}$$

D'où $v \leq -v_*$, alors $\bar{p}$ est le solution de le problème dual et que $v_* = -v$.
La deuxième assertion de theorème est prouvé en remplaçant f par g^*, g par f^* et A par $-A^*$. □

2.3 Propriétés de les fonctions conjuguées

Soit X et Y deux espaces de Hilbert et soit A opérateur linéaire continue $A : X \to Y$ et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction .

Proposition 2.6. *[6]*

i) Si $f \leqslant g$, alors $g^* \leqslant f^*$.

ii) Si $A \in L(X,Y)$ est un isomorphisme, alors $(f \circ A)^* = f^* \circ A^{*-1}$.

iii) Si $g(x) = f(x - x_0) + \langle p_0,x\rangle + a$, alors

$$g^*(p) = f^*(p - p_0) + \langle p,x_0\rangle - (a + \langle p_0,x_0\rangle).$$

iv) Si $g(x) = f(\lambda x)$, alors $g^*(p) = f^*(\frac{p}{\lambda})$ et si $h(x) = \lambda f(x)$ alors $h^*(p) = \lambda f^*(\frac{p}{\lambda}), \forall \lambda > 0$.

Démonstration. i) On a

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad f(x) \leq g(x) &\Longrightarrow -g(x) \leq -f(x) \\ &\Longrightarrow \langle p,x\rangle - g(x) \leq \langle p,x\rangle - f(x) \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Cela implique $g^*(p) = \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - g(x)] \leq f^*(p) = \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(x)], \forall p \in X^*$.

ii)

$$\begin{aligned}(f\circ A)^*(p) = \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(Ax)] &= \sup_{y\in X}[\langle p,A^{-1}y\rangle - f(y)] \quad \text{(car } A \text{ est un isomorphisme)}\\ &= \sup_{y\in X}\left[\left\langle A^{*-1}p,y\right\rangle - f(y)\right] \quad (\ (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*\ )\\ &= f^*\left(A^{*-1}p\right).\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}g^*(p) = \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - g(x)] &= \sup_{x\in X}\left[\langle p-p_0,x\rangle - f\left(x-x_0\right)\right] - a\\ &= \sup_{x\in X}\left[\langle p-p_0,y\rangle - f(y)\right] - a + \langle p-p_0,x_0\rangle\\ &= f^*\left(p-p_0\right) + \langle p,x_0\rangle - a - \langle p_0,x_0\rangle .\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}g^*(p) &= \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(\lambda x)]\\ &= \sup_{x\in X}[\left\langle p,\frac{x}{\lambda}\right\rangle - f(x)]\\ &= \sup_{x\in X}[\left\langle \frac{p}{\lambda},x\right\rangle - f(x)] = f^*\left(\frac{p}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h^*(p) = (\lambda f)^*(p) &= \sup_{x\in X}\left\{\langle p,x\rangle - (\lambda f(x))\right\}\\ &= \sup_{x\in X}\left\{\lambda\left[\left\langle\frac{1}{\lambda}p,x\right\rangle - f(x)\right]\right\} = \lambda f^*\left(\frac{p}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Définition 2.4. [12](inf-convolution)

Soient f_1,$f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, deux fonctions propres. L'inf-convolé de f et g est la fonction $f\Box g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\left(f_1\Box f_2\right)(x) := \inf_{x_1+x_2=x}\left(f_1\left(x_1\right)+f_2\left(x_2\right)\right), \quad x\in X.$$

Proposition 2.7. *[12]*

Soient f_1,$f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, deux fonctions propres. Alors $\left(f_1\Box f_2\right)^* = f_1^* + f_2^*$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(f_1 \square f_2)^*(u) &= \sup_{x\in X}[\langle u,x\rangle - \inf_{x_1+x_2=x}(f_1(x_1)+f_2(x_2))] \\ &= \sup_{x\in X}\sup_{x_1+x_2=x}[\langle u,x\rangle - f_1(x_1) - f_2(x_2)] \\ &= \sup_{x_1,x_2}[\langle u,x_1\rangle + \langle u,x_2\rangle - f_1(x_1) - f_2(x_2)] \\ &= \sup_{x_1}[\langle u,x_1\rangle - f_1(x_1)] + \sup_{x_2}[\langle u,x_2\rangle - f_2(x_2)] \\ &= f_1^*(u) + f_2^*(u).\end{aligned}$$

Proposition 2.8. *[3] Soit X et Y deux espaces de Hilbert, et soit $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction strictement convexe .*
Posons $g(y) = \inf_{x\in X} f(x,y)$, alors sa transformée de Fenchel est

$$g^*(q) = f^*(0,q).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}g^*(q) &\overset{\text{déf}}{=} \sup_{y\in Y}[< q,y > - \inf_{x\in X} f(x,y)] \\ &= \sup_{y\in Y}\sup_{x\in X}[< 0,x > + < q,y > - f(x,y)] \quad (\text{car } \sup -f = -\inf f) \\ &= f^*(0,q).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.9. *[3] Soit X et Y deux espaces de Hilbert, soit $B \in \mathcal{L}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$ opérateur linéaire continue et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions propres.*
Posons $h(x) = \inf_{y\in Y}(f(x - By) + g(y))$, alors

$$h^*(p) = f^*(p) + g^*(B^*p).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}h^*(q) &\overset{\text{déf}}{=} \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - \inf_{y\in Y}(f(x - By) + g(y))] \\ &= \sup_{x\in X}\sup_{y\in Y}[\langle p,x\rangle - f(x - By) - g(y)] \\ &= \sup_{x\in X}\sup_{y\in Y}[\langle p,x + By\rangle - f(x) - g(y)] \quad (\text{changement de variable}(x = x - By)) \\ &= \sup_{x\in X}[\langle p,x\rangle - f(x)] + \sup_{y\in Y}[\langle p,By\rangle - g(y)] \quad (\text{car } p \text{ forme linéaire}) \\ &= f^*(p) + g^*(B^*p).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.10. *[3] Soit $A : X \to Y$ un opérateur linéaire continue , $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions propres, convexes et semi-continues inférieurement.*
On suppose que

$$0 \in Int(A\,\mathrm{Dom}(f) - \mathrm{Dom}(g)).$$

Alors, pour tous $p \in A^*\,\mathrm{Dom}(g^*) + \mathrm{Dom}(f^*)$, il existe $\bar{q} \in Y^*$ tels que

$$\begin{aligned}(f + g \circ A)^*(p) &= f^*\left(p - A^*\bar{q}\right) + g^*(\bar{q}) \\ &= \inf_{q \in Y^*}\left(f^*\left(p - A^*q\right) + g^*(q)\right).\end{aligned}$$

Démonstration. Comme $\sup -f = -\inf f$, on a

$$\sup_{x \in X}[\langle p,x\rangle - f(x) - g(Ax)] = -\inf[f(x) - \langle p,x\rangle + g(Ax)].$$

On remplace f par $f(.) - \langle p,.\rangle$ dont le domaine coïncide avec celui de f, sa fonction conjuguée est $q \to f^*(q+p)$ et on applique le théorème de Fenchel. Donc il existe $\bar{q} \in Y^*$ tel que

$$\begin{aligned}\sup_{x \in X}[\langle p,x\rangle - f(x) - g(Ax)] &= \sup_{x \in X}[\langle p,x\rangle - \langle A^*\bar{q},x\rangle - f(x) + \langle \bar{q},y\rangle - g(y)] \quad (\text{on pose } Ax = y) \\ &= \sup_{x \in X}[\langle p - A^*\bar{q},x\rangle - f(x) +] + \sup_{y \in Y}[\langle \bar{q},y\rangle - g(y)] \\ &= f^*\left(p - A^*\bar{q}\right) + g^*(\bar{q}) \\ &= \inf_{q \in Y^*}\left(f^*\left(p - A^*q\right) + g^*(q)\right).\end{aligned}$$

Proposition 2.11. *[6] Soit X et Y deux espaces de Hilbert, soit $A : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ opérateur linéaire continue et, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonctions propre, convexe, semi-continue inférieurement.*
On suppose que

$$0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{Im}\, A - \mathrm{Dom}\, g),$$

Alors, pour tous $p \in A^*\,\mathrm{Dom}(g^*)$, il existe $\bar{q} \in \mathrm{Dom}(g^*)$ satisfaisant

$$A^*\bar{q} = p \quad \text{et} \quad (g \circ A)^*(p) = g^*(\bar{q}) = \min_{A^*q = p} g^*(q).$$

Démonstration. Nous appliquons la proposition précédente avec $f = 0$ telle que sa fonction conjuguée

$$f^*\left(p\right) = \begin{cases} \{0\} \text{ si } p = 0 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

Par conséquent $f^*(p - A^*q)$ est fini et égal à 0 si et seulement si $p = A^*q$. □

Proposition 2.12. *[6] Soit X et Y deux espaces de Hilbert, soit $A \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ opérateur linéaire continue et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions propres, convexes, semi-continues inférieurement.*
On suppose que

$$0 \in Int(\mathrm{Dom}(g) - A\,\mathrm{Dom}(f)).$$

On pose $e(x, y) := f(x) + g(Ax + y)$. Alors pour tous $(p, q) \in X^* \times Y^*$

$$e^*(p, q) = f^*\,(p - A^*q) + g^*(q).$$

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$e(x, y) = f(x) + g(Ax + y) = h(C(x, y))$$

telle que la fonction h définie de $X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ par $h(x,y) = f(x) + g(y)$ avec domaine $\mathrm{Dom}(h) = \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Dom}(g)$, et $C : X \times Y \to X \times Y$ est défini par $C(x, y) = (x, Ax + y)$ sa transposition $C^* : X^* \times Y^* \to X^* \times Y^*$ est défini par $C^*(p, q) = (p + A^*q, q)$. Nous appliquons la proposition (2.6) pour calculer la fonction conjuguée de $h \circ C$ puisque l'opérateur C est clairement un isomorphisme, donc on trouve le résultat. □

2.4 Exemples : fonctions conjuguées des fonctions quadratiques

Proposition 2.13. *[6] On suppose que X est un espace de Hilbert et $L : X \to X^*$ un opérateur linéaire continue satisfaisant :*

i) $L = L^*$.

ii) $\langle Lx,x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$.

iii) $Im(L)$ *est fermé dans* X^*.

soit $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction quadratique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Lx,x\rangle.$$

Alors sa fonction conjuguée est :

$$f^*(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}\langle p, x\rangle & \text{tels que } x \in L^{-1}(p) \quad \text{si } p \in \operatorname{Im} L. \\ +\infty & \text{si } p \notin \operatorname{Im} L. \end{cases}$$

Démonstration. On va calculer la fonction conjuguée de f.

1. On prend $p \notin \operatorname{Im} L$. Comme $Im(L)$ est fermé, alors $Im(L) = (\mathrm{Ker}L)^{\perp}$ donc il existe un élément $x_0 \in \mathrm{Ker}L$ tels que $\langle p,x_0\rangle > 0$.D'où

$$f^*(p) \geq \sup_{\lambda>0} \left(\langle p, \lambda x_0\rangle - f(\lambda x_0)\right) = \left(\sup_{\lambda>0} \lambda\right) \langle p, x_0\rangle = +\infty.$$

   Car $f(\lambda x_0) = \frac{1}{2}\langle \lambda L(x_0), \lambda x_0\rangle = 0$.
   Donc $f^*(p) = +\infty$.

2. On prend $p \in \operatorname{Im} L$, avec $\bar{x}$ est le solution d'équation $p = L\bar{x}$. Aussi on a $l(x, y) = \langle Lx, y\rangle$ est semi-produit scalaire, alors

$$\begin{aligned} \langle L\bar{x}, y\rangle &\leq \sqrt{\langle L\bar{x}, \bar{x}\rangle}\sqrt{\langle Ly, y\rangle} \quad \text{(d'après inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq \frac{1}{2}\langle L\bar{x}, \bar{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle Ly, y\rangle \quad (\text{car}(\sqrt{\langle L\bar{x}, \bar{x}\rangle} - \sqrt{\langle Ly, y\rangle})^2 \geq 0 \text{)}. \end{aligned}$$

   D'où

$$f^*(p) = \sup_{y\in X} \left(\langle L\bar{x}, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ly, y\rangle\right) \leq \frac{1}{2}\langle L\bar{x}, \bar{x}\rangle = \frac{1}{2}\langle p, \bar{x}\rangle.$$

   D'autre part

$$\frac{1}{2}\langle p, \bar{x}\rangle = \langle p, \bar{x}\rangle - \frac{1}{2}\langle L\bar{x}, \bar{x}\rangle \leq f^*(p).$$

   Donc $f^*(p) = \frac{1}{2}\langle p, \bar{x}\rangle$ pour toute solution $\bar{x}$ d'équation $L\bar{x} = p$. □

Corollaire 2.14. *Soit X un espace de Hilbert et $L : X \to X^*$ un opérateur de dualité. La fonction conjuguée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ est la fonction f^* définie par :*

$$f^*(p) = \frac{1}{2}\|p\|_*^2 \quad \textit{tels que} \quad \|p\|_* = \sup_{x\in X} \frac{\langle p, x\rangle}{\|x\|} = \sqrt{\langle L^{-1}p, p\rangle}.$$

Corollaire 2.15. *Soit X un espace de Hilbert et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Alors pour tous $\lambda > 0$*

$$\inf_{x \in X}\left(f(x) + \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2\right) + \inf_{p \in X^*}\left(f^*(p) + \frac{\lambda}{2}\|p\|_*^2\right) = 0.$$

Démonstration. on applique le theorème (2.5). On prend $g(x) = \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2$, alors sa fonction conjuguée est $g^*(p) = \frac{\lambda}{2}\|\lambda p\|_*^2$ car d'après les propriétés de la fonction conjuguée si $g(x) = \lambda f(x)$ alors $g^*(p) = \frac{1}{\lambda}f^*(\frac{p}{\lambda})$, (en ce cas $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$)
et on prend l'opérateur A l'identité ($A = I$). □

2.5 Fonctions support

Définition 2.5. [14] soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On dit que f est une sous - linéaire fonction si :

$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in X$ (sous - additivité) et

$f(tx) = tf(x) \quad \forall t > 0, \forall x \in X$ (homogénéité positif).

f est sous - linéaire fonction si et seulement si f est convexe et positivement homogène.

