Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ahmed Draia D'Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :
Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

DEMRI Nassima

Thème

Étude des Théories de Relèvement au Fibré Tangent d'une Variété

Soutenu le 20/10/ 2020 devant le jury composé de :

M. SLAMA Abdeldjalil	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Président
M. MAZOUZI Hadj	Maître de assistant A	Université d'Adrar	Rapporteur
M. DEBAGH Mohamed	Maître de assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

2019-2020

Dédicace

Je dédie cet humble travail :

A ma chère mère pour son affection , sa patience et son sacrifice **"Aicha"**.

A mon chèr père, qu'a été mon ombre durante toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à encourager , à me donner l'aide et à me protéger **"Boudjamaa"**.

A ma soeur et mes frères, chacune en son nom.

A ma grand-mère, mes tantes, mes oncles, mes cousins et cousines.

A mes familles **"DEMRI"**, **"FOUNDOU"** et **"GHOULAM"** et tout les personnes que connaissent **"Nassima"**, de près ou de loin.

N. Demri

Remerciements

Au nom de tout ceux qui se battent quotidiennement pour que la lumière du savoire ne s'éteigne jamais.

Tout d'abord, je remercie **Allah** tout puissant de m'avoir donné la volonté, la puissance et la patience pour achever ce travail.

J'adresse le grand remerciement à mon encadreur : **Mr. MAZOUZI Hadj** qui a encadré ma travail et pour sa direction et ses précieux conseils tout au long de pratique ce travail.

Je remercie, maitenant, les nombres des Jury **Mrs. Abdeldjalil SLAMA** et **Mohamed DEBAGH**.

En fin, je remercie à tout les professeurs de la faculté des science et technologie, département de mathématique et informatique et à tout personnes ayant participé de près ou loin pour l'accomplissement de ce humble travail.

Contents

Résumé

Dans ce mémoire j'ai étudie la variété différentiable à n dimension, et on introduit quelques propriétés et définitions dans cette section et la définition de variété riemannienne avec quelques définitions et des exemples .

En fin, on a étudie les théories de relèvement vertical, complet et horizontal des fonctions, champ de vecteurs, forme différentielle et champs de tenseurs de type quelconque d'une variété différentiable V au fibré tangente TV et donné quelques relations entres les trois types de relèvement .

Le but de l'étude de ce travail est de prolonger les structures géométriques (fonctions, champ de vecteurs et tenseurs de type quelconques) d'une variété différentielle au fibré tangent et aussi de donner au lecteur ou au chercheur dans ce domaine une idée pour poursuivre la recherche et étudier cette théorie et l'appliquer sur la variété riemannienne et de faire l'étude les les théories de relèvement vertical, complet et horizontal des fonctions, champ de vecteurs, forme différentielle et champs de tenseurs de type quelconque d'une variété différentiable V au fibré tangente TV au fibré cotangente d'une variété différentielle qui est le dual de fibré tangent, sachant que nombreux articles ont été publiés à propos de ce sujet.

Abstract

The goal of the study of this work is to extend the geometric structures (functions, field of vectors and tensors of any type) of a differential manifold to the tangent bundle and also to give the reader or the researcher in this field an idea for continue research and study this theory and apply it on the Riemannian manifold and to study the theories of vertical, full and horizontal lifting of functions, vector field, differential form and tensor fields of any type of a differentiable manifold V at the tangent bundle TV at the cotangent bundle of a differential variety which is the dual of tangent bundle, knowing that many articles have been published about this subject.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو توسيع الهياكل الهندسية (الدوال، الحقل الشعاعي والأشكال التفاضلية وحقول الموتر من أي نوع) من مشعب تفاضلي إلى حزمة الظل وأيضاً دراسة نظريات الرفع العمودي، الكامل والأفقي للدوال، الحقل الشعاعي والأشكال التفاضلية وحقول الموتر لأي نوع من متشعب قابل للتفاضل V في حزمة الظل TV حيث قمت اولا باعطاء بعض التعاريف والخصائص وأمثلة على الأصناف التفاضلية والأصناف الريمانية.

Notations

$\chi(V)$	l'ensemble des champs de vecteurs sur V.
$\chi^*(V)$	l'ensemble des formes différentielles sur V.
$\Im_q^P(V)$	l'ensemble des champs de tenseur de type (p, q) sur V.
$C^\infty(V)$	fonctions de classe C^∞ sur V.
$\otimes$	produit tensoriel (de vecteurs ou de formes).
$[,]$	crocher de deux champs de vecteurs.
$\mathcal{T}_{ij}^k$	composantes d'une connexion ∇ (symboles de Christoffel).
TV	le fibré tangent à V.
TTV	le fibré tangent à TV.

Introduction

L'étude de la géométrie différentielle des fibrés tangents a été lancée au début des années 1960 par E.T.DAVIES, P.DOMBROWSKI, K.Yano, S.TACHIBANA, M.OKUMURA, S. SASAKI.

S.KOBAYASHI et l'un des auteurs actuels (K.Yano et Ishihara) ont développé la théorie des relèvements verticales et completes et horizontales des champs tensoriels et des connexions aux fibrés tangents.

L'utilité des relèvements est de prolonger les structures géométriques (fonction, champ de vecteurs, tenseurs, ...etc) d'une variété différentiable au fibré tangente, de nombreux articles ont été publiés à propos de ce sujet, notre travail de voir le fibré tangente comme une variété riemannienne, il se compose comme suit :

Au premier chapitre, on donne des notions sur les variétés différentiables, et on parle à les définitions des : la différentielle d'une application, application homéomorphisme et difféomorphisme, puis la variété de rimenienne et rappelons la définition de carte et atles.Aussi, la courbe tracée sur une variété différentiable , espace tangent et cotangent et sa base, champ de vecteur et sa dérivation, application et forme différentiable sur une variété différentiable, crochet de Lie, connexion linéaire et tenseurs.

Dans le deuxiéme chapitre, on étudée du relèvement vertical des fonctions de $C^\infty(V)$, champ de vecteurs, forme différentielle et champs de tenseurs de type quelconque d'une variété différentiable V au fibré tangente TV.

Dans le troixiéme chapitre, on fait à l'étude du relèvement complet des fonctions, champ de vecteurs, forme différentielle et champs de tenseurs de type quelconque d'une variété différentiable V au fibré tangente TV.

Et dans le derniére chapitre, aussi on fait à l'étude du relèvement horizontal des fonctions, champ de vecteurs, forme différentielle et champs de tenseurs de type quelconque d'une variété différentiable V au fibré tangente TV.

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Variétés différentiables

Définition 1.1. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, et U, W deux parties ouverts ou fermés au même temps de E et F respectivement, une application $f : U \longrightarrow W$ est dite homéomorphisme si :*

(1) f est bijective.

(2) f, f^{-1} sont continues .

On dit alors U, W sont des homéomorphes.

Définition 1.2. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, et U, W deux parties ouverts ou fermés au même temps de E et F respectivement, une application $f : U \longrightarrow W$ est dite difféomorphisme si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) f est bijective .

(2) $f \in C^1(U)$.

(3) $f^{-1} \in C^1(W)$.

Si on a la condition (1) avec $f \in C^\infty(U)$ et $f^{-1} \in C^\infty(W)$, on dit que f est C^∞-difféomorphisme.

Remarque 1.1. *f difféomorphisme $\Rightarrow$ f homéomorphisme.*

La réciproque est fausse une application $f : U \longrightarrow W$ de classe C^1 peut admette une fonction inverse f^{-1} continue sans étre un difféomorphisme.
Par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est bijective et de C^1. Son inverse est $f^{-1}(y) = x^{\frac{1}{3}}$ qui est continue mais pas différentiable en 0.

Définition 1.3. *Soit V un ensemble non vide. V est dite une* ***variété topologique*** *de dimension n et de classe C^k, $k \geq 1$ si :*

(1) V est un espace topologie séparé.

(2) Pour tout $x \in V$ il existe un ouvert U de V contenant x et un homéomorphisme définie par : $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) = W \subset \mathbb{R}^n$ et de classe C^k .

- *Le couple (U, φ) est dite carte sur V .*

- *Deux cartes (U, φ) et (W, ψ) sur V sont compatibles (équivalentes) si :*

1) $U \cap W \neq \emptyset$.

2) L'application :

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \psi(U \cap W) \longrightarrow \varphi(U \cap W)$$

est difféomorphisme.

Définition 1.4. *Un atlas $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$ de dimension n de V est un ensemble de cartes de dimension n tel que*

(1) Les ouverts U_i recouvrent V c'est à dire $V = \cup_{i \in I} U_i$, $\forall i \in I$.

(2) Touts les cartes de A sont compatibles deux à deux.

On dit que deux atlas sont équivalents si leur union est un atlas, c'est à dire que

$$A = \{(U_i, \varphi_i)\} \text{ et } A' = \{w_i, \psi_i)\}$$

sont équivalentes si toutes les cartes (U_i, φ_i) et (w_i, ψ_i) sont compatibles deux à deux.

Exemple 1.1. *Soit $\mathbb{R}$ une variété topologique, soient $U =]-\infty, 1[$ et $W =]0, +\infty[$*
On définit : $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ et $\psi : W \longrightarrow \psi(W)$ par $\varphi(x) = e^x$ et $\psi(x) = x^2$
Alors $\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$ et $\psi^{-1} : \psi(W) \longrightarrow W$ par $\varphi^{-1}(y) = \ln y$ et $\psi^{-1}(y) = \sqrt{y}$
On a $U \cap W \neq \emptyset$ car $\frac{1}{2} \in U$ et $\frac{1}{2} \in W$ et $U \cup W = \mathbb{R}$.
φ et ψ sont continues et bijectives et φ^{-1}, ψ^{-1} sont aussi continues donc φ et ψ sont homéomorphismes. D'où (U, φ) et (W, ψ) sont des cartes sur $\mathbb{R}$.
L'application : $\psi \circ \varphi^{-1}(x) = (\ln x)^2$ est bijective et de classe C^1 même l'application $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1}(y) = e^{\sqrt{y}}$ est de classe C^1, donc $\psi \circ \varphi^{-1}$ est difféomorphisme.
Alors la famille $\{(]0, +\infty[, x^2), (]-\infty, 1[, e^x)\}$ est un atles sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2. *$V = E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.*
Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de E, ona $\forall x \in E, \exists$ unique $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
$A = \{(E, \varphi)\}$ est un atlas de classe C^∞.