Théorème 2.16. *[14] soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. f est une sous - linéaire fonction si et seulement si s'épigraphe ($Ep(f)$) est un cône convexe .*

Démonstration. Supposons que f est une sous - linéaire fonction et montrons que $Ep(f)$ est un cône convexe c.a.d $\forall (x,\alpha) \in Ep(f)$, alors $\lambda(x,\alpha) \in Ep(f) \quad \forall \lambda > 0$.
Comme f est sous - linéaire, alors elle est convexe donc $Ep(f)$ est aussi convexe d'après les propriétés des fonctions convexes. Soit $(x,\alpha) \in Ep(f)$, alors $p(x) \leq \alpha$ et par la propriété d'homogénéité positif

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \leq \lambda\alpha, \lambda > 0,$$

ce qui implique que $\lambda(x,\alpha) = (\lambda x, \lambda\alpha) \in Ep(f) \quad \forall \lambda > 0$.
Inversement supposons que $Ep(f)$ est un cône convexe et montrons que f est sous - linéaire.
Comme $Ep(f)$ est un cône convexe, alors pour tous $(x_i, \alpha_i) \in Ep(f), i = 1,2$,

$$(x_1 + x_2, \alpha_1 + \alpha_2) \in Ep(f).$$

En particulier pour $\alpha_i = p(x_i), i = 1{,}2$, la condition ci-dessus donne

$$f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in X, \tag{2.4}$$

donc f est sous-additive. Aussi comme $Ep(f)$ est un cône $\forall(x,\alpha) \in Ep(f)$, alors $\lambda(x,\alpha) \in Ep(f) \quad \forall \lambda > 0$ i.e $f(\lambda x) \leq \lambda\alpha$. En particulier pour $\alpha = f(x)$

$$f(\lambda x) \leq \lambda f(x), \forall \lambda > 0, \tag{2.5}$$

alors f positivement homogène.
De (2.4) et (2.5), f est sous - linéaire. □

La fonction sous - linéaire est une classe particulière des fonctions convexes, une classe importante de fonction sous - linéaire est celle de la fonction support .

Définition 2.6. [3] On appelle fonction support d'un ensemble $K \in X$ la fonction σ_K tel que $\sigma_K : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$\sigma_K(p) = \sup_{x \in K} \langle p,x \rangle.$$

Le domaine de σ_K est appelé le cône barrière de K, noté $b(K) := \mathrm{Dom}(\sigma_K)$.

Exemple 2.3. [5]

i) Si $K = \{x_0\}$ alors $\sigma_K(p) = \langle p,x_0 \rangle$.

ii) Si $K = B_X$ la boule unité alors $\sigma_K(p) = \|p\|_*$.

iii) Si K est un cône, alors

$$\sigma_K(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in K^-. \\ +\infty & \text{si } p \notin K^-. \end{cases}$$

et $b(K) = K^-$. Tels que $K^- = \{p \in X^* | \forall x \in K, \langle p,x \rangle \leq 0\}$ est un cône polaire négatif de K .

Proposition 2.17. *[7] la fonction conjuguée Ψ_K^* de la fonction indicatrice est la fonction support de K. Inversement, si K est convexe et fermé, $\Psi_K = \sigma_K^*$.*

Démonstration.

$$\Psi_K^*(p) = \{\langle p,x\rangle - \Psi_K(x)\} = sup_{x\in K}\langle p,x\rangle = \sigma_K(p).$$

Si K est convexe et fermé, Ψ_K est convexe et semi-continue inférieurement, donc

$$\Psi_K = \Psi_K^{**} = \sigma_K^*.$$

Proposition 2.18. *[3] Toute fonction support $\sigma_K : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ de le sous-ensemble non vide $K \subset X$ est convexe, semi-continue inférieurement et positivement homogène .*
Inversement toute fonction $\sigma : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe,semi-continue inférieurement et positivement homogène est la fonction support de l'ensemble

$$K_\sigma := \{x \in X | \forall p \in X^*, \langle p,x\rangle \leq \sigma(p)\}.$$

Démonstration. Premièrement toute fonction support est convexe, semi-continue inférieurement en tant que supremum d'une famille de fonctions linéaires, σ_K est aussi positivement homogène .
Inversement, on calcule la fonction conjuguée de σ.
Si $x \in K_\sigma$, alors $\sigma^*(x) = 0$ puisque

$$\sigma^*(x) = \sup_{p\in X}(\langle p,x\rangle - \sigma(p)) \leq 0 = \langle 0,x\rangle - \sigma(0) \leq \sigma^*(x).$$

Si $x \notin K_\sigma$, alors il existe p_0 tels que $\langle p_0,x\rangle - \sigma(p_0) > 0$. Donc

$$\sigma^*(x) \geq \sup_{\lambda>0}\left(\langle \lambda p_0,x\rangle - \sigma\left(\lambda p_0\right)\right) \geq \sup_{\lambda>0}\lambda\left(\langle p_0,x\rangle - \sigma\left(p_0\right)\right) = +\infty.$$

Par suite

$$\sigma^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K_\sigma. \\ +\infty & \text{si } x \notin K_\sigma. \end{cases}$$

est la fonction indicatrice de l'ensemble K_σ
Comme $\sigma^* = \Psi_{K_\sigma}$, alors $\sigma^{**} = \Psi_{K_\sigma}^*$, et d'après théorème (2.4) $\sigma = \sigma^{**}$. Donc

$$\sigma(x) = \Psi_{K_\sigma}^*(x) = sup_{x\in K_\sigma}\langle p,x\rangle$$

est la fonction support de K_σ. □

Remarque 2.3. Si f est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieure alors

$$\sigma_{\mathrm{Ep}(f)}(p, -1) = f^*(p).$$

Proposition 2.19. *[6]*

i) Considérons deux ensembles convexes K_1 et $K_2 \in X$. Si $K_1 \subset K_2$, alors

$$b(K_2) \subset b(K_1) \text{ et } \sigma_{K_1}(p) \leq \sigma_{K_2}(p) \quad \forall p \in X^*.$$

ii) Si $K_i \subset X_i (i = 1, \ldots, n)$, alors

$$b\left(\prod_{i=1}^{n} K_i\right) = \prod_{i=0}^{n} b\left(K_i\right) \text{ et } \sigma_K\left(p_1, \ldots, p_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{K_i}\left(p_i\right).$$

iii) $b\left(\overline{\mathrm{co}} \bigcup_{i \in I} K_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} b\left(K_i\right)$ and $\sigma\left(\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{i \in I} \sigma_{K_i}\right)(p)\right) = \sup_{i \in I} \sigma_{K_i}(p)$.

iv) Si $B \in L(X, Y)$, alors

$$b(\overline{B(K)}) = B^{*-1} b(K) \text{ et } \sigma_{\overline{B(K)}}(p) = \sigma_K\left(B^* p\right).$$

v) $b\left(K_1 + K_2\right) = b\left(K_1\right) \cap b\left(K_2\right)$ et $\sigma_{K_1+K_2}(p) = \sigma_{K_1}(p) + \sigma_{K_2}(p)$.

vi) Si K_1 et K_2 sont des sous-ensembles fermés convexes de X tels que $0 \in Int(K_1 - K_2)$, alors $b(K_1 \cap K_2) = b\left(K_1\right) + b\left(K_2\right)$ et pour tous $p \in b(K_1 \cap K_2)$, il existe $\bar{p}_i \in b\left(K_i\right) (i = 1{,}2)$ tels que $p = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$ et

$$\sigma_{K_1 \cap K_2}(p) = \sigma_{K_1}\left(\bar{p}_1\right) + \sigma_{K_2}\left(\bar{p}_2\right) = \inf_{p = p_1 + p_2}\left(\sigma_{K_1}\left(p_1\right) + \sigma_{K_2}\left(p_2\right)\right).$$

Chapitre 3

Sous-différentiels de les fonctions convexes

Nous représentons dans ce chapitre le sous-différentiel des fonctions convexes et ses propriétés de minimisation avec certain nombre des règles de calcul sous-différentiel.
X est un espace de Hilbert, et X^* son espace dual.

3.1 Dérivées droites des fonctions convexes

Proposition 3.1. *[3] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. On suppose que $x_0 \in Dom(f)$ et $v \in X$, alors la limite :*

$$Df\left(x_0\right)(v) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f\left(x_0 + hv\right) - f\left(x_0\right)}{h}$$

existe dans $\overline{\mathbb{R}}(:= \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, et satisfait

$$f(x_0) - f(x_0 - v) \leq Df\left(x_0\right)(v) \leq f(x_0 + v) - f(x_0). \tag{3.1}$$

De plus $v \to Df\left(x_0\right)(v)$ est convexe et positivement homogène .

Démonstration. 1. La fonction $h \to \frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h}$ est croissante car :

On suppose que $h_1 \leq h_2$, on a

$$f\left(x_0 + h_1 v\right) - f\left(x_0\right) = f\left(\frac{h_1}{h_2}\left(x_0 + h_2 v\right) + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) x_0\right) - f\left(x_0\right).$$

Comme f est convexe et $\frac{h_1}{h_2} \leq 1$ il s'ensuit que :

$$f(x_0 + h_1 v) - f(x_0) \leq \frac{h_1}{h_2} f(x_0 + h_2 v) + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) f(x_0) - f(x_0).$$

D'où

$$\frac{f(x_0 + h_1 v) - f(x_0)}{h_1} \leq \frac{f(x_0 + h_2 v) - f(x_0)}{h_2}.$$

Donc ces quotients différentiels ont une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en tant que $h \to 0_+$:

$$Df(x_0)(v) = \inf_{h>0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}. \tag{3.2}$$

2. On prend $h = 1$ dans l'équation (3.2), alors

$$Df(x_0)(v) \leq f(x_0 + v) - f(x_0).$$

On a $x_0 = \frac{1}{1+h}(x_0 + hv) + \frac{h}{1+h}(x_0 - v)$, et par la convexité de f on trouve que

$$f(x_0) \leq \frac{1}{1+h} f(x_0 + hv) + \frac{h}{1+h} f(x_0 - v).$$

Cette inégalité implique pour tous $h > 0$

$$f(x_0) - f(x_0 - v) \leq \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h},$$

et d'après (3.2), on déduit que

$$f(x_0) - f(x_0 - v) \leq Df(x_0)(v).$$

D'où $\quad f(x_0) - f(x_0 - v) \leq Df(x_0)(v) \leq f(x_0 + v) - f(x_0).$

3. Soit $v \in X$ et $\alpha > 0$, alors

$$\begin{aligned} Df(x_0)(\alpha v) &= \lim_{h \to 0_+} \frac{f(x_0 + h\alpha v) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0_+} \alpha \frac{f(x_0 + h\alpha v) - f(x_0)}{\alpha h} \\ &= \alpha \lim_{h' \to 0_+} \frac{f(x_0 + h'v) - f(x_0)}{h'} \\ &= \alpha Df(x_0)(v). \end{aligned}$$

Donc $Df(x_0)(.)$ est positivement homogène .

Soit v_1 ,$v_2 \in X$, et $\alpha \in [0{,}1]$, par la convexité de f :

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2)) - f(x_0) \\ &\quad = f(\lambda(x_0 + hv_1) + (1-\lambda)(x_0 + hv_2)) - \lambda f(x_0) - (1-\lambda) f(x_0) \\ &\quad \leq \lambda(f(x_0 + hv_1) - f(x_0)) + (1-\lambda)(f(x_0 + hv_2) - f(x_0)). \end{aligned}$$

On divise les deux côtés de l'inégalité par $h > 0$, et prend la limite en tant que $h \to 0_+$, on déduit que

$$Df(x_0)(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \leq \lambda Df(x_0)(v_1) + (1-\lambda) Df(x_0)(v_2).$$

Par suite $Df(x_0)(.)$ est convexe . □

3.2 Sous-différentiels des fonctions convexes

Définition 3.1. [6] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Le Sous-différentiel de f en x_0 est l'ensemble définie par :

$$\partial f(x_0) := \{p \in X^* | \forall v \in X, \langle p, v \rangle \leq Df(x_0)(v)\}$$

l'élément p de $\partial f(x_0)$ est appelé le sous-gradient .