Exemple 1.3. *$M_n(\mathbb{R})$ matrice réelles de type (n,n).*
$M_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2, alors d'aprés l'exemple (1.2) on a $A = \{(M_n(\mathbb{R}), \varphi)\}$ avec :

$\varphi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ *définie par :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$$

Exemple 1.4. *V est un espace topologique séparé muni d'un atlas de dimension n est de classe $C^k, (k \geq 1)$, W est un ouvert de V.*
$A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, alors $A_W = \{(U_i \cap W, \varphi_i/_{U_i \cap W})\}_{i\in I}$ est un atlas de W de dimension n est de classe C^k.

Définition 1.5. *On dit que V est une* ***variété différentiable*** *de classe $C^k (k \geq 1)$ si*

(1) V est une variété topologique .

(2) Il existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)_{i\in I}\}$ de V tel que $\forall i, j, U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application :

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe $C^k, (k \geq 1)$.
On dit alors que l'atlas $\{(U_i; \varphi_i)_{i\in I}\}$ est de classe C^k .

Remarque 1.2. *Structure de variété différentiable de classe C^k et de dimension n est la donnée d'un couple (V, A) où V est une variété topologique et A est un atlas.*

Remarque 1.3. *Soit V est une variété différentiable de dimension n et de classe C^k, W est un ouvert de V .*
Alors d'aprés l'exemple (1.4) W est une variété de dimension n et de classe C^k.

Exemples 1.1.
1) $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n et de classe C^∞.

2) Soit la sphére $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ est une variété différentiable de dimension 2 et de classe C^∞.
En effet, on considére les ouvertes $U_N = S^2 \setminus N$ et $U_S = S^2 \setminus S$ tels que : $N = (0,0,1)$ et $S = (0,0,-1)$
Les applications

$$\varphi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_S : U_S &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) &\longmapsto (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z})\end{aligned}$$

$\triangleright$ φ_N *est continue sur* U_N *car ses composantes sont continues sur* U_N.
$\triangleright$ φ_N *est surjective par construction* $(\varphi : U \longrightarrow \varphi(U))$.
$\triangleright$ φ_N *est injective, par définition :*
Soient $(X,Y,Z),(X^{'},Y^{'},Z^{'}) \in U_N$

$$\begin{aligned}\varphi_N(X,Y,Z) = \varphi_N(X^{'},Y^{'},Z^{'}) &\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{X}{1-Z} = \frac{X^{'}}{1-Z^{'}} \\ \frac{Y}{1-Z} = \frac{Y^{'}}{1-Z^{'}} \end{cases} ....(1)\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{X^2}{(1-Z)^2} = \frac{X^{'2}}{(1-Z^{'})^2} \\ \frac{Y^2}{(1-Z)^2} = \frac{Y^{'2}}{(1-Z^{'})^2} \end{cases} ......(2)\\ &\Longrightarrow \frac{X^2+Y^2}{(1-Z)^2} = \frac{X^{'2}+Y^{'2}}{(1-Z^{'})^2}\\ &\Longleftrightarrow \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} = \frac{1-Z'^2}{(1-Z^{'})^2}\\ &\Longleftrightarrow \frac{1+Z}{1-Z} = \frac{1+Z^{'}}{1-Z^{'}}\\ &\Longrightarrow (1+Z)\left(1-Z^{'}\right) = (1-Z)\left(1+Z^{'}\right)\\ &\Longrightarrow Z = Z^{'}\end{aligned}$$

On remplace se résultat dans (1)
on obtient :

$$\begin{cases} X = X^{'} \\ Y = Y^{'} \end{cases}$$

Alors

$$(X,Y,Z) = (X^{'},Y^{'},Z^{'})$$

Donc φ_N *est injective sur* U_N, *ainsi* φ_N *est bijective.*

$\triangleright$ $\varphi_N^{-1} : \varphi_N(U_N) \subset \mathbb{R}^2 \to U_N$; $\overrightarrow{NM_1} = \lambda\overrightarrow{NM_2}$

Avec

$$M_1 = (X,Y,Z) \ \ et \ \ M_2 = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$$

Tel que

$$\overrightarrow{NM_1} = (X, Y, Z-1), \overrightarrow{NM_2} = (\alpha_1, \alpha_2, -1)$$

$$(X, Y, Z-1) = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, -1) \Longleftrightarrow \begin{cases} X = \lambda\alpha_1 \\ Y = \lambda\alpha_2 \\ Z = 1-\lambda \end{cases} \quad ....(3)$$

On a :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

c'est à dire

$$Z \neq 1 \ \ donc \ \ \lambda \neq 0.$$

On remplace dans (3) on obtient :

$$\lambda^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + (1-\lambda)^2 = 1 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi_N^{-1} : \varphi_N(U_N) \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow U_N \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\longmapsto \left(\frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}, \frac{2\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}, \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

φ_N^{-1} est continue, donc φ_N est un homéomorphésme sur U_N.

De même manière pour φ_S, avec $SM_1 // SM_2$

$$\begin{aligned} \varphi_S^{-1} : \varphi_S(U_S) \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow U_S \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\longmapsto \left(\frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}, \frac{2\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}, \frac{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \varphi_s(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_N(U_1 \cap U_2) \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\longmapsto \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_N \left(\frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}, \frac{2\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}, \frac{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \varphi_N(U_1 \cap U_2) &\longrightarrow \varphi_S(U_1 \cap U_2)(\alpha_1, \alpha_2) \\ &\longmapsto \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi_S \left(\frac{2\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}, \frac{2\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1}, \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 1} \right) \\ &= (-\alpha_1, -\alpha_2) \end{aligned}$$

D'où $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$, $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ *sont de classe* C^∞ *car leurs composantes sont de classe* C^∞.

Donc $\{(U_N, \varphi_N),\ (U_S, \varphi_S)\}$ *est une atlas sur* S^2.

Alors S^2 *est une variété différentiable de dimension* 2 *et de classe* C^∞.

Exemple 1.5. *On peut généraliser pour*

$$S^n = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

est une variété de dimension n *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple 1.6. *Soient* V_1 *et* V_2 *deux variétés différentiables de dimension* m *et* n *et d'atlas* $\{(U_1, \varphi)\}$, $\{(U_2, \psi)\}$ *respectivement. Alors l'espace produit* V_1V_2 *est une variété de dimension* $m+n$ *dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme* $\{(U_1U_2, \varphi\psi)\}$, *où* $(\varphi\psi)(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \psi(x_2)) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

Systéme de cordonnées

Définition 1.6. *Soit* (U, φ) *une carte de la variété différentiable* V. *Pour* $x \in U$, $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ *peut s'écrire*

$$\varphi(x) = (x_1(x), x_2(x), ..., x_n(x)).$$

On appelle les coordonnées de x *dans la carte* (U, φ) *et* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *sont les application coordonnées associées à cette carte.*

1.2 Notion d'espace fibré tangente

Définition 1.7. *[4] Une courbe tracé sur une variété différentiable de dimension* n *et de classe* $C^k, (k \geq 1)$ *ou* C^∞ *est l'application* γ *de classe* $C^k, (k \geq 1)$ *ou* C^∞ *avec*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow V \quad (0 \in I)$$
$$t \longmapsto \gamma(t)$$

• *On note par :*
$C(V, \gamma) = \{$ *courbe tracé sur* V, γ *passant par* x, *tel que* $\gamma(0) = x\}$.

Définition 1.8. *Deux courbes* γ_1 *et* γ_2 *sont tangentes au point* x *où* $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ *s'il existe une carte* (U, φ) *tel que* $x \in U$ *et* $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$.

Remarque 1.4. *La définition est indépendante de la carte choisie.*
En effet : si (W, ψ) *est une autre carte en* x, *alors on a*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_1)(0) &= \frac{d}{dt}((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_1))(0) \\
&= (\frac{d}{dt}(\psi \circ \varphi^{-1}))(\varphi \circ \gamma_1)(0)[\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0)] \\
&= (\frac{d}{dt}(\psi \circ \varphi^{-1}))(\varphi \circ \gamma_2)(0)[\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)] \\
&= \frac{d}{dt}((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_2))(0) = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)(0)
\end{aligned}$$

Proposition 1.1. *[4] Soient γ_1 et γ_2 deux courbes passants par x alors :*
$\gamma_1 R \gamma_2 \Leftrightarrow \exists (U,\varphi) \in A$ *tel que* $\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{|t=0}$
est une relation d'équivalence .