Proposition 3.2. *Si f est Gâteaux différentiable en x_0, alors*

$$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}.$$

Corollaire 3.3. *[6] Si la dérivée droite $Df(x_0)(.)$ est propre et semi-continue inférieurement. Alors d'après la proposition (2.18) chapitre (1), la fonction $v \to Df(x_0)(v)$ est la fonction support de $\partial f(x_0)$. Autrement dit,*

$$Df(x_0)(v) = \sigma(\partial f(x_0), v).$$

Définition 3.2. [12] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe, le sous-différentiel de la fonction f est l'application $\partial f : X \to X^*$ définie par :

$$\partial f(x_0) := \{p \in X^* | f(x) - f(x_0) \geq \langle x - x_0, p\rangle \quad \forall x \in X\}.$$

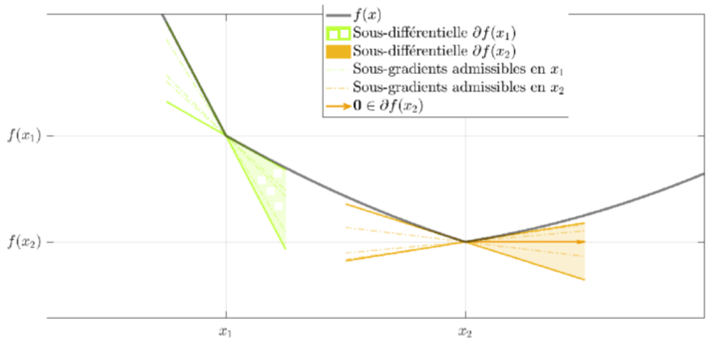

FIGURE 3.1 – Sous-différentielle d'une fonction convexe

Théorème 3.4. *[12] La définition (3.1) et (3.2) sont équivalentes.*

Démonstration. On suppose que $p \in \partial f$, par la définition (3.2) on a

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle x - x_0, p\rangle \quad \forall x \in X.$$

En particulier, pour $x = x_0 + hv$ avec $h > 0$, la condition ci-dessus se réduit à

$$\frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \geq \langle v, p\rangle \quad \forall v \in X.$$

Passant à la limite quand $h \to 0_+$, alors

$$\langle p, v\rangle \leq Df(x_0)(v) \quad \forall v \in X.$$

Inversement on suppose que $p \in X^*$ satisfait

$$Df\left(x_0\right)(v) \geq \langle p, v\rangle \quad \forall v \in X.$$

D'après l'équation (3.2) on trouve que

$$\frac{f\left(x_0+hv\right)-f\left(x_0\right)}{h} \geq \langle v,p\rangle \quad \forall v \in X.$$

En patriculier, pour $\lambda \in [0,1]$ avec $v = x - x_0$, et par la convexité de f on a

$$f(x)-f(x_0) \geq \frac{f\left(x_0+h(x-x_0)\right)-f\left(x_0\right)}{h} \geq \langle x-x_0,p\rangle \quad \forall x \in X.$$

Donc $p \in \partial f$, d'où la résultat . $\square$

Exemple 3.1. [30] Soit X un espace de Banach associé de la norme $\|.\|$, et $f : X \to \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = \|x\|$, alors

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{p \in X^* : \|p\|_{X^*} \leq 1\}, & \text{si } x = 0. \\ \{p \in X^* : \|p\|_{X^*} = 1, \langle p, x\rangle = \|x\|\}, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

En effet

Si $x = 0$, alors

$$\begin{aligned} p \in \partial f(0) &\Longleftrightarrow \|y\| - \|0\| \geq \langle y-0,p\rangle \quad \forall y \in X. \\ &\Longleftrightarrow \|y\| \geq \langle y,p\rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$\|p\|_{X^*} := \sup_{y\neq 0} \frac{\langle p,y\rangle}{\|y\|} \leq 1.$$

Si $x \neq 0$. Soit $p \in X^*$, tels que

$$\langle p,x\rangle = \|x\|_X \quad \text{et} \quad 1 = \|p\|_{X^*} = \sup_{y\neq 0} \frac{\langle p,y\rangle}{\|y\|_X}.$$

Il s'ensuit que $\frac{\langle p,y\rangle}{\|y\|_X} \leq 1$ $\forall y \in X$ i.e $\langle p,y\rangle \leq \|y\|_X$ $\forall y \in X$. Donc

$$\|y\|_X - \|x\|_X \geq \langle p,y\rangle - \langle p,x\rangle = \langle p,y-x\rangle \quad \forall y \in X$$

i.e. $p \in \partial f(x)$.

Inversement, soit $p \in \partial f(x)$ on a

$$-\|x\|_X = \|0\|_X - \|x\|_X \geq \langle p,0-x\rangle = -\langle p,x\rangle,$$

ainsi $\langle p,x\rangle \geq \|x\|$ donc $\|p\|_{X^*} \geq 1$. Mais d'autre part on a

$$\|x\|_X = \|2x\|_X - \|x\|_X \geq \langle p,2x-x\rangle = \langle p,x\rangle$$

alors $\|x\|_X = \langle p,x\rangle$. Pour $y \in X$ et $\lambda > 0$ on a

$$\|\lambda y + x\| - \|x\| \geq \langle p,\lambda y\rangle$$

i.e.

$$\|y + \frac{x}{\lambda}\| - \frac{1}{\lambda}\|x\| \geq \langle p,y\rangle \quad \forall y \in X.$$

On met λ tends vers $+\infty$, alors $\forall y \in X \quad \|y\| \geq \langle p,y\rangle$ i.e. $\|p\|_{X^*} \leq 1$. D'où $\|p\|_{X^*} = 1$.
En particulier pour $X = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$

$$\partial|x| = \begin{cases} \{-1 \leq x^* \leq 1 : |x^*|_{X^*} \leq 1\}, & \text{si } x = 0. \\ \{x^* = -1 : |x^*|_{X^*} = 1\}, & \text{si } x < 0. \\ \{x^* = 1 : |x^*|_{X^*} = 1\}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

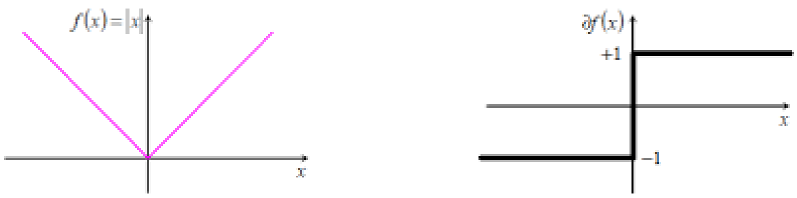

FIGURE 3.2 – Sous-différentiel de la fonction $f(x) = |x|$

Lemme 3.5. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre :*

$$x_0 \text{ est un minimum global de } f \iff 0 \in \partial f(x_0).$$

Démonstration.

$$x_0 \text{ est un minimum global de } f \iff \forall x \in X, f(x_0) + \langle x - x_0, 0\rangle \leq f(x)$$
$$\iff 0 \in \partial f(x_0).$$

Proposition 3.6. *[3] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe, et suppose que $\partial f(x) \neq 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $p \in \partial f(x)$.

ii) $\langle p,x\rangle = f(x) + f^*(p)$.

iii) $\forall x \in X,\ f(x) - \langle p,x\rangle = \inf_{y\in X}(f(y) - \langle p,y\rangle)$.

Démonstration. iii) $\Rightarrow$ i) On a $f(x) - \langle p,x\rangle = \inf_{y\in X}(f(y) - \langle p,y\rangle)$,
alors $f(x) - \langle p,x\rangle \leq f(y) - \langle p,y\rangle$.
On pose $y = x + hv$ alors

$$\begin{aligned}
f(x) - \langle p,x\rangle \leq f(x+hv) - \langle p,y\rangle &\Longleftrightarrow \langle p, -x+y\rangle \leq f(x+hv) - f(x) \\
&\Longleftrightarrow \langle p,hv\rangle \leq f(x+hv) - f(x) \quad \text{(divise par h)} \\
&\Longleftrightarrow \langle p,v\rangle \leq \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} \quad \text{(passant a la limite } h \to 0_+ \text{)} \\
&\Longleftrightarrow \langle p,v\rangle \leq Df(x_0)(v).
\end{aligned}$$

Donc $p \in \partial f(x)$.

iii) $\Rightarrow$ ii) On a

$$\begin{aligned}
f(x) - \langle p,x\rangle = \inf_{y\in X}(f(y) - \langle p,y\rangle &\Longleftrightarrow \langle p,x\rangle = f(x) - \inf_{y\in X}(f(y) \\
&\Longleftrightarrow \langle p,x\rangle = f(x) + f^*(p) \quad (\text{car } \sup -f = -\inf f).
\end{aligned}$$

i) $\Rightarrow$ iii) Comme $p \in \partial f(x)$ on a $\langle p,v\rangle \leq Df(x)(v)$, et d'après (3.1) on déduit que

$$\langle p,v\rangle \leq f(x+v) - f(x).$$

On pose $v = y - x$, alors

$$\begin{aligned}
\langle p,v\rangle \leq f(x+v) - f(x) &\Longleftrightarrow \langle p,y-x\rangle \leq f(y) - f(x) \\
&\Longleftrightarrow f(x) - p(x) \leq f(y) - p(y) \\
&\Longleftrightarrow f(x) - \langle p,x\rangle = \inf_{y\in X}(f(y) - \langle p,y\rangle) \quad \forall x \in X.
\end{aligned}$$

D'où la résultat . $\square$

Corollaire 3.7. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe, semi-continue inférieurement. Alors*

$$p \in \partial f\,(x) \Longleftrightarrow x \in \partial f^*(p).$$

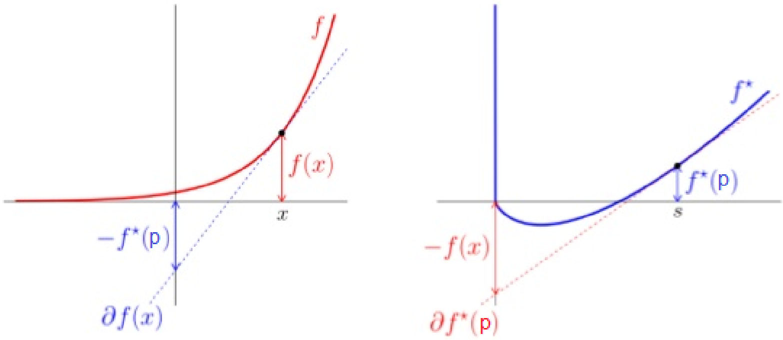

FIGURE 3.3 – La fonction convexe f et la conjuguée de Fenchel f^*

Démonstration. ($\Longrightarrow$) De la proposition précédente on a
$p \in \partial f\,(x) \Longleftrightarrow \langle p,x\rangle = f(x) + f^*(p)$ et comme $f \geq f^{**}$, alors

$$0 = f^*(p) + f(x) - \langle p,x\rangle \geq f^*(p) + f^{**}(x) - \langle p,x\rangle.$$

On a aussi d'après inégalité de Fenchel

$$0 \leq f^*(p) + f^{**}(x) - \langle p,x\rangle,$$

alors $f^*(p) + f^{**}(x) - \langle p,x\rangle = 0$.
D'où $x \in \partial f^*(p)$

($\Longleftarrow$) On a $x \in \partial g\,(p) \Longrightarrow p \in \partial g^*(x)$, posons $g(p) = f^*(p)$. Alors

$$x \in \partial f^*(p) \Longrightarrow p \in \partial f^{**}(x).$$

Comme f est convexe, semi-continue inférieurement, alors $f = f^{**}$
Donc

$$x \in \partial f^*(p) \Longrightarrow p \in \partial f(x).$$

D'où l'équivalence . $\square$

3.3 Sous-différentiels de fonctions convexes continues

Théorème 3.8. *[6] Supposons qu'une fonction convexe f est continue à l'intérieur de son domaine, alors f est dérivable à droite sur Int Dom (f) et satisfait*

$$Df(x)(u) = \limsup_{\substack{x \to x \\ h \to 0_+}} \frac{f(y+hu) - f(y)}{h}.$$

De plus, $\begin{cases} i) \ (x,u) \in \textit{Int Dom } f \times X \to Df(x)(u) \textit{ est semi-continue supérieure }. \\ ii) \ \exists c > 0 \textit{ tel que } \forall u \in X, |Df(x)(u)| \leq c\|u\|. \end{cases}$

Démonstration. Comme f est continue en x daprès l'hypothèse, donc elle est borné dans tout voisinage de x, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $x - \alpha u \in Dom(f)$ et $x + \alpha u \in Dom(f)$, daprès l'inégalités (3.1) $Df(x)(u)$ est fini. Par conséquent f est est différentiable à droite. Puisque f est continue dans un voisinage de x, il existe une constante $c > 0$ tel que

$$Df(x)(u) \leq \frac{f(x+hu) - f(x)}{h} \leq c\|u\|,$$

ce qui implique que $Df(x)(.)$ est continue et donc semi-continue inférieure.
On pose

$$D_c f(x)(u) = \limsup_{\substack{y \to x \\ h \to 0_+}} \frac{f(y+hu) - f(y)}{h}.$$

L'inégalité $Df(x)(u) \leq D_c f(x)(u)$ est claire et nous montrons que l'inégalité inverse tient. Puisque la fonction

$$(h,y) \to \frac{f(y+hu) - f(y)}{h}$$

est continue en (λ,x), il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{f(y+hu) - f(y)}{h} \leq \frac{f(x+\lambda u) - f(x)}{\lambda} + \varepsilon$$

quand $|h - \lambda| \leq \alpha$ et $\|y - x\| \leq \alpha$. Cela implique en particulier grâce au fait que $h \to \frac{(y+hu)-(y)}{h}$ est croissante, que

$$\sup_{\|y-x\| \leq \alpha} \sup_{0 < h \leq \lambda + \alpha} \frac{f(y+hu) - f(y)}{h} \leq \frac{f(x+\lambda u) - f(x)}{\lambda} + \varepsilon.$$

On prend l'infimum par rapport à λ et α, on obtient

$$D_c f(x)(u) \leq Df(x)(u) + \varepsilon.$$

Donc, il suffit de laisser ε tendre vers 0.