Preuve. *En effet*
1) Soient $\gamma_1 \in C(V,\gamma)$ *et* (U,φ) *une carte on a :* $\gamma_1 R \gamma_1 \Leftrightarrow \exists (U,\varphi) \in A$ *tel que*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{|t=0}.$$

Alors R *est réfléxive.*
2) Soient $\gamma_1,\ \gamma_2 \in C(V,\gamma)$ *on a* $\gamma_1 R \gamma_2 \Leftrightarrow \exists (U,\varphi) \in A$ *tel que*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{|t=0}$$

et comme l'égalité est symétrique dans $\mathbb{R}^n$*, alors*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{|t=0}.$$

Donc $\gamma_2 R \gamma_1 \Rightarrow R$ *est symétrique .*
3) Soient $\gamma_1,\ \gamma_2$ *et* $\gamma_3 \in C(V,\gamma)$ *on a* $\gamma_1 R \gamma_2$ *et* $\gamma_2 R \gamma_3 \Leftrightarrow \exists (U,\varphi),(W,\psi) \in A$ *tel que :*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)_{|t=0}$$
$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_3)_{|t=0}$$

On considére que $U \cap W \neq \emptyset$ *.*
On a

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma_1)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma_2)_{|t=0}$$

.
On utilise $D(f \circ g)(x) = Df(g(x)).Dg(x)$ *alors*

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma_2)_{|t=0}$$

On pose $f = \varphi \circ \psi^{-1}$ *et* $g = \psi \circ \gamma_2$ *donc*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)_{|t=0} &= D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi \circ \gamma_2)_{|t=0}.[\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_2)_{|t=0}] \\ &= D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi \circ \gamma_3)_{|t=0}.[\frac{d}{dt}(\psi \circ \gamma_3)_{|t=0}] \\ &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma_3)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_3)_{|t=0}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow \gamma_1 R \gamma_3$
Alors R *est transitive .*
Alors R *est définie une relation d'équivalence sur l'ensemble de courbes passant par* x *et on note par :* $\gamma_1 \sim \gamma_2$ *si elles sont tangents en* x*.*

Définition 1.9. *[4] Un vecteur tangent à V en x est une classe d'équivalence de courbe tangentes en x .*

L'espace tangent *à V en x noté T_xV, est l'ensemble des vecteurs tangents à V en x définie par :*
$T_xV = \{[\gamma]$ classe d'équivalence , $\gamma \in C(V, \gamma)$, avec $\gamma(0) = x\} = C(V, \gamma)/R$ l'espace de quotion.

Remarque 1.5. *[1] T_xV est le quotient de $C(V, \gamma)$ par la relation d'équivalence défnie par $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si est seulement si $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$.*

Définition 1.10. *Soit V une variété différentiable de dimension n et de classe C^k. On définit le **fibré tangent** TV de V comme réunion disjointe de tous les espaces tangents de V c'est à dire*

$$TV = \bigcup_{x \in V} T_xV.$$

Alors TV est une variété différentiable de dimension $2n$.
Un élément de TV est un couple $(x, X(x))$ avec $x \in V$ et $X(x) \in T_xV$.
On cherche des coordonnées sur TV. Soit (U, φ) une carte locale sur V, de coordonnées (x_i). Pour $x \in U$, et $X(x) \in T_xV$, on prend comme coordonnées du couple $(x, X(x))$ les réels $(x_1(x), ..., x_i(x), X^1(x, X), ..., X^n(x, X))$ où on décompose $X(x)$ selon
$X(x) = X^i(x, X)\frac{\partial}{\partial x_i}(x) \in T_xV$. On a donc $2n$ coordonnées pour caractériser un élément de TV. Cette variété topologique est donc de dimension $2n$.

- *Il existe une application surjective particulière*

$$\pi : TV \longrightarrow V$$

définie par $\pi(x, X) = x$. C'est la projection canonique de TV sur V.
On remarque que les ouverts des cartes de TV, définies ci-dessus, sont les ouverts $\pi^{-1}(U) \subset TV$.

Commentaire[5] Soient V une variété de classe C^∞, de dimension n,

$$TV = \bigcup_{x \in V} T_xV$$

(réunion disjointe de tous les espaces tangentes à V), et

$$\begin{aligned} \pi : TV &\longrightarrow V \\ \nu &\longmapsto x \quad (\nu \in T_xV) \end{aligned}$$

Donc

- TV est une variété C^∞ de dimension $2n$.

- Pour tout $x \in V$, $\pi^{-1}(\{x\}) = T_xV \simeq \mathbb{R}^n$.

- Si $(W, \psi) \in \mathrm{atl}(V, x)$, alors la carte de trivialisation locale est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(W) &\longrightarrow W\mathbb{R}^n \\ (y, z) &\longmapsto (y, d_y\psi(z)) \end{aligned}$$

1.2.1 Application tangente linéaire

Définition 1.11. *[4] Soient* (V, A) , $(V^{'}, B)$ *deux variétés différentiables de dimension* n, m *respectivement. Une application* $f : V \longrightarrow V^{'}$ *est différentiable de classe* C^k, *si pour tout* $x \in V$, *il existe une carte* $(U, \varphi) \in A$ *de classe* C^k, *et une carte* $(U^{'}, \psi) \in B$ *de classe* C^k *tels que :* $f(U) \subset U^{'}$ *et* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ *soient de classe* C^k $(k \geq 1)$.

Définition 1.12. *Soient* V *et* $V^{'}$ *deux variétés différentiables,* $f : V \longrightarrow V^{'}$ *une application différentiable, l'application tangente linéaire de* f *en* $x \in V$ *est :*

$$\begin{aligned} df : T_xV &\longrightarrow T_{f(x)}V^{'} \\ x &\longmapsto df(x) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) \end{aligned}$$

Ou γ *est une courbe passant par* x *et* $\gamma^{'}(0) = X$.

1.3 Notion d'espace fibré cotangente

Dualité
L'espace T_xV est un espace vectoriel, il est possible de considérer son dual, qu'un note T_x^*V. C'est l'espace cotangent à V en x.

Définition 1.13. *Soit* V *une variété différentiable. On définit le fibré cotangent de* V *par*

$$T^*V = \bigcup_{x \in V} T_x^*V$$

Tel que

$$\begin{aligned} \pi : T^*V &\longrightarrow V, \\ w \in T_x^* &: \pi(x, w) = x \in V \end{aligned}$$

est la projection canonique, et une section (champs covecteurs sur V *ou une forme différentielle), une application*

$$w : V \longrightarrow T^*V$$

avec $\pi \circ w = Id$.
On note par $\chi^*(V)$ *(ou* $\Gamma^1(V), \Im_0^1(V), \Gamma^{0,1}(V)$*) l'ensemble des champs covecteurs sur* V.
Si (U, φ) *est une carte et* w *un champ covecteur sur* U, *alors il existe des fonctions*

$$w_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

Tel que

$$w = w_i dx_i, \ i = 1, ..., n$$

1.3.1 Champ de vecteurs

Définition 1.14. *Soit V une variété de classe C^k, on appelle champ de vecteur de classe C^k sur V toute application :*

$$\begin{aligned} X : V &\longrightarrow T_xV \\ x &\longmapsto X(x) = X_x \end{aligned}$$

tel que $X(x) \in T_xV$ où X_x est le vecteur tangente de V en x, pour tout $x \in V$.
On note $\chi(V)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur V.

1.3.2 Dérivation et champs de vecteurs

Définition 1.15. *Soit V une variété différentiable de dimension n.*
On considére l'ensemble $C^\infty(V) = \{f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^\infty\}$.
Une dérivation en x est une application linéaire

$$D : C^\infty(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifie pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $f, g \in C^\infty(V)$:
- $D(f+g) = D(f) + D(g)$ *(Linéarité).*
- $D(\lambda f) = \lambda D(f)$.
- $D(fg) = gD(f) + fD(g)$ *(Leibniz).*

$\star$ *Tout champs de vecteurs définit un dérivation sur $C^\infty(V)$ par la relation :*

$$(Xf)(x) = (X)(x)f \ , \ X \in \chi(V)$$

S'écrit par :

$$(Xf)(x) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

C'est la dérivée de f dans la direction de X, tel que les fonctions $X^i : V \longrightarrow \mathbb{R}$ soient de classe C^∞ sur l'ouvert de la carte locale.
Réciproquement, toute dérivation de l'algèbre $C^\infty(V)$ définit un champ de vecteurs.
Donc on identifie $\chi(V)$ aux dérivations de $C^\infty(V)$.

1.3.3 Une base des espaces tangentes et cotangentes

Soient $(x_1, x_2, ..., x_n)$ les coordonnées au voisinage de x, une base de T_xV est donné par : $\{\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\}_{1 \le i \le n}$

$$\forall x \in V, X_x \in T_xV \Rightarrow X_x = \sum_{i=1}^{n} X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i} \overset{convention}{=} X_x^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow dim \ \ T_xV = dim \ \ V = n$$

. Avec les X^i sont les fonctions coordonnées du champ de vecteur.
- $\{dx_i\}_{1 \le i \le n}$ la base de T_x^*V : est un espace dual de T_xV .

- $w(x) \in T_x^*V \Rightarrow w(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x)dx_i = w_i(x)dx_i$.
- $T_x^*V = \{\text{forme linèaire sur } T_xV\}$.
- T_xV et T_x^*V : $\mathbb{R}$-espace vectoriel tel que dim $T_xV =$ dim $T_x^*V =$ dim V .

Définition 1.16. *Soit V une varieté différentiable de dimension n. Pour tout $x \in V$*

$$T_x^{(p,q)}V = T_xV \otimes T_xV \otimes ... \otimes T_x^*V \otimes T_x^*V \otimes ...$$

l'espace des tenseurs de type (p,q) sur l'espace tangente à V en x .

Définition 1.17. *On appelle champ de tenseurs de type (p,q) sur V, une application différentiable :*

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow T^{(p,q)}V \\ x &\longmapsto T_x \in T_x^{(p,q)}V \end{aligned}$$

qui exprime une carte (U,φ) avec coordonnées locales $(x_1, x_2, ..., x_n)$ comme :

$$T = \sum_{i,j} T_{j_1,j_2,...j_q}^{i_1,i_2,...j_p} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx_{j_1} \otimes ...dx_{j_q}$$

Où $T_{j_1,j_2,...j_q}^{i_1,i_2,...j_p}$ sont des nombres réels.

- *On note $T^{(p,q)}V = \cup_{x\in V} T_x^{(p,q)}V$ L'ensemble des champ de tenseur de type (p,q) .*

(1) *Un champ de vecteurs X est un tenseur de type (1, 0) .*

(2) *Une 1- forme différentielle sur V est un tenseur de type (0, 1).*

1.3.4 Formes différentielles

Définition 1.18. *Une r-forme différentielle (ou r-forme) sur V est un champ tensoriel de type $(0,r)$ complètement antisymétrique. On note $\Omega^r(V)$ l'espace vectoriel de ces r-formes.*

Pour $r = 0$, ona $\Omega^0(V) = C^\infty(V)$.