Enfin la fonction $(x,u) \to Df(x)(u)$ est semi-continue supérieure car elle est l'enveloppe inférieure de la fonction continue $(x,u) \to \frac{f(x+hu)-f(x)}{h}$. □

Théorème 3.9. *[6] Supposons qu'une fonction convexe f est continue à l'intérieur de son domaine. Alors*

$$\forall x \in \textit{Int Dom } (f), \partial f(x) \textit{ est non vide et borné } .$$

De plus,

$$\textit{La fonction } (x, u) \in \textit{ Int Dom } f \times X \to \sigma(\partial f(x), u) \textit{ est semi-continue supérieure } .$$

Corollaire 3.10. *Supposons qu'une fonction convexe f est continue à l'intérieur de son domaine. Alors f est gâteaux différentiable en $x \in$ Int Dom f si et seulement si $\partial f(x)$ ne contient qu'un seul point qui est le gradient de f.*

3.4 Sous-différentiels de fonctions convexes semi-continues inférieures

Théorème 3.11. *[3] Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre,convexe et semi-continue inférieurement . Alors*

1. *f est sous-différenciable sur un sous-ensemble dense du domaine de f.*
2. *Pour tous $\lambda > 0$, l'application $x \to x + \partial f(x)$ est surjective, et son inverse $J_\lambda := (1 + \lambda \partial f(\cdot))^{-1}$ est une application lipschitzienne de constante 1.*

Démonstration. 1. Nous commençons par prouver la deuxième affirmation.

Pour tous $\lambda > 0$, la solution unique $J_\lambda x$ du problème de minimisation

$$f_\lambda x = \inf_{y \in X} \left[f(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right],$$

satisfait l'inégalité

$$\forall y \in X, \quad f\left(J_\lambda x\right) - f(y) \leq \left\langle \frac{1}{\lambda}\left(x - J_\lambda x\right), J_\lambda x - y \right\rangle$$

qui dit précisément que $J_\lambda x$ est la solution unique de l'inclusion

$$x \in J_\lambda x + \lambda \partial f\left(J_\lambda x\right) = \left(1 + \lambda \partial f(\cdot)\right)\left(J_\lambda x\right).$$

Donc, $J_\lambda x$ est l'inverse de l'application $1 + \lambda \partial f(\cdot)$ et d'après la proposition (1.16) $J_\lambda x$ est lipschitzienne avec constante 1. En particulier, f est sous-différenciable en $J_\lambda x$.

2. Pour tous $x \in Dom(f)$, on va montrer que $J_\lambda x$ converge vers x. Soit $p \in Dom(f^*)$. Comme

$$\frac{1}{2\lambda}\left\|J_\lambda x - x\right\|^2 + f\left(J_\lambda x\right) = f_\lambda(x) \leq f(x),$$

et

$$-f\left(J_\lambda x\right) \leq f^*(p) - \left\langle p, J_\lambda x\right\rangle,$$

on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\lambda}\left\|J_\lambda x - x\right\|^2 &\leq f(x) + f^*(p) - \langle p, x\rangle + \langle p, x - J_\lambda x\rangle \\ &\leq \frac{1}{4\lambda}\left\|J_\lambda x - x\right\|^2 + f(x) + f^*(p) - \langle p, x\rangle + \lambda\|p\|^2\end{aligned}$$

(car $ab \leq a^2/4\lambda + b^2\lambda$). Donc, depuis que $\lambda \to 0$,

$$\left\|J_\lambda x - x\right\|^2 \leq 4\lambda\left(f(x) + f^*(p) - \langle p, x\rangle + \lambda\|p\|^2\right) \to 0.$$

par suite $J_\lambda x$ converge vers x, d'où la résultat. □

3.5 Calcul sous-différentiel

Théorème 3.12. *[6] (Règle de somme généralisée) On considère deux espaces de Hilbert X et Y, soit $A \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ un opérateur linéaire continue et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres, convexes et semi-continues inférieurement . On suppose que*

$$0 \in Int(ADom(f) - Dom(g)).$$

Alors,

$$\partial(f + g \circ A)(x) = \partial f(x) + A^* \partial g(Ax).$$

Démonstration. On va montrer que $\partial(f+g\circ A)(x) \supset \partial f(x) + A^*\partial g(Ax)$.
Soit $p \in \partial f(x) + A^*\partial g(Ax)$ i.e. $p = p_1 + A^*(p_2)$ tels que $p_1 \in \partial f(x)$ et $p_2 \in \partial g(Ax)$, alors on a :

$$f(x_0) - f(x) \geq \langle x_0 - x, p_1\rangle, \quad \forall x_0 \in X \tag{3.3}$$

et

$$g(Ax_0) - g(Ax) \geq \langle Ax_0 - Ax, p_2\rangle, \quad \forall x_0 \in X.$$

Ce dernier inégalité est équivalente à

$$(g\circ A)(x_0) - (g\circ A)(x) \geq \langle x_0 - x, A^*(p_2)\rangle, \quad \forall x_0 \in X.$$

En ajoutant cela à (3.3) donne :

$$f(x_0) + (g\circ A)(x_0) - [f(x) + (g\circ A)(x)] \geq \langle x_0 - x, p\rangle, \quad \forall x_0 \in X,$$

ce qui montre que $p \in \partial(f+g\circ A)(x)$.

Inversement montrons que $\partial(f+g\circ A)(x) \subset \partial f(x) + A^*\partial g(Ax)$. Soit $p \in \partial(f+g\circ A)(x)$. Il existe $\bar{q} \in Y^*$ tels que $(f+g\circ A)^*(p) = f^*(p - A^*\bar{q}) + g^*(\bar{q})$. D'après la proposition (3.6) ii) ,

$$\begin{aligned}\langle p, x\rangle &= f(x) + g(Ax) + (f+g\circ A)^*(p)\\ &= (f(x) + f^*(p - A^*\bar{q})) + (g(Ax) + g^*(\bar{q})).\end{aligned}$$

Donc

$$0 = (\langle p - A^*\bar{q}, x\rangle - f(x) - f^*(p - A^*\bar{q})) + (\langle \bar{q}, Ax\rangle - g(Ax) - g^*(\bar{q})).$$

Par inégalité de Fenchel chacune de ces deux expressions est négative ou nulle, il s'ensuit que $\langle p - A^*\bar{q}, x\rangle - f(x) - f^*(p - A^*\bar{q}) = 0$ et $\langle \bar{q}, Ax\rangle - g(Ax) - g^*(\bar{q}) = 0$.
D'où $\bar{q} \in \partial g(Ax)$ et $p - A^*\bar{q} \in \partial f(x)$.
Donc on a montrté que $p = p - A^*\bar{q} + A^*\bar{q} \in \partial f(x) + A^*\partial g(Ax)$. □

Corollaire 3.13. *Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions propres, convexes et semi-continues inférieurement, et si*

$$0 \in Int(Dom(f) - Dom(g)).$$

Alors,

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

Si $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement, et si* $A \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *satisfait*

$$0 \in Int(ImA - Dom(g))$$

alors

$$\partial(g \circ A)(x) = A^* \partial g(Ax).$$

Proposition 3.14. *[6] Soit* $g : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction propre convexe. On considère la fonction* $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *définie par*

$$h(y) := \inf_{x \in X} g(x, y).$$

Si $\bar{x} \in X$ *satisfait* $h(y) = g(\bar{x}, y)$*, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $q \in \partial h(y)$.

ii) $(0,q) \in \partial g(\bar{x}, y)$.

Démonstration. D'après la proposition (2.8) $h^*(q) = g^*(0,q)$, on déduit que

$$\begin{aligned} q \in \partial h(y) &\iff \langle q,y \rangle = h(y) + h^*(q) = g(\overline{x},y) + g^*(0,q) \\ &\iff (0,q) \in \partial g(\overline{x},y). \end{aligned}$$

Proposition 3.15. *[5] On considère une famille de fonctions convexes* $x \to f(x,p)$ *indexées par un paramètre* p *courant sur un ensemble* P*. Nous supposons que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{i) } P \textit{ est compact .} \\ \textit{ii) Il existe un voisinage } U \textit{ de } x \textit{ tel que pour tout } y \textit{ dans } U, \\ p \to f(y,p) \textit{ soit semi-continue supérieure .} \\ \textit{iii) } \forall p \in P, y \to f(y,p) \textit{ est continue en } x. \end{array} \right.$$

Considérons l'enveloppe supérieure k *de la fonction* $f(.,p)$*, définie par* $k(y) = \sup_{p \in P} f(y,p)$*. L'ensemble*

$$P(x) := \{p \in P \mid k(x) = f(x,p)\}.$$

Alors

$$Dk(x)(v) = \sup_{p \in P(x)} Df(x,p)(v) \tag{3.4}$$

et

$$\partial k(x) = \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{p \in P(x)} \partial f(x,p) \right).$$

Démonstration. puisque lorsque p appartient à $P(x)$, on peut écrire

$$\frac{f(x+hv,p) - f(x,p)}{h} \leq \frac{k(x+hv) - k(x)}{h},$$

en laissant h tendre vers 0 on obtient

$$\sup_{p \in P(x)} Df(x,p)(v) \leq Dk(x)(v).$$

Il faut établir l'inégalité inverse. On fixe $\varepsilon > 0$, on va montrer qu'il existe $p \in P(x)$ tel que $Dk(x)(v) - \varepsilon \leq Df(x,p)(v)$. Puisque la fonction k est convexe on sait que

$$Dk(x)(v) = \inf_{h>0} \frac{k(x+hv) - k(x)}{h}.$$

Alors, pour tous $h > 0$, l'ensemble

$$B_h := \left\{ p \in P \mid \frac{f(x+hv,p) - k(x)}{h} \geq Dk(x)(v) - \varepsilon \right\}$$

n'est pas vide. On considère le voisinage U mentionné dans l'hypothèse. Il existe $h_0 > 0$ tel que $x + hv$ appartient à U pour tous $h \leq h_0$.

Puisque $p \to f(x+hv,p)$ est semi-continue supérieure, l'ensemble B_h est fermé. D'autre part, si $h_1 \leq h_2$, alors $B_{h_1} \subset B_{h_2}$; si p appartient à B_{h_1}, la convexité de f par rapport à x implique que

$$\begin{aligned} Dk(x)(v) - \varepsilon &\leq \frac{1}{h_1} \left[\left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) (f(x,p) - k(x)) + \frac{h_1}{h_2} \left(f\left(x + h_2 v, p\right) - k(x)\right) \right] \\ &\leq \frac{1}{h_2} \left(f\left(x + h_2 v, p\right) - k(x)\right) \end{aligned}$$

puisque $x + h_1 v = \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) x + \frac{h_1}{h_2} \left(x + h_2 v\right)$ et comme $f(x,p) - k(x) \leq 0$ pour tous p.

Par conséquence, comme P est compact l'intersection $\cap_{0<h\leq h_0} B_h$ est non vide et tous les éléments $\bar{p}$ de cette intersection satisfont

$$h(Dk(x)(v) - \varepsilon) \leq f(x + hv, \bar{p}) - k(x).$$

On met h tendre vers 0, on en déduit que $f(x,\bar{p}) - k(x) \geq 0$, d'où $\bar{p} \in P(x)$.
On divise l'inégalité ci-dessus par $h > 0$, remplace $k(x)$ par $f(x,\bar{p})$ et laisse h tendre vers 0, on obtient l'inégalité

$$Dk(x)(v) - \varepsilon \leq Df(x,p)(v) \leq \sup_{p \in P(x)} Df(x,p)(v).$$

Donc, il suffit de laisser ε tendre vers 0.
Comme $y \to f(y,p)$ est continu en x, on sait que $Df(x,p)(\cdot)$ est continue pour chaque p, d'où $Dk(x)(\cdot)$ est semi-continue inférieure. L'equation (3.4) peut s'écrire

$$\sigma(\partial k(x), v) = \sup_{p \in P(x)} \sigma(\partial f(x,p), v),$$

ce qui implique daprès la proposition (2.19) chapitre 2 que

$$\partial k(x) = \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{p \in P(x)} \partial f(x,p) \right).$$

Corollaire 3.16. *Considérer n fonction convexe f_i continue en un point x, alors*

$$\partial \left(\sup_{i=1,\ldots,n} f_i \right)(x) = \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \right)$$

où $I(x) = \left\{ i = 1, \ldots, n \mid f_i(x) = \sup_{j=1,\ldots,n} f_j(x) \right\}$.

3.6 Cône Tangent et Normal

Définition 3.3. [15] Soit $K \subset X$ un sous-ensemble convexe, et soit $x \in K$. Alors le cône normal de K en x, noté $N_K(x)$ est défini comme suit

$$N_K(x) = \{p \in X^* | \langle x_0 - x, p \rangle \leq 0, \forall x_0 \in K\}.$$

Si $x \in K$, on remarque que

$$\begin{aligned} \partial \psi_K(x) &= \{p \in X^* | \psi_K(x_0) - \psi_K(x) \geq \langle x_0 - x, p \rangle, \forall x_0 \in K\} \\ &= \{p \in X^* | \langle x_0 - x, p \rangle \leq 0, \forall x_0 \in K\} \\ &= \{p \in X^* | \langle p, x \rangle = \sigma_K(p)\} \\ &= N_K(x). \end{aligned}$$

Définition 3.4. [5] Soit $K \subset X$ un sous-ensemble non vide, et soit $x \in K$. Le cône définie par

$$T_K(x) = \overline{S_K(x)}.$$

Telle que

$$S_K(x) := \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x)$$

est appelé cône tangent de K en x.

Proposition 3.17. *[5] Soit $K \subset X$ un sous-ensemble non vide convexe, et soit $x \in K$. Alors le cône normal de K en x est le cône polaire (polaire négatif) du cône tangent de K en x .*

$$\forall x \in K, \quad N_K(x) = T_K(x)^-.$$

Démonstration. Puisque $K - x \in T_K(x)$, quand $p \in T_K(x)^-$ on a $\langle p,y - x\rangle \leq 0\ \forall y \in K$, en conséquence $p \in N_K(x)$ i.e. $T_K(x)^- \subset N_K(x)$.
D'autre part, on fixe $p \in N_K(x)$, choisi $v \in T_K(x)$ et montre que $\langle p,v\rangle \leq 0$.
Soit $v \in T_K(x)$, il existe $y_n \in K$ dont $y_n \to y$ tels que $v = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}(y_n - x)$, $h_n > 0$. Comme $p \in N_K(x)$, $\langle p, y_n - x\rangle \leq 0$, donc $\langle p,v\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n}\langle p,y_n - x\rangle \leq 0$ donc $p \in T_K(x)^-$ i.e. $N_K(x) \subset T_K(x)^-$. □

Remarque 3.1. Si $x \in Int(K)$ alors,
$N_K(x) = \{0\}$ et $T_K(x) = X$ et
si $K = \{x_0\}$, alors $N_K(x_0) = X$ et $T_K(x_0) = \{0\}$.

Proposition 3.18. *[6]*

i) Si $K \subset L$ et $x \in K$, alors $T_K(x) \subset T_L(x)$ et $N_L(x) \subset N_K(x)$.

ii) Si $K_i \subset X_i (i = 1, \dots, n)$, alors

$$T_{\Pi_{i=1}^n K_i}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n T_{K_i(x_i)}.$$

$$N_{\prod_{i=1}^n K_i}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n N_{K_i(x_i)}.$$

iii) Si $B \in L(X,Y)$ alors

$$T_{B(K)}(Bx) = \overline{(BT_K(x))} \text{ and } N_{B(K)}(Bx) = B^{*-1}N_K(x).$$

iv)

$$T_{K_1+K_2}(x_1+x_2) = \overline{(T_{K_1}(x_1) + T_{K_2}(x_2))}.$$
$$N_{K_1+K_2}(x_1+x_2) = N_{K_1}(x_1) \cap N_{K_2}(x_2).$$

v) *Si* $A \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *et si* $L \subset X$ *et* $M \subset Y$ *sont des sous-ensembles fermés convexes satisfaisant* $0 \in \mathrm{Int}(A(L) - M)$, *alors*

$$T_{L\cap A^{-1}(M)}(x) = T_L(x) \cap A^{-1}T_M(Ax)$$
$$N_{L\cap A^{-1}(M)}(x) = N_L(x) + A^* N_M(Ax).$$

vi) *Si* $A \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *et si* $M \subset Y$ *est un sous-ensembles fermé convexe satisfaisant* $0 \in \mathrm{Int}(\mathrm{Im}\, A - M)$, *alors*

$$T_{A^{-1}(M)}(x) = A^{-1}T_M(Ax) \text{ and } N_{A^{-1}(M)}(x) = A^* N_M(Ax).$$

vii) *Si* k_1 *et* k_2 *deux sous-ensembles convexes fermés de* X *tels que* $0 \in Int(K_1 - K_2)$, *alors*

$$T_{K_1\cap K_2}(x) = T_{K_1}(x) \cap T_{K_2}(x).$$
$$N_{K_1\cap K_2}(x) = N_{K_1}(x) + N_{K_2}(x).$$

Remarque 3.2. [6] Il existe des relations fermées entre les cônes tangents et normaux aux sous-ensembles convexes et les dérivées droites et sous-différentiels d'une fonction convexe. D'abord le cône normal $N_K(x)$ de k en x a été défini par $N_K(x) = \partial\psi_K(x)$, aussi on peut facilement vérifier que $D\psi_K(x) = \psi_{T_K(x)}$.
De sorte que le concept de cônes normal et tangent puisse être dérivé du concept de sous-différentiel et dérivé à droite d'une fonction convexe.
Inversement, on peut aussi observer que

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{Ep}(Df(x)) = T_{\mathrm{Ep}(f)}(x, f(x)),$$

et que $p \in \partial f(x)$ si et seulement si

$$(p, -1) \in N_{\mathrm{Ep}(f)}(x, f(x)).$$

De sorte que les concepts de dérivée droite et de sous-différentiel d'une fonction convexe peuvent être dérivés du concept de cônes tangents et normaux .

Chapitre 4

Résolution de problèmes de minimisation convexes

On représente dans ce chapitre les caratérisations des solutions minimales de problèmes généraux de minimisation liés à les fonctions convexes semi-continue inférieurement, et donnons des exemples dans le cadre d'une introduction du calcul des variations et de la théorie du control optimal.

4.1 Règle de Fermat

Nous avons démontré précédemment au chapitre 2 que :

$$\bar{x} \in \partial f^*(0) \Longleftrightarrow f(\bar{x}) = \langle 0, \bar{x} \rangle - f^*(0) = \inf_{x \in X} f(x)$$

par conséquent, si la fonction f est propre, convexe et semi-continue inférieurement alors l'ensemble de solution $\bar{x}$ du problème de minimisation $-f^*(0) = \inf_{x \in X} f(x)$ est le sous-différentiel $\partial f^*(0)$ de la fonction conjuguée f^* au point 0 .
Pour exploiter ce résultat, nous utiliserons les propriétés des fonctions conjuguées et des sous-différentielles telles qu' établies ci-dessus.

On considère

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \text{Deux espaces de Hilbert} & X \text{ et } Y. \\ \text{(ii)} \quad f : X \to \overline{\mathbb{R}}, g : Y \to \overline{\mathbb{R}} & \text{deux fonctions propres, convexes et semi-continues inférieurement.} \\ \text{(iii)} \quad A \in \mathcal{L}(X,Y) & \text{un opérateur linéaire continue.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Soit $y \in Y$ et $p \in X^*$ tel que le problème de minimisation est donné par

$$h(y) = \inf_{x \in X} (f(x) - \langle p, x \rangle + g(Ax + y)),$$

le problème dual de minimisation associé est

$$e_*(p) = \inf_{q \in Y^*} \left(f^*\left(p - A^* q\right) + g^*(q) - \langle q, y \rangle\right).$$

Tels que les fonctions convexes $h : y \to h(y)$ et $e_* : p \to e_*(p)$ sont les fonctions marginales qui décrivent la variation des valeurs optimales.

Théorème 4.1. *[6]*

1. *On suppose que les conditions (4.1) sont satisfait. Si*

$$p \in \operatorname{Int}\left(\operatorname{Dom}(f^*) + A^* \operatorname{Dom}(g^*)\right),$$

alors il existe une solution $\bar{x}$ de le problème $h(y)$ et

$$h(y) + e_*(p) = 0.$$

2. *Si on suppose aussi que*

$$y \in \operatorname{Int}\left(\operatorname{Dom}(g) - A \operatorname{Dom}(f)\right), \tag{4.2}$$

alors les conditions suivantes sont équivalentes

$$\begin{cases} \textit{i)} \quad \bar{x} \textit{ est la solution de problème } h(y). \\ \textit{ii)} \quad \bar{x} \textit{ appartient au le sous-différentiel } \partial e_*(p) \textit{ de la fonction marginale } e_*. \\ \textit{iii)} \quad \bar{x} \textit{ est la solution de de l'inclusion } p \in \partial f(\bar{x}) + A^* \partial g(A\bar{x} + y). \end{cases} \tag{4.3}$$

3. *De même, l'hypothèse (4.2) implique qu'il existe une solution au problème $e_*(p)$ et les deux premières hypothèses impliquent que les conditions suivantes sont équivalentes*

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & \bar{q} \text{ est la solution de problème } e_*(p). \\ ii) & \bar{q} \text{ appartient au le sous-différentiel } \partial h(y) \text{ de la fonction marginale } h. \\ iii) & \bar{q} \text{ est la solution de de l'inclusion } y \in \partial g^*(\bar{q}) - A\partial f^*(p - A^*\bar{q}). \end{array}\right. \tag{4.4}$$

4. *Les deux premières hypothèses impliquent que les solutions $\bar{x}$ et $\bar{q}$ de les problèmes $h(y)$ et $e_*(p)$ sont des solutions du système d'inclusions*

$$\left\{\begin{array}{ll} i) & p \in \partial f(\bar{x}) + A^*\bar{q}. \\ ii) & y \in -A\bar{x} + \partial g^*(\bar{q}). \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Remarque 4.1. On appelle multiplicateur de Lagrange ou (multiplicateur de Kuhn-Tucker) le solution optimale de l'un des problèmes de minimisation $h(y)$ et $e_*(p)$. l'inclusion (4.3)(iii) est généralement appelé inclusion Euler-Lagrange et l'inclusion (4.4)(iii) est appelé l'inclusion Euler-Lagrange dual. Le système d'inclusions (4.5) est généralement appelé le système Hamiltonien .

L'application définie de $X \times Y^* \to X^* \times Y$ par $(x, q) \to (\partial f(x) + A^*q) \times (-Ax + \partial g^*(q))$ est écrit symboliquement sous forme matricielle par

$$\begin{pmatrix} \partial f & A^* \\ -A & \partial g^* \end{pmatrix}$$

et l'ensemble des solutions $(\bar{x},\bar{q})$ du problème de minimisation $h(y)$ et $e_*(p)$ écrit sous forme

$$\begin{pmatrix} \partial f & A^* \\ -A & \partial g^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix}$$

Cette notation fait ressortir clairement la dépendance de l'ensemble des solutions en fonction des paramètres $p \in X^*$ et $y \in Y$.

Démonstration.

a) L'existence des solutions des problèmes $h(y)$ et $e_*(p)$ découle de théorème de Fenchel (2.5) en remplaçant f par $x \to f(x) - \langle p,x \rangle$ et g par $z \to g(z + y)$ car en ce cas on a $V = h(y)$ et $V_* = e_*(p)$.

b) (4.3)i) $\Longleftrightarrow$ (4.3)iii)

Le problème $h(y)$ peut être écrit $h(y) = \inf_{x \in X} \varphi(C(x,y))$ tels que

$$\varphi(x,y) := f(x) - \langle p, x\rangle + g(y),$$
$$C(x,y) := (x, Ax + y),$$

et d'après l'hypothèse $y \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom}(g) - A\operatorname{Dom}(f))$ alors $(0,0) \in \operatorname{int}(\operatorname{Dom}(\varphi) - ImC)$, donc par le corrollaire (3.13) $\partial(\varphi \circ C)(x,y) = C^*\partial\varphi(C(x,y))$, alors

$$\begin{aligned}
\partial(\varphi \circ C)(x,y) &= C^*\partial\varphi(C(x,y)) \\
&= C^*((\partial f(x) - p) \times \partial g(Ax+y)) \\
&= \{(\partial f(x) - p + A^*q) \times \{q\}\}_{q \in \partial g(Ax+y)}
\end{aligned}$$

Selon La proposition (3.14), si $\bar{x}$ est la solution de le problème $h(y)$, alors $\bar{q} \in \partial h(y)$ si et seulement si $(0,\bar{q}) \in \partial(\varphi \circ C)(x,y)$ équivalent à dire si $\bar{q} \in \partial g(A\bar{x} + y)$ et $0 \in (\partial f(\bar{x}) - p + A^*\bar{q})$ par la formule précédente .