Pour $r = 1$, on retrouve les 1-formes différentielles.

Pour $r > n$ (n dimension de V), ona $\Omega^r(V) = \{0\}$. Une r-forme différentielle est donc une application $C^\infty(V)$-multilinéaire antisymétrique de $\chi(V)...\chi(V)$ dans $C^\infty(V)$.

On note $\Omega^r(V)$ l'espace vectoriel des r-formes différentielles sur V.

1.4 Variétés Riemanniennes

Définition 1.19. *Soit V une variété différentiable. Une* ***métrique Riemannienne*** *g sur V est un champ de tenseur de type (0, 2), tel que :*

(1) *g est $C^\infty(V)$-bilinéaire .*

(2) g est définie positive : $g(X,Y) \geq 0$, $\forall X, Y \in \chi(V)$.

(3) g application symétrique : $g(X,Y) = g(Y,X)$, $\forall X, Y \in \chi(V)$.

(4) g non dégénérée : $g(X,Y) = 0$, *pour tout* $Y \in \chi(V) \Rightarrow X = 0_{\chi(V)}$.

Remarque 1.6. *Soit* $(U,\varphi) \in A$, $(U, x_1, x_2, ..., x_n)$ *système de coordonées de* X *et* $(U, \frac{\partial}{\partial x_i})$ *le repère de l'espace tangent et* dx_i *la base de l'espace dual.*

1- *Ona* $g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$, *on note* $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ *. La matrice associée à g, comme g est symétrique :* $g_{ji} = g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$.

2- *g est défnie positive c'est à dire :* $det(g_{ij}) > 0$.

3- *g est non dégénérée c'est à dire :* $det(g_{ij}) \neq 0$.

Exemple 1.7. *Sur* $V = \mathbb{R}^3$, *on pose*

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

La matrice associe à g est :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- *g est bilinéaire. car : soient* X_1, X_2, Y_1, $Y_2 \in \chi(V)$, *et* $f, h \in C^\infty(V)$

$$\begin{aligned} g(fX_1 + hX_2, Y) &= (dx)^2(fX_1 + hX_2, Y) + (dy)^2(fX_1 + hX_2, Y) + (dz)^2(fX_1 + hX_2, Y) \\ &= (dx)(fX_1 + hX_2)(dx)(Y) + (dy)(fX_1 + hX_2)(dy)(Y) \\ &+ (dz)(fX_1 + hX_2)(dz)(Y) \\ &= fdx(X_1)dx(Y) + hdx(X_2)dx(Y) + fdy(X_1)dy(Y) + hdy(X_2)dy(Y) \\ &+ fdz(X_1)dz(Y) + hdz(X_2)dz(Y) \\ &= fg(X_1, Y) + hg(X_2, Y). \end{aligned}$$

D'autre parte

$$\begin{aligned} g(X, fY_1 + hY_2) &= (dx)^2(X, fY_1 + hY_2) + (dy)^2(X, fY_1 + hY_2) + (dz)^2(X, fY_1 + hY_2) \\ &= fg(X, Y_1) + hg(X, Y_2). \end{aligned}$$

2- $det(g_{ij}) = 1 \neq 0$ *alors g est non dégénérée.*

3- g est symétrique.

4- $det(g_{ij}) = 1 > 0$ alors g est définie positive.

Donc g est une métrique Riemannienne sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple 1.8. *Soit $g = x^2(dx)^2 + x(dy)^2 + (dz)^2$. Est-elle métrique riemannienne ?. En effet, la matrice associe à g est :*

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) g est bilinéaire.

(2) g est non dégénérée .

(3) g est symétrique.

(4) $det(g_{ij}) = x^3 > 0$ si $x > 0$ donc g est définie positive si $x > 0$.

Alors g est une métrique riemannienne si et seulement si $x > 0$.

Définition 1.20. *On appelle **variété riemannienne** tout variété différentiable muni d'une métrique riemannienne.*

Remarque 1.7. $(\mathbb{R}^3, g)$, *$\mathbb{R}^3$ muni de la métrique $g = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ est une variété riemannienne.*

1.4.1 Connexion sur une variété différentiable.

Définition 1.21. *[7] Une connexion linéaire sur V (V est une variété différentiable) est une application*

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(V)\chi(V) &\longrightarrow \chi(V) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tels ques pour tous $X, Y, Z \in \chi(V)$ et $f \in C^\infty(V)$ on a

(1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.

(2) $\nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$.

(3) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

(4) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$.

$\nabla_X Y$ *est appelée dérivation covariante du champ de vecteur* Y *dans la direction du vecteur tangent* X.

Définition 1.22. *[5] Soient* ∇ *une connexion sur une variété* V *de dimension* n *et* $(\partial_1, ..., \partial_n)$ *(resp* $(dx_1, ..., dx_n)$*) une base locale de section de* $\chi(V)$ *(resp* $\chi^*(V)$*). On définit les coefficients de Christoffel par*

$$\mathcal{T}_{ij}^k = dx_k(\nabla_{\partial_i}\partial_j).$$

1.4.2 Crochet de Lie

Définition 1.23. *[7] Soit* V *une variété différentiable, le crochet de Lie noté* $[,]$ *est définie par*

$$[X,Y] : C^\infty(V) \longrightarrow C^\infty(V)$$

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \forall X, Y \in \chi(V), et\ f \in C^\infty(V).$$

Théorème 1.1. *[7] Si* X*,* Y*, et* $Z \in \chi(V)$*, et* f*,* $g \in C^\infty(V)$ *alors*

1- Le crochet de Lie est bilinèaire.

2- antisymétrique (c'est à dire : $[X,Y] = -[Y,X]$*) .*

3- $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

4- $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ *(l'identité de Jacobi).*

4- $[X,Y] = 0$*, on dit que les deux champs de vecteurs commutent.*

Remarques 1.1. *[7]*

- *Si* X *et* Y *sont de classe* C^k*, alors* $[X,Y]$ *est de classe* C^{k-1}.

- *L'expresion locale de crochet de Lie est :*

$$[X,Y] = (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Tel que $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *et* $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

- $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}](f) = (\frac{\partial (f \circ \varphi_i^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial (f \circ \varphi_j^{-1})}{\partial x_j} \circ \varphi_j) - \frac{\partial (f \circ \varphi_i^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial (f \circ \varphi_j^{-1})}{\partial x_j} \circ \varphi_j)) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0.$

1.4.3 Tenseur de torsion

Définition 1.24. *[5] Soit V une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire sur V. Le tenseur de torsion associé à ∇ est une application vectoriel $C^\infty(V)$-bilinéaire définie par*

$$\begin{aligned} T : \chi(V)\chi(V) &\longrightarrow \chi(V) \\ (X,Y) &\longmapsto T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

pour tous X, $Y \in \chi(V)$.

La connexion ∇ est dite sans torsion si $T \equiv 0$.

Remarques 1.2. *[5]*

1. *T est un champ de tenseur de type (1, 2).*

2. *$T(X,Y) = -T(Y,X)$ pour tout X, $Y \in \chi(V)$ (T est antisymétrique).*

3. *La connexion ∇ est sans torsion si et seulement si pour tout X, $Y \in \chi(V)$ on a*

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Exemple 1.9. *[5] Une connexion linéaire ∇ sur V est une connexion linéaire sur le fibré tangent (TV, π, V).*

Dans un système de coordonnées (x_i) sur V, ∇ est complètement définie par les symboles de Christoffel $\mathcal{T}_{ij}^k$ définis par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \mathcal{T}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

En effet, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, alors

$$\nabla_X Y = X^i (\frac{\partial}{\partial x_i} Y^k + \mathcal{T}_{ij}^k Y^j) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

1.4.4 Tenseur de courbure

Définition 1.25. *[5] Soit V une variété muni d' une connexion linéaire ∇. On définit le tenseur de courbure, $R : \chi(V)\chi(V)\chi(V) \longrightarrow \chi(V)$, associé à ∇ par :*

$$R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Pour tous X, Y, $Z \in \chi(V)$.

Propriétés 1.1. *[5]*

1- La courbure R est $C^\infty(V)$-3 linéaire.

2- $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$, pour tous X, Y et $Z \in \chi(V)$ (antisymétrie).

Définition 1.26. *[5] Soit $X \in \chi(V)$ un champ de vecteurs sur une variété riemannienne (V,g), on a*

$$\begin{aligned} \nabla X : \chi(V) &\longrightarrow \chi(V) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z X \end{aligned}$$

est une application $C^\infty(V)$ linéaire (∇X est un tenseur de type (1,1)).

Définition 1.27. *[5] Soit $w \in \chi^*(V)$ une 1-forme sur une variété riemannienne (V,g), on a*

$$\begin{aligned} \nabla w : \chi(V) &\longrightarrow \chi^*(V) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z w \end{aligned}$$

est une application $C^\infty(V)$ linéaire (∇w est un tenseur de type (0,2)).

Chapitre 2

Relèvement vertical

Théorie des Relèvements

Soit V une variété de dimension n et de classe C^∞, soit T_xV son espace tangent au point x de V, notons $TV = \bigcup_{x\in V} T_xV$ le fibré tangent de la variété V.
Pour tout point $\bar{x}$ de T_xV l'application $\pi : \bar{x} \longrightarrow x$ détermine la projection du fibré, d'où $\pi : TV \longrightarrow V$ définit la structure de TV au dessous de V. Si U est un ouvert de V alors $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de TV et tout $\bar{x} \in TV$ les coordonnées locales sont $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$.
Pour tous cartes (U, x_i) dans V alors on a la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_i)$ sur TV.

2.1 Relèvement vertical d'une fonction

Définition 2.1. *[5] Soit (TV, π, V) le fibré vectoriel tangent, si $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, on définit le relèvement vertical de la fonction f noté f^V par*

$$f^V = f \circ \pi : TV \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Remarque 2.1. *[5] Si $\bar{x} \in \pi^{-1}(U)$ a pour coordonnées locales $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ alors*

$$f^V(\bar{x}) = f^V(x, y) = f \circ \pi(\bar{x}) = f(x) \tag{2.2}$$

donc $f^V(\bar{x})$ est constante sur tout fibré T_xV.