Donc si $\bar{x}$ est la solution de le problème $h(y)$, les conditions suivantes sont équivalentes

$$\begin{cases} \text{i)} \quad \bar{q} \in \partial h(y). \\ \text{ii)} \quad 0 \in (\partial f(\bar{x}) - p + A^*\bar{q}) \quad \text{et} \quad \bar{q} \in \partial g(A\bar{x} + y). \end{cases} \tag{4.6}$$

En éliminant $\bar{q}$ de ces deux inclusions, nous constatons que, on trouve

$$p \in \partial f(\bar{x}) + A^*\partial g(A\bar{x} + y). \tag{4.7}$$

Cette dernière propriété implique que

$$0 \in \partial(f(\cdot) - \langle p, \cdot\rangle + g(A(\cdot) + y))(\bar{x}) \tag{4.8}$$

ce qui montre que toute solution $\bar{x}$ de l'inclusion (4.7), est un solution de problème de minimisation $h(y)$.

Inversement, par l'hypohèse on a $y \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} g - A\operatorname{Dom} f)$ alors d'après le théorème (3.12), on déduit que tout solution de $h(y)$ qui est une solution de l'inclusion (4.8) est un solution de l'inclusion (4.7) ce dernier implique qu'il existe $\bar{q} \in \partial g(A\bar{x}+y)$ tel que $p \in \partial f(\bar{x}) + A^*\bar{q}$.

De même façon on montre l'équivalence (4.4)i) $\Longleftrightarrow$ (4.4)iii) en remplaçant f par g^*, g par f^* et A par $-A^*$.

c) Comme on a (4.6)i) $\Longleftrightarrow$ (4.6)ii), alors on déduit l'équivalence de (4.3)i) $\Longleftrightarrow$ (4.3)ii). De même en remplaçant f par g^*, g par f^* et A par $-A^*$, on trouve l'équivalence (2.4)i) $\Longleftrightarrow$ (2.4)ii) .

d) Il est claire que le système d'inclusion (4.5) est équivalent au système d'inclusion (2.3)iii) et (2.4)iii). $\square$

Corollaire 4.2. *[7] Soit X et Y deux espaces de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ opérateur linéaire continue et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonction convexe semi-continue inférieurement. Nous désignons par $J \in \mathcal{L}(Y, Y^*)$ opérateur de dualité. Nous considérons le problème de minimisation*

$$h(y) := \inf_{x \in X} (f(x) + \frac{1}{2}\|Ax\|^2)$$

Les conditions suivantes sont équivalents

$$\begin{cases} i)\ \bar{x} \in X \text{ minimise } x \to f(x) + \frac{1}{2}\|Ax\|^2 \text{ sur } X\ . \\ ii)\ \bar{x} \in X \text{ est une solution de } 0 \in A^*JA\bar{x} + \partial f(\bar{x}). \\ iii)\ \text{Les solutions } \bar{q} \in Y^* \text{ de } 0 \in \bar{q} - JA\partial f^*(-A^*\bar{q}) \text{ sont les multiplicateurs de lagrange .} \\ iv)\ \bar{x} \in X \text{ lié au multiplicateur de lagrange } \bar{q} \text{ par la relation } \bar{q} = JA\bar{x} \text{ et } -A^*\bar{q} \in \partial f(\bar{x}). \\ v)\ \text{Si nous supposons que } 0 \in Int(\mathrm{Dom}\, f^* + ImA^*) \text{ Alors les solutions } \bar{x} \in X \text{ et } \bar{q} \in Y^* \text{existent.} \end{cases}$$

Démonstration. On prend de la théorème précédent $p = 0$, $y = 0$, $g(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2$, alors $\partial g(y) = J_y$, $g^*(q) = \frac{1}{2}\|q\|_*^2$ et $\partial g^*(q) = J^{-1}$. $\square$

4.2 Problèmes de minimisation avec contraintes

On considère le problème de minimisation

$$h(y) = \inf_{x \in X} (f(x) - \langle p, x \rangle + g(Ax + y)),$$

comme le cas particulier dans lequel g est la fonction d'indicateur de $\{0\}$, on trouve le problème de minimisation suivante

$$h(y) = \inf_{Ax+y=0} (f(x) - \langle p, x \rangle),$$

qui est un problème de minimisation sous une contrainte d'égalité. Son problème dual est

$$e_*(p) = \inf_{q \in Y^*} \left(f^* \left(p - A^* q \right) - \langle q, y \rangle \right).$$

Corollaire 4.3. *[6] Si on suppose que*

$$p \in \operatorname{Int} \left(\operatorname{Dom} f^* + ImA^* \right),$$

alors il existe une solution $\bar{x}$ de le problème $h(y)$. Si en plus on suppose que

$$-y \in \operatorname{Int} \left(A \operatorname{Dom} f \right),$$

alors les solutions $\bar{x}$ de le problème $h(y)$ sont les solutions de l'inclusion

$$p \in \partial f(\bar{x}) + ImA^*, \quad A\bar{x} + y = 0$$

et l'ensemble des solutions $\bar{x}$ est le sous-différentiel $\partial e_*(p)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} i) \ \bar{q} \in \partial h(y). \\ ii) \ \bar{q} \text{ est une solution de problème } e_*(p). \\ iii) \ \bar{q} \text{ est une solution de l'inclusion } y \in -A\partial f^* \left(p - A^* \bar{q} \right). \end{cases}$$

Les solutions optimales $\bar{x}$ de problème $h(y)$ et $\bar{q}$ de problème $e_*(p)$ sont liées par la relation

$$p \in \partial f(\bar{x}) + A^* \bar{q}.$$

Soit $P \subset Y$ un cône fermé convexe et P^- son cône polaire négatif. Ils définissent une relation d'ordre telles que :
Le cône P définit la relation d'ordre $\geq$ par

$$y_1 \geq y_2 \text{ si et seulement si } y_1 - y_2 \in P,$$

et le cône P^- la relation d'ordre

$$q_1 \leq q_2 \text{ si et seulement si } q_1 - q_2 \in P^-.$$

On a le problème de minimisation suivante

$$h(y) = \inf_{Ax+y \geq 0} (f(x) - \langle p, x \rangle)$$

qui est un problème de minimisation sous une contrainte d'inégalité, est obtenu comme le cas particulier où g est la fonction d'indicateur de P. Son problème dual est

$$e_*(p) = \inf_{q \in P^-} \left(f^* \left(p - A^* q \right) - \langle q, y \rangle \right).$$

Corollaire 4.4. *[6] Si on suppose que*

$$p \in \operatorname{Int} \left(\operatorname{Dom} f^* + A^* p^- \right),$$

alors il existe une solution $\bar{x}$ de le problème $h(y)$. Si en plus on suppose que

$$y \in \operatorname{Int} \left(p - A \operatorname{Dom} f \right)$$

alors les solutions $\bar{x}$ de le problème $h(y)$ sont les solutions de l'inclusion

$$p \in \partial f(\bar{x}) + A^* N_P(A\bar{x} + y)$$

et l'ensemble des solutions $\bar{x}$ est le sous-différentiel $\partial e_*(p)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

$$\begin{cases} \text{i) } \bar{q} \in \partial h(y). \\ \text{ii) } \bar{q} \text{ est une solution de problème } e_*(p). \\ \text{iii) } \bar{q} \text{ est une solution de l'inclusion } y \in \partial \sigma_P(\bar{q}) - A \partial f^* \left(p - A^* \bar{q} \right). \end{cases}$$

Les solutions optimales $\bar{x}$ de problème $h(y)$ et $\bar{q}$ de problème $e_*(p)$ sont liées par la relation

$$\begin{cases} \text{i) } p \in \partial f(\bar{x}) + A^* \bar{q}. \\ \text{ii) } A\bar{x} + y \geq 0, \bar{q} \leq 0 \text{ et } \langle \bar{q}, A\bar{x} + y \rangle = 0. \end{cases}$$

4.3 Introduction au calcul des variations

Considérons les espaces de Hilbert V, T, $\gamma \in \mathcal{L}(\mathrm{V}, \mathrm{T})$ et H tels que

$$\begin{cases} \text{i) } \mathrm{V} \subset \mathrm{H} \\ \text{ii) } \gamma \text{ opérateur surjective.} \\ \text{iii) } \mathrm{V} \text{ et } \mathrm{V}_0 = \mathrm{Ker}\gamma \text{ sont denses dans } \mathrm{H}. \end{cases}$$

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathrm{V}, \mathrm{E})$ un opérateur linéaire continue. On suppose que H et E sont des espaces pivot.

Donnons-nous une fonction $\mathcal{F} : \mathrm{H} \times \mathrm{E} \times \mathrm{T} \longmapsto]-\infty, +\infty]$ que nous supposerons dès maintenant vérifier : $\begin{cases} \mathcal{F} \text{ est une fonction de domaine non vide convexe et} \\ \text{semi-continue inférieurement.} \end{cases}$

Les problèmes de calcul des variations se formulent sous la forme abstraite suivante :

$$v = \inf_{x \in V} \mathcal{F}(x, Ax, \gamma x).$$

Son problème dual associé est :

$$v_* = \inf_{p \in \mathrm{E}(\mathrm{A}_0^*)} \mathcal{F}^* \left(-\mathrm{A}_0^* p, p, -\beta^* p\right).$$

Où $\mathcal{F}^* : \quad \mathrm{H} \times \mathrm{E} \times \mathrm{T}^* \longmapsto]-\infty, +\infty]$ est la fonction conjuguée de $\mathcal{F}$, $\mathrm{A}_0^* : \mathrm{E}\left(\mathrm{A}_0^*\right) \to \mathrm{H}$ l'adjoint formel de A et $\beta^* : \mathrm{E}\left(\mathrm{A}_0^*\right) \to \mathrm{T}^*$ opérateur linéaire continue.

La formule de Green (1.5) et l'inégalité de Fenchel impliquent que :

$$0 \leq v + v_*. \tag{4.9}$$

Puisque :

$$\begin{aligned} 0 = [p, \mathrm{A}x] - (\mathrm{A}_0^* p, x) - \langle \beta^* p, \gamma x\rangle \leqslant & \mathcal{F}(x, \mathrm{A}x, \gamma x) \\ & + \mathcal{F}^* \left(-\mathrm{A}_0^* p, p, -\beta^* p\right) \end{aligned}$$

pour tous $x \in V$, $p \in \mathrm{E}(\mathrm{A}_0^*)$.

Définition 4.1. [4] Nous dirons que $\bar{p} \in \mathrm{E}(\mathrm{A}_0^*)$ est un multiplicateur de Lagrange si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{i) } 0 = v + v_*. \\ \text{ii) } v_* = \mathcal{F}^* \left(-\mathrm{A}_0^* \bar{p}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right). \end{cases}$$

Proposition 4.5. *[4] Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ minimise $x \to \mathcal{F}(x, Ax, \gamma x)$ et que $\bar{p}$ soit un multiplicateur de lagrange est que*

$$\{-A_0^* \bar{p}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\} \in \partial \mathcal{F}(\bar{x}, A\bar{x}, \gamma \bar{x}).$$

Démonstration. En effet, daprès la proposition (3.6) au chapitre 2 :
le triplet $\{-A_0^* \bar{p}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\} \in \partial \mathcal{F}(\bar{x}, A\bar{x}, \gamma \bar{x})$. si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}, \gamma \bar{x}) + \mathcal{F}^* \left(-\mathrm{A}_0^* \bar{p}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right) &= \left(-\mathrm{A}_0^* \bar{p}, \bar{x}\right) + [\bar{p}, \mathrm{A}\bar{x}] + \langle -\beta^* \bar{p}, \gamma \bar{x}\rangle \\ &= 0 \quad \text{(daprès la formule de Green).} \end{aligned}$$

Puisque l'inégalité (4.9) a toujours lieu, on en déduit que $\mathcal{F}(\bar{x}, A\bar{x}, \gamma\bar{x}) = \inf_x \mathcal{F}(x, Ax, \gamma x)$, $\mathcal{F}^*(-A_0^*\bar{p}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p}) = \inf_p \mathcal{F}^*(-A_0^* p, p, -\beta^* p)$ et que $v + v^* = 0$.
Inversement, si $v = \mathcal{F}(\bar{x}, A\bar{x}, \gamma\bar{x})$, $v^* = \mathcal{F}^*(-A_0^*\bar{p}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p})$ et $v + v^* = 0$, on en déduit que $\{-A_0^*\bar{p}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p}\}$ appartient à $\partial\mathcal{F}(\bar{x}, A\bar{x}, \gamma\bar{x})$. □

Définition 4.2. [4] Nous dirons que la fonction $\mathcal{H} : \mathrm{H} \times \mathrm{E} \times \mathrm{T} \longmapsto [-\infty, +\infty]$ définie par :

$$\mathcal{H}(x, p, l) = \sup_{e \in \mathrm{E}} \{[p, e] + \langle l, \varphi \rangle - \mathcal{F}(x, e, \varphi)\}$$

est le hamiltonien associé à $\mathcal{F}$.

Proposition 4.6. *[4] Une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ minimise $x \to \mathcal{F}(x, Ax, \gamma x)$ et que $\bar{p}$ soit un multiplicateur de lagrange est que*

$$\begin{cases} i)\ \{\mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}\} \in \partial_{p,l}\mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p}\right). \\ ii)\ \mathrm{A}_0^*\bar{p} \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p}\right). \end{cases}$$

Remarque 4.2. [4] Désignons par $\bar{\partial}_x\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{p})$ le sur-différentiel de $x \longmapsto \mathcal{H}(x, \bar{p})$ en $\bar{x}$, défini par

$$\bar{\partial}_x\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{p}) = -\partial_x(-\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{p})).$$

Démonstration. En effet, par définition

$$\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p}) = \sup_{e \in E}[[\bar{p}, e] + \langle -\beta^*\bar{p}, \varphi\rangle - \mathcal{F}(\bar{x}, e, \varphi)] = \langle \bar{p}, \mathrm{A}\bar{x}\rangle + \langle -\beta^*\bar{p}, \gamma\bar{x}\rangle - \mathcal{F}(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x})$$

En prenant $x = \bar{x}$, la même définition de $\mathcal{H}$ implique que

$$\mathcal{H}(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p}) - \mathcal{H}(\bar{x}, p, -\beta^* p) \leq \langle \bar{p} - p, \mathrm{A}\bar{x}\rangle + \langle -\beta^*\bar{p} + \beta^* p, \gamma\bar{x}\rangle$$

donc, $\{\mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}\} \in \partial_{p,l}\mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p}\right)$.
Puisque $\mathcal{H}(\bar{x}, ., .)$ est la fonction conjuguée de $\mathcal{F}(\bar{x}, ., .)$ cela revient à dire que

$$[\bar{p}, \mathrm{A}\bar{x}] - \langle \beta^*\bar{p}, \gamma\bar{x}\rangle = \mathcal{F}(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}) + \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p}\right).$$

Si $\{-\mathrm{A}_0^*\bar{p}, \bar{p}, -\beta^*\bar{p}\} \in \partial\mathcal{F}(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x})$ par définition :

$$\mathcal{F}(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}) - \mathcal{F}(x, e, \varphi) \leqslant (-\mathrm{A}_0^*\bar{p}, \bar{x} - x) + [\bar{p}, \mathrm{A}\bar{x} - e] - \langle \beta^*\bar{p}, \gamma\bar{x} - \varphi\rangle,$$

ce que on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned}[\bar{p}, e] + \langle -\beta^* \bar{p}, \varphi \rangle - \mathcal{F}(x, e, \varphi) &\leqslant (-\mathrm{A}_0^* \bar{p}, \bar{x} - x) + [\bar{p}, \mathrm{A}\bar{x}] - \mathcal{F}(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}) - \langle \beta^* \bar{p}, \gamma\bar{x} \rangle \\ &= (-\mathrm{A}_0^* \bar{p}, \bar{x} - x) + \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right).\end{aligned}$$

En prenant le supremum lorsque e parcourt E et φ parcourt T. On obtient

$$\mathcal{H}\left(x, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right) - \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right) \leqslant (-\mathrm{A}_0^* \bar{p}, \bar{x} - x)$$

donc $\mathrm{A}_0^* \bar{p} \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right)$.

Inversement, supposons que $\{\mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}\} \in \partial_{p,l} \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right)$ et $\mathrm{A}_0^* \bar{p} \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right)$. Comme $\{\mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}\} \in \partial_{p,l} \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right)$, alors

$$[\bar{p}, \mathrm{A}\bar{x}] + \langle -\beta^* \bar{p}, \gamma\bar{x} \rangle = \mathcal{F}(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}) + \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right).$$

Il en résult que, par la définition de $\mathcal{H}$:

$$[\bar{p}, e] - \langle \beta^* \bar{p}, \varphi \rangle \leqslant \mathcal{F}(x, e, \varphi) + \mathcal{H}\left(x, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right).$$

Puisque $\mathrm{A}_0^* \bar{p} \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right)$, nous avons :

$$\mathcal{H}\left(x, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right) - \mathcal{H}\left(\bar{x}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right) \leqslant (-\mathrm{A}_0^* \bar{p}, \bar{x} - x).$$

Ces trois dernières inégalités impliquent que :

$$\mathcal{F}(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}) - \mathcal{F}(x, e, \varphi) \leqslant (-\mathrm{A}_0^* \bar{p}, \bar{x} - x) + [\bar{p}, \mathrm{A}\bar{x} - e] + \langle -\beta^* \bar{p}, \gamma\bar{x} - \varphi \rangle$$

qui exprime que

$$\{-\mathrm{A}_0^* \bar{p}, \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\} \in \partial \mathcal{F}(\bar{x}, \mathrm{A}\bar{x}, \gamma\bar{x}),$$

et daprès la proposition précédente $\bar{x}$ minimise $x \to \mathcal{F}(x, Ax, \gamma x)$ et que $\bar{p}$ soit un multiplicateur de lagrange . □

Remarque 4.3. Dans le cas où :

$$\mathcal{F}(x, e, \varphi) = \mathcal{F}_0(x, e) + f(\varphi)$$

l'hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}(x,p,\psi)=\mathcal{H}_0(x,p)-f^*(\psi),$$

où $\mathcal{H}_0(x,p)=\sup_{e\in E}\{[p,e]-\mathcal{F}(x,e)\}$.

Les conditions de la proposition (4.5) s'ecrivent :

$$\begin{cases} \text{i) } \{-\mathrm{A}_0^*\bar{p},\bar{p}\}\in\partial\mathcal{F}_0(\bar{x},\mathrm{A}\bar{x}). \\ \text{ii) } -\beta^*\bar{p}\in\partial f(\gamma\bar{x}). \end{cases} \tag{4.10}$$

les conditions (4.10)i) sont les conditions d'Euler-Lagrange.

Les conditions de la proposition (4.6) s'ecrivent :

$$\begin{cases} \text{i) } A\bar{x}\in\partial_p\mathcal{H}_0(\bar{x},\bar{p}) \text{ et } \quad A_0^*\bar{p}\in\bar{\partial}_x\mathcal{H}_0(\bar{x},\bar{p}). \\ \text{ii) } -\beta^*\bar{p}\in\partial f(\gamma\bar{x}). \end{cases} \tag{4.11}$$

Les conditions (4.11)i) sont les conditions hamiltonienne.

Exemple 4.1. [4] Le problème de Dirichlet variationnel.

Considérons un ouvert régulier $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ de frontière Γ.

Prenons

$$\mathrm{V}=\mathrm{H}^1(\Omega),\quad \mathrm{H}=\mathrm{L}^2(\Omega),\quad \mathrm{T}=\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$$
$$\mathrm{E}=\mathrm{L}^2(\Omega)^n,\quad \gamma=\gamma_0\in\mathcal{L}\left(\mathrm{H}^1(\Omega),\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)\right)$$

l'opérateur de trace sur Γ et $A:\mathrm{H}^1(\Omega)\to\mathrm{L}^2(\Omega)^n$ donné par $A=\mathrm{grad}$. Alors $A_0^*:E(A_0^*)\to\mathrm{L}^2(\Omega)$ est $A_0^*=-\operatorname{div}$ et $\beta^*=\langle .,v\rangle$.

Considérons une fonctions $\mathcal{F}_0:\mathrm{L}^2(\Omega)\times\mathrm{L}^2(\Omega)^n\longmapsto]-\infty,+\infty]$ de domaine non vide, convexe et semi-continue inférieurement.

On définit alors le problème de Dirichlet variationnel :

$$\begin{aligned} v &= \inf_{\substack{x\in H^1(\Omega)\\ \gamma_0x=\varphi}} \mathcal{F}_0(x,\mathrm{grad}\,.x) \\ &= \inf_{x\in H^1(\Omega)}\left[\mathcal{F}_0(x,\mathrm{grad}\,.x)+\psi_{\{\varphi\}}(\gamma_0x)\right] \end{aligned}$$

où φ est donné dans $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ et $\psi_{\{\varphi\}}$ est la fonction indicatrice de $\{\varphi\}$.

On obtient alors :

$$v_*=\inf_{p\in H(\Omega,\mathrm{div}\,.)}\left\{\mathcal{F}_0^*(\mathrm{div}\cdot p,p)-\int_\Gamma\langle p,v\rangle\varphi\mathrm{d}\sigma\right\}.$$

C'est un problème de Neumann variationnel.

Le système d'Euler-Lagrange s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{i) } \{\operatorname{div} \cdot\bar{p}, \bar{p}\} \in \partial\mathcal{F}_0(\bar{x}, \ \text{grad. } \bar{x}). \\ \text{ii) } \gamma\bar{x} = \varphi. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{H}_0$ l'hamiltonien défini par :

$$\mathcal{H}_0(x,p) = \sup_{e \in \mathbf{L}^2(\Omega)^n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega p_i(\omega)e_i(\omega)\mathrm{d}\omega - \mathcal{F}_0(x,e) \right\}.$$

Le système hamiltonien s'écrit

$$\begin{cases} \text{i) } \operatorname{grad} \cdot\bar{x} \in \partial_p\mathcal{H}_0(\bar{x},\bar{p}). \\ \text{ii) } -\operatorname{div} \cdot\bar{p} \in \bar{\partial}_x\mathcal{H}_0(\bar{x},\bar{p}). \\ \text{iii) } \gamma\bar{x} = \xi. \end{cases} \tag{4.12}$$

On résult que, pour que $\bar{x}$ minimise $x \to \mathcal{F}_0(x, \operatorname{grad} x)$ et que $\bar{p}$ soit un multiplicateur de lagrange est que $\{\operatorname{div} \cdot\bar{p}, \bar{p}\} \in \partial\mathcal{F}_0(\bar{x}, \ \text{grad. } \bar{x})$, équivalente à dire $\{\bar{x}$,$\bar{p}\}$ est soit solution du système hamiltonien (4.12).

4.4 Introduction au contrôle optimal

La théorie du contrôle optimal est une branche de l'optimisation mathématique qui traite de la recherche d'un contrôle pour un système dynamique sur une période de temps telle qu'une fonction objective est optimisée. Il a de nombreuses applications à la fois en science et en ingénierie. Par exemple, le système dynamique pourrait être un engin spatial avec des commandes correspondant à des propulseurs de fusée, et l'objectif pourrait être d'atteindre la lune avec une dépense de carburant minimale. Le contrôle optimal est une extension du calcul des variations. La méthode est largement due aux travaux de **Lev Pontryagin** et **Richard Bellman** dans les années 1950, après des contributions au calcul des variations par **Edward J. McShane**. Il est un ensemble d'équations différentielles décrivant les chemins des variables de contrôle qui minimisent la fonction de coût. Il peut être dérivé en utilisant le principe maximum de Pontryagin (une condition nécessaire également connue sous le nom de principe minimum de Pontryagin ou simplement le principe de Pontryagin), ou en résolvant l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellman (une condition suffisante).

Définition 4.3. [4] On considère un espace de Hilbert U représentant l'espace des commande ou des contrôles d'un système décrit de manière abstraite par les équations : $Ax - Bu = 0$ tels que $A : V \to E$, $B : U \to E$ des opérateurs linéaires continues reliant le contrôle u à l'état x du système.
On se donne une fonction de perte ou de coût $\mathcal{F} : \mathrm{H} \times \mathrm{U} \times \mathrm{T} \longmapsto]-\infty, +\infty\rfloor$ vérifiant : $\mathcal{F}$ est convexe, semi-continue inférieurement de domaine non vide.