Proposition 2.1. *[5] Pour toutes $f, g \in C^\infty(V)$ on a*

$$(fg)^V = f^V g^V \tag{2.3}$$

Preuve. *Soient f, $g \in C^\infty(V)$ et $\bar{x} \in T_xV$ on a*

$$(fg)^V(\bar{x}) = (fg)\circ\pi(\bar{x}) = (fg)(\pi(\bar{x})) = f(\pi(\bar{x}))g(\pi(\bar{x})) = f\circ\pi(\bar{x})g\circ\pi(\bar{x}) = f(x)g(x) = f^V g^V$$

Notation :[5] Soit V une variété de dimension n, on note

$$i : \chi^*(V) \longrightarrow C^\infty(TV)$$
$$w \longmapsto iw$$

L'application définie par

$$\begin{aligned} iw : TV &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,v) &\longmapsto w_x(v) \end{aligned}$$

tel que i est une application $C^\infty(V)$-linéaire .
Localement, on a

$$iw(x,v) = w_i(x)y_i \tag{2.4}$$

où $w = w_i dx_i$ et $v = y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Proposition 2.2. *[5] Soient $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ deux champs vectoriels dans TV, alors $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$ si et seulement si pour tout $w \in \chi^*(V)$, on a*

$$\widetilde{X}(iw) = \widetilde{Y}(iw).$$

Preuve. *[5] Pour montrer que $(\widetilde{X} - \widetilde{Y})(iw) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{X} - \widetilde{Y} = 0$, il suffit de démontrer que si $\widetilde{X}(iw) = 0$, pour toute $w \in \chi^*(V)$, alors $\widetilde{X} = 0$.*
Localement si

$$\widetilde{X} = A^i \frac{\partial}{\partial x_i} + B^i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

On a

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(iw) &= A^i \frac{\partial (w_j y_j)}{\partial x_i} + B^i \frac{\partial (w_i y_i)}{\partial y_i} \\ &= A^i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} y_j + B^i w_i \end{aligned}$$

d'où $\widetilde{X}(iw) = 0$, pour toute $w \in \chi^*(V)$ si et seulement si $A^i = B^i = 0$, $\forall i = 1, ..., n$.

Remarque 2.2. *[5] Si $f \in C^\infty(V)$ et $\widetilde{X} \in \chi(TV)$, alors localement on a :*

$$i(df)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) y_i \tag{2.5}$$

$$\widetilde{X}(i(df)) = A^i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} y_j + B^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{2.6}$$

Où $\widetilde{X} = A^i \frac{\partial}{\partial x_i} + B^i \frac{\partial}{\partial y_i}$

De la Remarque (2.2), on déduit :

Proposition 2.3. *[5] Soient $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \chi(TV)$; Alors $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$ si et seulement si pour toute $f \in C^\infty(V)$ on a :*

$$\widetilde{X}(i(df)) = \widetilde{Y}(i(df))$$

Définition 2.2. *[5] Soit $X \in \chi(V)$ un champ de vecteur sur V. On défint les applications suivantes*

$$\xi : \Im^p_q(V) \longrightarrow \Im^p_{q-1}(TV)$$
$$F \longmapsto \xi(F)$$

$$\xi_X : \Im^p_q(V) \longrightarrow \Im^p_{q-1}(TV)$$
$$F \longmapsto \xi_X(F)$$

par

$$\xi(F) = F^{i_1,i_2,..j_p}_{j_1,j_2,..j_q} y_{j_1} \frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial y_{i_p}} \otimes dx_{j_2} \otimes ... \otimes dx_{j_q}$$

$$\xi_X(F) = F^{i_1,i_2,..j_p}_{j_1,j_2,..j_q} X^{j_1} \frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial y_{i_p}} \otimes dx_{j_2} \otimes ... \otimes dx_{j_q}$$

où $q \geq 1, \quad F = F^{i_1,i_2,..j_p}_{j_1,j_2,..j_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx_{j_1} \otimes ... \otimes dx_{j_q}$ *et* $X = X^h \frac{\partial}{\partial x_h}$.

Propriétés 2.1. *[5]*

(1) La définition 2.2 est indépendante de la carte choisie .

(2) Si F est un champ de tenseurs de type (1, 1) sur la variété V, alors $\xi(F)$ (resp $\xi_X(F)$)est un champ de vecteurs sur TV, tel que :

$$\xi(F) = F^i_j y_j \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad resp \qquad \xi_X(F) = F^i_j X^j \frac{\partial}{\partial y_i}$$

où $F = F^i_j \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j$ *et* $X = X^j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

(3) Si $G \in \chi^*(V)$ est une 1-forme sur la variété V, alors $\xi(G) = iG$ (resp $\xi_X(G) = G(X) \circ \pi$) est une fonction de classe C^∞ sur TV.

(4) Si $f \in C^\infty(V)$ et $X \in \chi(V)$, on pose : $\xi(f) = \xi_X(f) = 0$.

(5) Si ∇ est une connexion linéaire sur la variété V et $f \in C^\infty(V)$, alors

$$\nabla f = df,\ \xi(\nabla f) = \xi(df) = idf.$$

2.2 Relèvement vertical d'un champ de vecteurs

Définition 2.3. *[5] Un champ de vecteurs $\widetilde{X} \in \chi(TV)$ est dit vertical si et seulement si pour toute fonction $f \in C^\infty(V)$ on a*

$$\widetilde{X} f^V = 0.$$

Si $\begin{pmatrix} \widetilde{X}^i \\ \widetilde{X}^j \end{pmatrix}$ sont les composantes de $\widetilde{X}$ par rapport à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_i)$ sur TV, alors pour toute fonction $f \in C^\infty(V)$ on a

$$\widetilde{X} f^V = \widetilde{X}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

d'où $\widetilde{X}^i = 0$ c'est à dire

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}^i \\ \widetilde{X}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{X}^j \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Définition 2.4. *[3] Soit $X \in \chi(V)$. Le relèvement vertical de X noté X^V de V au fibré TV est definit par*

$$X^V(iw) = (w(X))^V \tag{2.8}$$

Pour toute $w \in \chi^*(V)$.

Soient $(X^i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(w_k)_{k=1,\ldots,n}$ les composantes de $X \in \chi(V)$ et $w \in \chi^*(V)$ par rapport à une carte (U, x_k) sur V ; Si $\begin{pmatrix} \widetilde{X}^i \\ \widetilde{X}^j \end{pmatrix}$ sont les composantes de X^V par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_i)$ sur TV. Alors de la relation (2.8) on déduit l'equation

$$\widetilde{X}^i (\frac{\partial}{\partial x_i} w_k) y_k + \widetilde{X}^j w_i = w_i X^i,$$

d'où

$$\widetilde{X}^i = 0, \quad \widetilde{X}^j = X^i.$$

pour tous $i, j = 1, ..., n$

Proposition 2.4. *[2] Soit X un champ de vecteurs de composantes $(X^i)_{i=1,\ldots,n}$ relativement à une carte $(U, x_i)_i$ sur V. Le relévement verticale X^V de X a pour composantes*

$$X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_i)$ sur TV.

Remarque 2.3. *[2] Le relévement vertical X^V de X au fibré TV est un champ de vecteurs vertical et on a*

$$X^V f^V = 0 \tag{2.10}$$

Pour tous $X \in \chi(V)$ et $f \in C^\infty(V)$.

Propriétés 2.2. *[2]*

$$(X+Y)^V = X^V + Y^V \tag{2.11}$$

$$(fX)^V = f^V X^V \tag{2.12}$$

Pour tous X,$Y \in \chi(V)$ *et* $f \in C^\infty(V)$.

Preuve. *Soient* X, $Y \in \chi(V)$ *de composantes* $(X^i)_{i=1,\dots,n}$, $(Y^i)_{i=1,\dots,n}$ *(respectivement) et* $f \in C^\infty(V)$ *on a*

- $(X+Y)^V = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i + Y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y^i \end{pmatrix} = X^V + Y^V$
- *Il suffit de montre que* $(fX)^V = \begin{pmatrix} 0 \\ fX^i \end{pmatrix} = f^V \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix} = f^V X^V$.

Soit $\bar{x} \in \pi^{-1}(U)$ *alors on a*

$$(f^V X^V)(\bar{x}) = f^V(\bar{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix} (\bar{x}) = f(x) \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix} (\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x)X^i \end{pmatrix} (\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ fX^i \end{pmatrix} (\bar{x}) = (fX)^V(\bar{x}).$$

Proposition 2.5. *[3] Pour tous* X, Y *arbitraire de* $\chi(V)$ *et* $F \in \Im_1^1(V)$ *on a*

$$[X^V, Y^V] = 0.$$
$$[X^V, \xi F] = \xi_X F.$$

Preuve. *[5]*

- *Soit* w *une forme arbitraire en* V. *Alors compte tenu de (2.8) et (2.10) on a*

$$\begin{aligned} [X^V, Y^V](iw) &= X^V(Y^V(iw)) - Y^V(X^V(iw)) \\ &= X^V(w(Y))^V - Y^V(w(X))^V \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $[X^V, \xi F] = [X^i \dfrac{\partial}{\partial y_i}, y_j F_j^s \dfrac{\partial}{\partial y_s}] = X^i F_i^s \dfrac{\partial}{\partial y_s} = \xi_X F.$

Remarque 2.4. *[3] On voit à partir de (2.9) que la correspondance* $X \longmapsto X^V$ *détermine un isomorphisme linéaire de* $\chi(V)$ *en* $\chi(TV)$ *par rapport à des coefficients constants.*

De (2.9) on trouve dans chaque ensemble ouvert $\pi^{-1}(U)$

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^V = \left(\tfrac{\partial}{\partial y_i}\right) \tag{2.13}$$

par rapport à les coordonnées induites dans TV.

2.3 Relèvement vertical d'une 1-forme

Définition 2.5. *[2] Une 1-forme $\widetilde{w} \in \chi^*(TV)$ sur TV est dite verticale si*

$$\widetilde{w}(X^V) = 0 \tag{2.14}$$

pour tout $X \in \chi(V)$.

Localement, si $(\widetilde{w}_i, \widetilde{w}_j)$ désignent les composantes de $\widetilde{w}$ par rapport à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_i)$ sur TV. Alors de la formule (2.14), on obtient

$$\widetilde{w}(X^V) = \widetilde{w}_j X^i = 0$$

Pour tout $X \in \chi(V)$, d'où $\forall j = 1, ..., n$ on a $\widetilde{w}_j = 0$, c'est à dire

$$(\widetilde{w}_i, \widetilde{w}_j) = (\widetilde{w}_i, 0) \quad \forall i, j = 1, ..., n. \tag{2.15}$$

Proposition 2.6. *[5] Si $f \in C^\infty(V)$ est une fonction de classe C^∞ sur V, alors $d(f^V)$ est une 1-forme verticale sur le fibré tangent TV.*

Preuve. *[5] De la relation (2.10), on a :*

$$d(f^V)(X^V) = X^V(f^V) = 0$$

Pour tout $X \in \chi(V)$.

Définition 2.6. *[2] Soit $f, g \in C^\infty(V)$. On définit le relèvement vertical $d(f)^V$ (resp $(gdf)^V$) au fibré TV, de la 1-forme df (resp gdf) par*

$$(df)^V = d(f)^V, \tag{2.16}$$

resp

$$(gdf)^V = g^V(df)^V = g^V d(f^V). \tag{2.17}$$

Remarque 2.5. *[2] La définition (2.6) reste compatible avec la propriété de la dérivation*

$$d((fg)^V) = d(f^V.g^V) = g^V.d(f^V) + f^V.d(g^V) = (d(fg))^V.$$

Définition 2.7. *[3] Soit $w \in \chi^*(V)$. Le relèvement vertical w^V de la 1-forme w est définit par*

$$w^V = (w_i)^V(dx_i)^V \tag{2.18}$$

où $w = w_i dx_i$, relativement à une carte (U, x_i) sur V.

Cette définition est independante de la carte choisie, en tenant compte que si $(dx_i)_i$ est une base locale de $\chi^*(V)$, elle induit alors $(dx_i, dy_j)_{i,j}$ une base locale de $\chi^*(TV)$.

Remarque 2.6. *[3] De (2.14), (2.16) et (2.17), on voit facilement que le relèvement vertical w^V de la 1-forme w avec l'expression locale $w = w_i dx_i$ a des composantes de la forme*

$$w^V : (w_i, 0) \tag{2.19}$$

Par rapport aux coordonnées induites dans TV. Ainsi le relèvement vertical w^V de w au fibré TV est une 1-forme vertical dans TV.

Par conséquent, nous avons de (2.9), (2.19)

$$w^V(X^V) = 0, \tag{2.20}$$

Pour tous $w \in \chi^*(V)$ et $X \in \chi(V)$.

Propriétés 2.3. *[2] On a pour toutes $w, \theta \in \chi^*(V)$ et $f \in C^\infty(V)$*

$$(w+\theta)^V = w^V + \theta^V. \tag{2.21}$$

$$(fw)^V = f^V w^V. \tag{2.22}$$

Preuve. *Soient $w, \theta \in \chi^*(V)$, $\bar{x} \in \pi^{-1}(U)$ et $f \in C^\infty(V)$ on a*

- $w^V + \theta^V = (w_i, 0) + (\theta_i, 0) = (w_i + \theta_i, 0) = (w+\theta)^V.$
- $(f^V w^V)(\bar{x}) = f(x)(w_i, 0)(\bar{x}) = (f(x)w_i, 0)(\bar{x}) = (fw)^V(\bar{x}).$

Remarque 2.7. *[2] Si (U, x_i) est une carte sur la variété V, alors de la formule (2.19) on obtient*

$$(dx_i)^V = dx_i. \tag{2.23}$$

Par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_i)$ sur TV.

2.4 Relèvement vertical d'un champ de tenseurs

[5] Soient P, Q, R, $S \in \Im_q^p(V)$ des champs de tenseurs alors

$$\begin{aligned} (P \otimes Q)^V = &\quad P^V \otimes Q^V \\ (R+S)^V = &\quad R^V + S^V \end{aligned} \tag{2.24}$$

[5] Si $F \in \Im_1^1(V)$ est un tenseur de type (1, 1), avec des composantes locales F_j^i tel que $F = F_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j$ relativement à une carte (U, x_i) sur V, alors de (2.2), (2.13), (2.23) et (2.24) nous avons :

$$\begin{aligned} F^V &= (F_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j)^V \\ &= (F_j^i)^V (\frac{\partial}{\partial x_i})^V \otimes (dx_j)^V \\ &= (F_j^i)^V \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes dx_j \end{aligned}$$

D'où F^V à pour composante

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_j^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

De même si $G \in \Im_2^0(V)$ tel que $G = G_{jk} dx_j \otimes dx_k$ et $H \in \Im_0^2(V)$ tel que $H = H^{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_k}$ Alors

$$\begin{pmatrix} G_{jk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{ik} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_i)$ sur TV.

Remarque 2.8. *[3] Pour tous $X \in \chi^(V)$ et $F \in \Im_1^1(V)$ on a*

$$F^V X^V = 0.$$

Preuve. *On utilisé les formules 2.25, 2.9 on obtient la résultate.*

Proposition 2.7. *[2] Pour toute $w \in \chi^*(V)$ on a*

$$dw^V = (dw)^V \tag{2.28}$$

Preuve. *[2] Si $w = w_i dx_i$ par rapport à la carte (U, x_i) sur V, alors*

$$w^V = (w_i dx_i)^V = w_i dx_i$$

$$\begin{aligned} dw^V &= \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i}) dx_i \otimes dx_j, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (dw)^V &= (d(w_i) \wedge dx_i)^V \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i}) dx_i \otimes dx_j. \end{aligned}$$

Relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_i)$, $d(w^V)$ a pour composantes :

$$d(w^V) : \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i}) dx_i \otimes dx_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.8. *[2] Soit $F \in \Im_1^1(V)$ un champ de tenseurs de type (1,1) sur la variété V, alors*

$$\begin{aligned} F^V : TV &\longrightarrow TTV \\ (x, u) &\longmapsto F^V(x, u) = F^V_{(x,u)}(u^V) \end{aligned}$$

est un champ de vecteurs sur TV.
Relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_j)$, et on a

$$F^V = y_i F_i^j \frac{\partial}{\partial y_j} = y_i(F(\frac{\partial}{\partial x_i}))^V = \xi(F).$$

Chapitre 3

Relèvement complet

3.1 Relèvement complet d'une fonction

Définition 3.1. *[2] Soit f une fonction de V. On définit le relèvement complet de f et on note f^C de V au fibré TV par*

$$f^C = i(df) \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} f^C = i(df) = df : TV &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto df(v) \end{aligned}$$

Relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_i)$ sur TV, on a

$$f^C = y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial f$$

Proposition 3.1. *[2] Soient $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ deux champs de vecteurs sur TV tel que*

$$\widetilde{X} f^C = \widetilde{Y} f^C$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(V)$, alors $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$.

Preuve. *[2] En vertu de linèrité il suffit de prouver que si $\widetilde{X}(f^C) = 0$*
$\forall f \in C^\infty(V)$, alors $\widetilde{X} = 0$.
Soit $\widetilde{X} = \widetilde{X}^h \frac{\partial}{\partial x_h} + \widetilde{X}^k \frac{\partial}{\partial y_k}$ par rapport à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x_h, y_k)$ sur TV on a

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(f^C) &= \widetilde{X}^h \frac{\partial}{\partial x_h}(y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}) + \widetilde{X}^k \frac{\partial}{\partial y_k}(y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}) \\ &= \widetilde{X}^h (\frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_i}) y_i + \widetilde{X}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0. \end{aligned}$$

Pour toute $f \in C^\infty(V)$, d'où ($\forall h, k = 1, ..., n$) on a $\widetilde{X}^h = \widetilde{X}^k = 0$.

Propriétés 3.1. *[5] Soient* $X \in \chi(V)$, $F \in \Im_1^1(V)$ *et* $g, f \in C^\infty(V)$ *on a*

$$X^V(f^C) = (X(f))^V. \tag{3.2}$$

$$(gf)^C = g^C f^V + g^V f^C. \tag{3.3}$$

$$(g+f)^C = g^C + f^C. \tag{3.4}$$

$$(\xi F)(f^C) = \xi(df \circ F). \tag{3.5}$$

Preuve. *Soient* $X \in \chi(V)$, $F \in \Im_1^1(V)$ *et* $g, f \in C^\infty(V)$ *on a d'après la définition 3.1, la remarque 2.5 et la formule 2.12*

- $X^V(f^C) = X^V(idf) = ((df)(X))^V = d(f)^V X^V = (X(f))^V$.*[3]*
- $(gf)^C = d(gf) = dg.f + g.df = g^C f^V + g^V f^C$.
- $(g+f)^C = d(g+f) = dg + df = g^C + f^C$.
- *[5] Loclement, si* $F = F_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j$, *alors*

$$(\xi F)(f^C) = y_j F_j^i \frac{\partial}{\partial y_i}(y_s \frac{\partial f}{\partial x_s}) = y_j F_j^i \delta_i^s \frac{\partial f}{\partial x_s} = y_j F_j^s \frac{\partial f}{\partial x_s}$$

et d'autre parte on a

$$\xi(df \circ F) = \xi(F_j^s \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s(\frac{\partial}{\partial x_s} \otimes dx_j)) = \xi(F_j^s \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_j) = y_j F_j^s \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Remarque 3.1. *[5] Si* (U, x_i) *est une carte sur la variété* V, *alors* $(\pi^{-1}(U), (x_i)^V, (x_j)^C)$ *est la carte induite sur le fibré tangent* TV.