Les problèmes de contrôle optimal se formulent sous la forme abstraite suivante :

$$v = \inf_{Ax - Bu = 0} \mathcal{F}(x, u, \gamma x).$$

On associe à $\mathcal{F}$ son hamiltonien $\mathcal{H} : \mathrm{H} \times \mathrm{U}^* \times \mathrm{T}^* \longmapsto [-\infty, +\infty]$ défini par

$$\mathcal{H}(x, e, l) = \sup_{\substack{u \in \mathrm{U} \\ \varphi \in \mathrm{T}}} \{[e, u] + \langle l, \varphi \rangle - \mathcal{F}(x, u, \varphi)\}.$$

Nous associons au problème de contrôle optimal le problème :

$$v_* = \inf_{p \in \mathrm{E}(\mathrm{A}_0^*)} \mathcal{F}^* \left(-\mathrm{A}_0^* p, B^* p, -\beta^* p\right).$$

Nous dirons que $\bar{p} \in \mathrm{E}(\mathrm{A}_0^*)$ est un état adjoint optimal si

$$\begin{cases} \text{i) } v + v_* = 0. \\ \text{ii) } \bar{p} \text{ minimise } p \to \mathcal{F}^* \left(-\mathrm{A}_0^* p, B^* p, -\beta^* p\right). \end{cases}$$

et que $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ est solution du problème de contrôle optimal et $\bar{p}$ est un état adjoint optimal si et seulement si

$$\begin{cases} \text{i) } A\bar{x} = B\bar{u}. \\ \text{ii) } \{-A_0^* \bar{p}, B^* \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\} \in \partial \mathcal{F}(\bar{x}, \bar{u}, \gamma \bar{x}). \end{cases}$$

Ces conditions sont les conditions d'Euler-Lagrange. Ils sont équivalentes à

$$\begin{cases} \text{i) } \mathrm{A}\bar{x} = \mathrm{B}\bar{u}. \\ \text{ii) } \mathrm{A}_0^* \bar{p} \in \bar{\partial}_x \mathcal{H}\left(\bar{x}, \mathrm{B}^* \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right). \\ \text{iii) } \{\bar{u}, \gamma \bar{x}\} \in \partial_{e,l} \mathcal{H}\left(\bar{x}, \mathrm{B}^* \bar{p}, -\beta^* \bar{p}\right). \end{cases}$$

sont les conditions hamiltoniennes. Considérons plus particulièrement le cas où

$$\mathcal{F}(x,u,\varphi)=\mathcal{F}_0(x,u)+f(\varphi).$$

On en déduit que

$$\mathcal{H}(x,e,l)=\mathcal{H}_0(x,e)-f^*(l)$$

où $\mathcal{H}_0(x,e)=\sup_u\{[e,u]-\mathcal{F}_0(x,u)\}$.
Les relations précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \text{i) } \mathrm{A}\bar{x}=\mathrm{B}\bar{u}.\\ \text{ii) } \{-\mathrm{A}_0^*\bar{p},\mathrm{B}^*\bar{p}\}\in\partial\mathcal{F}_0(\bar{x},\bar{u}).\\ \text{iii) } -\beta^*\bar{p}\in\partial f(\gamma\bar{x}).\end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \text{i) } A\bar{x}=B\bar{u}.\\ \text{ii) } \mathrm{A}_0^*\bar{p}\in\bar{\partial}_x\mathcal{H}_0(\bar{x},B^*\bar{p}).\\ \text{iii) } \bar{u}\in\partial_e\mathcal{H}_0(\bar{x},B^*\bar{p}).\\ \text{iv) } -\beta^*\bar{p}\in\partial f(\gamma\bar{x}).\end{cases}\tag{4.13}$$

La condition (4.13)iii) est équivalente à

$$\bar{u}\text{ maximise }\langle\bar{p},Bu\rangle-\mathcal{F}_o(\bar{x},u).$$

Elle est connue sous le nom de principe de maximum de pontryagine.

Exemple 4.2. [4] Considérons le cas où $\Omega=]t,\mathrm{T}[$ et on prend :

$$\mathrm{V}=\mathrm{H}^1(\Omega,\mathbf{R}^n),\quad \mathrm{H}=\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbf{R}^n),\quad \mathrm{U}=\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbf{R}^p)$$
$$\mathrm{T}=\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,\quad \gamma x=\{x(t),x(\mathrm{T})\},\quad \beta^*p=\{p(t),-p(\mathrm{T})\}$$

Donnons des familles de matrices $M(.)$ appartenant à $\mathrm{C}(\Omega,\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n))$ et $B(.)$ appartenant à $\mathrm{C}(\Omega,\mathcal{L}(\mathbf{R}^p,\mathbf{R}^n))$ et une fonction $\mathcal{F}_0:\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbf{R}^n)\times\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbf{R}^p)\longmapsto]-\infty,+\infty]$ convexe, semi-continue inférieurement de domaine non vide.
Soit G un sous-ensemble convexe fermé de $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$. Le problème de contrôle optimal s'écrit :

$$v=\inf_{Ax-Bu=0}\mathcal{F}_0(x,u).$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} \text{i) } \dot{x}(\omega) - \mathrm{M}(\omega)x(\omega) = \mathrm{B}(\omega)u(\omega). \\ \text{ii) } \{x(t), x(\mathrm{T})\} \in \mathrm{G}. \end{cases} \tag{4.14}$$

où $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}x = \mathrm{D}x$.

Le système (4.14)i) décrit l'évolution du système, les conditions (4.14)ii) portent sur l'état initial $x(t)$ et à l'état final $x(\mathrm{T})$ du système.

Désignons par

$\mathrm{M} \in \mathcal{L}\left(\mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathbf{R}^n\right), \mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathbf{R}^n\right)\right)$, $\mathrm{B} \in \mathcal{L}\left(\mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathbf{R}^p\right), \mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathbf{R}^n\right)\right)$ et $A \in \mathcal{L}\left(H^1\left(\Omega, \mathbf{R}^n\right), L^2\left(\Omega, \mathbf{R}^n\right)\right)$ les opérateurs définis par $(Mx)(\omega) = M(\omega)x(\omega)$, $Bx(\omega) = B(\omega)x(\omega)$ et $Ax = \dot{x} - Mx$.

Le problème de contrôle optimal s'écrit :

$$v = \inf_{x - \mathrm{M}x = \mathrm{B}u} \left[\mathcal{F}_0(x, u) + \psi_{\mathrm{G}}(\{x(t), x(\mathrm{T})\})\right]$$

et puisque l'adjoint A_0^* de A est défini par $A_0^* p = -\dot{p} - M^* p$ où $\mathrm{M}^* p(\omega) = \mathrm{M}^*(\omega)p(\omega)$, on en déduit que :

$$v_* = \inf_{p \in H^1(\Omega, \mathbf{R}^n)} \left[\mathcal{F}_0\left(\dot{p} + M^* p, B^* p\right) + \sigma_{\mathrm{G}}(\{-p(t), p(\mathrm{T})\})\right].$$

Les conditions d'Euler-Lagrange s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \text{i) } \dot{x} - \mathrm{M}\bar{x} = \mathrm{B}\bar{u}. \\ \text{ii) } \{\bar{p} + \mathrm{M}^*\bar{p}, \mathrm{B}^*\bar{p}\} \in \partial\mathcal{F}_0(\bar{x}, \bar{u}). \\ \text{iii) } \{-\bar{p}(t), \bar{p}(\mathrm{T})\} \text{ est normal à G au point } \{\bar{x}(t), \bar{x}(\mathrm{T})\}. \end{cases}$$

On peut écrire les conditions sous forme hamiltonienne :

$$\begin{cases} \text{i) } \dot{x} - \mathrm{M}\bar{x} = \mathrm{B}\bar{u}. \\ \text{ii) } \bar{p} + \mathrm{M}^*\bar{p} \in -\bar{\partial}_x\mathcal{H}_0\left(\bar{x}, \mathrm{B}^*\bar{p}\right). \\ \text{iii) } \bar{u} \in \partial_e\mathcal{H}_0\left(\bar{x}, \mathrm{B}^*\bar{p}\right). \\ \text{iv) } \{-\bar{p}(t), \bar{p}(\mathrm{T})\} \text{ est normal à G au point } \{\bar{x}(t), \bar{x}(\mathrm{T})\}. \end{cases} \tag{4.15}$$

Alors $\{\bar{x},\bar{u}\}$ est solution du problème de contrôle optimal et $\bar{p}$ est un état adjoint optimal si et seulement si $\{\bar{x},\bar{u}\}$ vérifie cette système hamiltonienne.

La condition (4.15)iii) exprime le principe du maximum de pontryagine, à savoir que le contrôle $\bar{u}$ maximise la fonction

$$u \longmapsto \int_t^{\mathrm{T}} < \bar{p}(\omega), \mathrm{B}(\omega)u(\omega) > \mathrm{d}\omega - \mathcal{F}_0(\bar{x}, u)$$

sur $\mathrm{L}^2\left(\Omega, \mathbf{R}^p\right)$.

Conclusion et Perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié des problèmes généraux de minimisation liés aux fonctions convexes semi-continues inférieures et caractérisations des solutions minimales en utilisant les concepts et les propriétés des fonctions conjuguées et dualité et le calcul sous-différentiel.
Il y'a d'autre classe de fonctions plus large que la classe des fonctions convexes, est la classe des fonctions quasi convexes.
En perspective, dans la continuité de notre travail dans un proche avenir, nous visons à étudier comment généraliser la conjuguée et le sous-différentiel d'une fonction convexe pour une fonction quasi convexe, pour l'étude la dualité quasi convexe de problèmes d'optimisation.

Bibliographie

[1] A. A. Ahmadi. Convex and conic optimization, *Princeton university (graduate course)*, 2016.

[2] F. J. A. Artacho, J. M. Borwein, V. Martín-Márquez et L. Yao. Applications of convex analysis within mathematics. *Mathematical programming*, 148 :49-88, 7 2014.

[3] J. P. Aubin. Explicit methods of optimization. Gauthier-Villars, 1984.

[4] J. P. Aubin. Analyse fonctionnelle appliquée, tome 2. Presses Universitaire de France, 1987.

[5] J. P. Aubin. Static and dynamic issues and economic theory. part i. models based on utility functions. 1992.

[6] J. P. Aubin. Optima and equilibria : an introduction to nonlinear analysis. Springer Science and Business Media 1998.

[7] J. P. Aubin. *Applied nonlinear analysis.* Courier Corporation. 2006.

[8] V. Barbu et T. Precupanu. Convexity and optimization in banach spaces. Springer Science and Business Media 2012.

[9] J. M. Borwein. Duality and convex programming. *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, pages 257-304, 2015.

[10] P. Carr et Q. J. Zhu. Convex duality and financial mathematics. *submitted to Springer-Verlag*, Avril,2017.

[11] P. L. Combettes et H. H. Bauschke. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. New York : Springer, 2011.

[12] A. Dhara et D. Joydeep. *Optimality conditions in convex optimization : a finite dimensional view*. 2011.

[13] I. Ekeland et R. Temam. *Convex analysis and variational problems*. North-Holland Publishing Company, 1976.

[14] M. Florenzano et C. Le Van. *Finite dimensional convexity and optimization*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg Gmbh, 2001.

[15] J. B. Hiriart-Urrut et C. Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis*. Springer, 1st edition, 2001.

[16] T. Hoheisel. Topics in convex analysis in matrix space. 2019.

[17] N. Komodakis et P. Jean-Christophe. Playing with duality : an overview of recent primal-dual approaches for solving large-scale optimization problems. *Ieee signal processing magazine*, 32(6) :31-54, 12 2015.

[18] L. Li. *Selected applications of convex optimization*, volume 103. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[19] H. Moulin et F. Fogelman-Soulié. *La convexité dans les mathématiques de la décision*. Hermann, 1979.

[20] O. Nachum et B. Dai. Reinforcement learning via fenchel-rockafellar duality. *arxiv preprint arxiv :2001*.01866, 2020.

[21] C. Niculescu et L.-E. Persson. *Convex functions and their applications, second edition*. Springer, 2018.

[22] J. Peypouquet. *Convex optimization in normed spaces : theory, methods and examples*. Springer, 2015.

[23] A. Repetti, E. Chouzenoux, et J.-C. Pesquet. Un petit tutoriel sur les méthodes primales-duales proximales pour l'optimisation convexe. Septembre,2015.

[24] R. T. Rockafellar. Convex analysis. Princeton university press 1970.

[25] R. T. Rockafellar. *Conjugate duality and optimization*. Society for industrial and applied mathematics, 1987.

[26] G. Romano. New results in subdifferential calculus with applications to convex optimization. *Applied Mathematics Optimization*, 32(3) :213-234, 1995.

[27] A. Sabourin et P. Bianchi. Convex analysis. *Institut Mines-Télécom, Télécom- Paris-Tech*, Octobre,2014.

[28] B. Schmitzer. Optimization and optimal control in banach spaces. Springer, 2017.

[29] L. Vandenberghe. Conjugate functions. 2019.

[30] G. Wanka. Convex analysis. *Chemnitz University of Technology*, 2003.

[31] C. Zalinescu. *Convex analysis in general vector spaces*. World scientific publishing company, 2002.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة شروط وجود الحلول الدنيا لمشاكل التصغير العامه المتعلقة بالدوال المحدبة شبه المستمرة من الأسفل، باستخدام مفاهيم و خصائص الدوال المرافقة و الإزدواجية و حساب التفاضل الفرعي.

الكلمات المفتاحية : الحدالأدنى ، التفاضل الفرعي، الإزدواجية ، الدوال المرافقة ، شبه مستمرة من الأسفل ، الدوال المحدبة.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier de conditions d'existence des solutions minimales pour des problèmes généraux de minimisation liés à les fonctions convexes semi-continue inférieure, en utilisant les concepts et propriétés des fonctions conjuguées et dualité et le calcul sous-différentiel.

Mots clés: Minimum, Sous-différentiel, Dualité, Fonctions conjuguées, Semi-continue inférieure, Fonctions convexes.

Abstract

The aim of this memoir is to study the conditions of existence of minimal solutions for general minimization problems related to lower semi-continuous convex functions, using the concepts and properties of conjugate functions and duality and sub-differential calculus.

Key words : Minimal , Sub-differential, Duality, Conjugate functions, Lower semi-continuous, Convex functions.