3.2 Relèvement complet d'un champ de vecteurs

Définition 3.2. *[5] Le relèvement complet d'un champ de vecteurs* X *sur* V *est l'unique champ de vecteurs* X^C *sur le fibré tangent* TV *tel que*

$$X^C f^C = (Xf)^C, \tag{3.6}$$

pour toute $f \in C^\infty(V)$.

L'unicité découle de la Proposition 3.1 et l'existence provient de la proprsition suivante :

Proposition 3.2. *[5] Si* X *est un champ de vecteurs de composantes* $(X^h)_h$ *par rapport à une carte* (U, x_h) *sur* V, *alors le relèvement complet* X^C *a pour composantes*

$$X^C : \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_h, y_h)$ *sur* TV, *où* $\partial X^h = y_i \frac{\partial X^h}{\partial x_i}$.

Preuve. *[5] Soient* $\begin{pmatrix} \widetilde{X}_1^h \\ \widetilde{X}_2^k \end{pmatrix}$ *les composantes de* X^C *par rapport à la carte induite* $(\pi^{-1}(U), x_h, y_h)$ *sur* TV. *De la formule 3.6, et pour toute* $f \in C^\infty(V)$ *on a*

$$X^C(f^C) = \widetilde{X}_1^i(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})y_j + \widetilde{X}_1^j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

$$\begin{aligned}(Xf)^C &= y_i \frac{\partial}{\partial x_i}(X^j \frac{\partial f}{\partial x_j}) \\ &= X^j y_i (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}) + (y_i \frac{\partial X^j}{\partial x_i})\frac{\partial f}{\partial x_j}\end{aligned}$$

D'où $\widetilde{X}_1^i = X^i$ *et* $\widetilde{X}_2^j = y_i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}$; $(i, j = 1, .., n)$.

Proposition 3.3. *[5] Soient* $f \in C^\infty(V)$, X, $Y \in \chi(V)$ *et* $w \in \chi^*(V)$, *on a*

$$X^C + Y^C = (X + Y)^C. \tag{3.8}$$

$$(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C. \tag{3.9}$$

$$X^C f^V = (Xf)^V. \tag{3.10}$$

$$w^V(X^C) = (w(X))^V. \tag{3.11}$$

Preuve. *[5]*

1) *Les formules (3.8) et (3.9) sont des conséquences directes de la Définition 3.2 et des Propriétés 3.1.*

2) *Localement on a*

$$X^C f^V = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \pi) + y_i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}(f \circ \pi) = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \pi) = (Xf)^V.$$

$$w^V(X^C) = w_k dx_k(X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}) = w_k dx_k(X^i \frac{\partial}{\partial x_i}) = (w_k X^k) \circ \pi = (w(X))^V.$$

Proposition 3.4. *[3] Pour tous* X, $Y \in \chi(V)$ *on a*

$$[X^V, Y^V] = 0 \tag{3.12}$$

$$[X^V, Y^C] = [X, Y]^V \tag{3.13}$$

$$[X^C, Y^C] = [X, Y]^C \tag{3.14}$$

Preuve. *[3] Soit $f \in C^\infty(V)$ on a*

•
$$\begin{aligned}[X^V, Y^V]f^C &= X^V Y^V f^C - Y^V X^V f^C \\ &= X^V (Yf)^V - Y^V (Xf)^V = 0.\end{aligned}$$

•
$$\begin{aligned}[X^V, Y^C]f^C &= X^V Y^C f^C - Y^C X^V f^C \\ &= X^V (Yf)^C - Y^C (Xf)^V \\ &= (XYf)^V - (YXf)^V \\ &= ([X,Y]f)^V = [X,Y]^V f^C.\end{aligned}$$

• *De même, on obtient :*
$$\begin{aligned}[X^C, Y^C]f^C &= X^C Y^C f^C - Y^C X^C f^C \\ &= (XYf)^C - (YXf)^C \\ &= ([X,Y]f)^C = [X,Y]^C f^C.\end{aligned}$$

Proposition 3.5. *[3] Soient $X \in \chi(V)$ et $F \in \Im_1^1(V)$ on a*
$$[X^C, \xi F] = \xi(\mathcal{L}_X F).$$
Où $\mathcal{L}_X$ désigne la dérivation du lie par rapport à X.

Preuve. *[5]*
D'une part
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X F &= \mathcal{L}_X F(\frac{\partial}{\partial x_i}) \otimes dx_i \\ &= \{[X, F(\frac{\partial}{\partial x_i})] - F([X, \frac{\partial}{\partial x_i}])\} \otimes dx_i \\ &= \{[X^k \frac{\partial}{\partial x_k}, F_i^j(\frac{\partial}{\partial x_j})] - F([X^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}])\} \otimes dx_i \\ &= \{X^k \frac{\partial F_i^h}{\partial x_k} - F_i^j \frac{\partial X^h}{\partial x_j} + F_k^h \frac{\partial X^k}{\partial x_i}\} \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx_i\end{aligned}$$

Et d'autre part
$$\begin{aligned}[X^C, \xi F] &= [X^k \frac{\partial}{\partial x_k} + y_i \frac{\partial X^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}, y_h F_h^j \frac{\partial}{\partial y_j}] \\ &= y_h X^k \frac{\partial F_h^j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_j} + yi \frac{\partial X^k}{\partial x_i} \delta_k^h F_h^j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_h F_h^j \delta_j^i \frac{\partial X^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \\ &= y_i X^k \frac{\partial F_i^h}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_h} + y_i \frac{\partial X^k}{\partial x_i} F_k^j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_h F_h^i \frac{\partial X^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \\ &= y_i \{X^k \frac{\partial F_i^h}{\partial x_k} + F_k^h \frac{\partial X^k}{\partial x_i} - F_i^j \frac{\partial X^h}{\partial x_j}\} \frac{\partial}{\partial y_h} \\ &= \xi(\mathcal{L}_X F).\end{aligned}$$

Remarque 3.2. *[3] Pour tous* $X \in \chi(V)$ *et* $F \in \Im_1^1(V)$ *on a*

$$F^V X^C = (FV)^V.$$

Preuve. *On utilisé les formules 2.25, 3.7 on obtient la résultate.*

Remarque 3.3. *[5] Relativement à une carte induite* $(\pi^{-1}(U), x_h, y_h)$ *sur* TV*, pour tout* $i = 1, .., n$*, on a*

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})^C = (\frac{\partial}{\partial x_i}). \tag{3.15}$$

3.3 Relèvement complet d' une 1-forme

Théoreme de caractérisation des formes différentielles

Théorème 3.1. *[5] Soient* $\widetilde{w}$, $\widetilde{\theta} \in \chi^*(TV)$ *deux formes sur* TV*. Alors* $\widetilde{w} = \widetilde{\theta}$ *si et seulement si pour tout* $X \in \chi(V)$ *on a*

$$\widetilde{w}(X^C) = \widetilde{\theta}(X^C).$$

Preuve. *[5] Il suffit de démontrer que si* $\widetilde{w}(X^C) = 0$ *pour tout* $X \in \chi(V)$*, alors* $\widetilde{w} = 0$ *.*

Localement si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *(resp* $\widetilde{w} = \widetilde{w}_i^1 dx_i + \widetilde{w}_j^2 dy_j$*) relativement à la carte* (U, x_i) *sur* V *(resp à la carte induite* $(\pi^{-1}(U), x_h, y_h)$ *sur* TV*), alors*

$$\widetilde{w}(X^C) = \widetilde{w}_h^1 X^h + \widetilde{w}_k^2 (y_i \frac{\partial X^k}{\partial x_i}) = 0.$$

D'où $\widetilde{w}_h^1 = 0 = \widetilde{w}_k^2$ *;* $h, k \in 1, ..., n$*.*

D'une manière plus générale on a :

Théorème 3.2. *[5] Si* $\widetilde{w}$, $\widetilde{\theta} \in \Im_q^0(TV)$ *(resp* $\in \Im_q^1(TV)$*), tels ques pour tous* $X_1, ..., X_q \in \chi(V)$

$$\widetilde{w}(X_1^C, ..., X_q^C) = \widetilde{\theta}(X_1^C, ..., X_q^C).$$

Alors

$$\widetilde{w} = \widetilde{\theta}.$$

Proposition 3.6. *[5] Soit* $w \in \chi^*(V)$*, il existe une unique* $w^C \in \chi^*(TV)$ *tel que pour tout* $X \in \chi(V)$*, on a*

$$w^C X^C = (w(X))^C. \tag{3.16}$$

Preuve. *[5] De Théorème 3.1, découle l'unicité. Localement si* $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $w = w_i dx_i$ *et* $w^C = \widetilde{w}_i dx_i + \widetilde{w}_j dy_j$, *alors*

$$w^C(X^C) = \widetilde{w}_i X^i + \widetilde{w}_j (y_i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}).$$

D'autre parte on a

$$\begin{aligned}(wX)^C &= y_i \frac{\partial (w_h X^h)}{\partial x_i}\\ &= (y_i \frac{\partial w_h}{\partial x^i}) X^h + w_h (y_i \frac{\partial X^h}{\partial x_i})\end{aligned}$$

D'où $\widetilde{w}_i = \partial w_i = y_i \frac{\partial w_h}{\partial x_i}$ *et* $\widetilde{w}_j = w_j$ i, $j = 1, ..., n$. *On pose alors, localement*

$$X^C = \partial w_i \frac{\partial}{\partial x_i} + w_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Définition 3.3. *[5] Soit* $w \in \chi^*(V)$, *l'unique forme* $w^C \in \chi^*(TV)$ *qui vérifie la formule (3.16) est appelée relèvement complet de* w.

Proposition 3.7. *[5] Si* w *est une 1-forme sur* V *de composantes* (w_i) *par rapport à une carte* (U, x_h), *alors le relèvement complet* w^C *a pour composantes*

$$w^C : (\partial w_i, w_j) = (y_i \frac{\partial w_h}{\partial x_i}, w_j). \tag{3.17}$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_h, y_k)$ *sur* TV.

Remarque 3.4. *[5] Relativement à la carte induite* $(\pi^{-1}(U), x_h, y_k)$ *sur* TV, *on a*

$$(dx_i)^C = dy_i. \tag{3.18}$$

Proposition 3.8. *[5] Si* w, $\theta \in \chi^*(V)$ *et* $X \in \chi(V)$, *alors*

1) $(w + \theta)^C = w^C + \theta^C$.

2) $(fw)^C = f^C w^V + f^V w^C$.

3) $w^C(X^V) = (w(X))^V$.

Preuve. *[5] Soient* w, $\theta \in \chi^*(V)$ *et* $X \in \chi(V)$ *on a*
1)

$$\begin{aligned}(w+\theta)^C (X)^C = ((w+\theta)(X))^C &= (w(X) + \theta(X))^C\\ &= (w(X))^C + (\theta(X))^C\\ &= w^C (X)^C + \theta^C (X)^C\\ &= (w^C + \theta^C)(X)^C.\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}(fw)^C(X)^C &= (fw(X))^C = f^V(w(X))^C + f^C(w(X))^V \\ &= f^V w^C(X)^C + f^C w^V(X)^C \\ &= (f^V w^C + f^C w^V)(X)^C.\end{aligned}$$

3) Localement si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $w = w_i dx_i$, *alors des formules (2.9) et (3.17), on obtient*

$$w^C(X^V) = (w_i X^i) \circ \pi = (w(X))^V.$$

3.4 Relèvement complet d'un champ de tenseurs

Définition 3.4. *[5] Le relèvement complet peut être prolonger à un tenseur quelconque de maniére unique tel que pour tout* P, $Q \in \Im^p_q(V)$ *et* $f \in C^\infty(V)$, *on a*

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C. \tag{3.19}$$

$$(P + Q)^C = P^C + Q^C. \tag{3.20}$$

$$(fP)^C = f^C P^V + f^V P^C. \tag{3.21}$$

Si $F \in \Im^1_1(V)$, alors

$$\begin{aligned}F^C &= (F^i_j \frac{\partial}{x_i} \otimes dx_j)^C \\ &= (F^i_j)^C (\frac{\partial}{x_i})^V \otimes (dx_j)^V + (F^i_j)^V (\frac{\partial}{x_i})^C \otimes (dx_j)^V + (F^i_j)^V (\frac{\partial}{x_i})^V \otimes (dx_j)^C \\ &= (F^i_j)^C \frac{\partial}{y_i} \otimes dx_j + (F^i_j)^V \frac{\partial}{x_i} \otimes dx_j + (F^i_j)^V \frac{\partial}{y_i} \otimes dy_j.\end{aligned}$$

d'où F^C a pour composantes

$$F^C : \begin{pmatrix} F^i_j & 0 \\ \partial F^i_j & F^i_j \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

De même si $G \in \Im^0_2(V)$ tel que $G = G_{ij} dx_i dx_j$, alors G^C a pour coordonnées

$$G^C : \begin{pmatrix} \partial G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Proposition 3.9. *[3] Pour tous* $X \in \chi(V)$ $F \in \Im^1_1(V)$ *on a*

$$\begin{aligned}F^C X^V &= (FX)^V. \\ F^C X^C &= (FX)^C.\end{aligned}$$

Preuve. *Les résultats sont conséquences directes de les fourmules 2.9, 3.7 et 3.22.*

Proposition 3.10. *[5] Soient X, $Y \in \chi(V)$ et $G \in \Im_2^0(V)$, on a*

$$G^C(X^V, Y^V) = 0, \tag{3.24}$$
$$G^C(X^C, Y^V) = (G(X,Y))^V, \tag{3.25}$$
$$G^C(X^C, Y^C) = (G(X,Y))^C. \tag{3.26}$$

Preuve. *[5] En vertu de la Définition 3.4, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $G = w \otimes \overline{w}$, on a*

$$\begin{aligned} G^C(X^V, Y^V) &= (w^C \otimes \overline{w}^V)(X^V, Y^V) + (w^V \otimes \overline{w}^C)(X^V, Y^V) \\ &= w^C(X^V)\overline{w}^V(Y^V) + w^V(X^V)\overline{w}^C(Y^V) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^C(X^C, Y^V) &= w^C(X^C)\overline{w}^V(Y^V) + w^V(X^C)\overline{w}^C(Y^V) \\ &= (w(X))^V(\overline{w}(Y))^V \\ &= (G(X,Y))^V. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^C(X^C, Y^C) &= w^C(X^C)\overline{w}^V(Y^C) + w^V(X^C)\overline{w}^C(Y^C) \\ &= (w(X))^C(\overline{w}(Y))^V + (w(X))^V(\overline{w}(Y))^C \\ &= (w(X)\overline{w}(Y))^C \\ &= (G(X,Y))^C. \end{aligned}$$

Proposition 3.11. *[5] Pour toute $w \in \chi^*(V)$ on a*

$$d(w^C) = (dw)^C. \tag{3.27}$$

Preuve. *[5] En utilisant la Proposition 3.10, les formules (3.14) et (3.16), et la formule de dérivation suivante*

$$dw(X,Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X,Y]).$$

On obtient

$$\begin{aligned} d(w^C)(X^C, Y^C) &= X^C(w^C(Y^C)) - Y^C(w^C(X^C)) - w^C([X^C, Y^C]) \\ &= (X(w(Y)))^C - (Y(w(X)))^C - (w([X,Y]))^C \\ &= ((dw)(X,Y))^C \\ &= (dw)^C(X^C, Y^C). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Relèvement horizontal

Dans cette section, on suppose que V est une variété de dimension m munie d'une connexion linéaire ∇.

Définition 4.1. *[5] Soit ∇ une connexion linéaire sur la variété V, on définit la connexion opposée $\widehat{\nabla}$ à ∇ par*

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y],$$

$\forall X,\ Y \in \chi(V)$.

Remarques 4.1. *[5]*

1. *Soient T et $\widehat{T}$ les tenseurs de torsion associés à ∇ et $\widehat{\nabla}$ respectivement, alors pour tous $X,\ Y \in \chi(V)$, on a $\widehat{T}(X, Y) = T(Y, X)$.*

2. *Si ∇ est sans torsion, alors $\widehat{\nabla} = \nabla$.*

4.1 Relèvement horizontal d'une fonction

De la Propriété 2.1 (5), on rappel que, pour toute $f \in C^\infty(V)$, on a

$$\xi(df) = \xi(\nabla f) = \xi(\widehat{\nabla} f) = i(df) = f^C = \partial f.$$

Définition 4.2. *[5] Si f est une fonction sur V, on pose*

$$f^H = f^C - \xi(\widehat{\nabla} f) = 0 \tag{4.1}$$

application de classe C^∞ sur TV dite relèvement horizontal de la fonction f.

4.2 Relèvement horizontal d'un champ de vecteurs

Définition 4.3. *[5] Soit X un champ de vecteurs sur V. On définit le relèvement horizontal de X noté X^H au fibré tangent TV par*

$$X^H = X^C - \nabla_\xi X, \tag{4.2}$$

où $\nabla_\xi X = \xi(\nabla X)$.

Localement si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors

$$\nabla X = (\frac{\partial X^i}{\partial x_j} + X^k \mathcal{T}^i_{jk}) \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j$$

$$\nabla_\xi X = (\frac{\partial X^i}{\partial x_j} + X^k \mathcal{T}^i_{jk}) y_j \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$\widehat{\nabla}_\xi X = (\frac{\partial X^i}{\partial x_j} + X^k \mathcal{T}^i_{jk}) y_j \frac{\partial}{\partial y_i}$$

$$X^C = X^i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_j \frac{\partial X^i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i},$$

d'où

Proposition 4.1. *[5] Si X un champ de vecteurs sur TV de composantes (X^h) par rapport à une carte (U, x_h) sur V, alors le relèvement horizontal X^H a pour composantes*

$$X^H = \begin{pmatrix} X^h \\ -X^j \mathcal{T}^k_{ji} y_i \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

et

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})^H = \frac{\partial}{\partial x_i} - y_j \mathcal{T}^h_{ji} \frac{\partial}{\partial y_h}. \tag{4.4}$$

On note

$$\frac{\delta}{\delta x_i} = [\frac{\partial}{\partial x_i} - y_j \mathcal{T}^h_{ji} \frac{\partial}{\partial y_h}] = (\frac{\partial}{\partial x_i})^H, \tag{4.5}$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_h, y_h)$ sur TV.

Remarque 4.1. *[5] Pour tout $X \in \chi(V)$ on a $d\pi \circ X^H = X \circ \pi$.*

Proposition 4.2. *[3] pour tous X, $Y \in \chi(V)$ et $f \in C^\infty(V)$ on a*

$$[X^V, \nabla_\xi Y] = \xi_X(\nabla Y) = (\nabla_X Y)^V$$

.

$$(\nabla_\xi X) f^C = \xi((df) \circ \nabla X).$$

Définition 4.4. *[5] Soit $\upsilon \in TV$, alors*

$$\mathcal{H}_\upsilon = \{X^H_\upsilon; \quad X \in \chi(V)\}. \tag{4.6}$$

est un sous espace vectoriel de $T_\upsilon(TV)$ appelé espace horizontal associé à ∇.

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\upsilon \in TV} \mathcal{H}_\upsilon. \tag{4.7}$$

est un sous fibré vecoriel de $T(TV)$ appelé fibré horizontal associé à ∇.

Définition 4.5. *[5] Soit $w \in T_xV$, le relèvement horizontal de w est definie par*

$$w^H = X_w^H. \tag{4.8}$$

où $X \in \chi(V)$ tel que $X_x = w$. De la formule (4.3) cette définition est indépendante du champ de vecteurs X choisie, et on a la proposition :

Proposition 4.3. *[5] L'application*

$$\begin{aligned} T_xV &\longrightarrow \mathcal{H}_v \\ w &\longmapsto w^H \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire.

Définition 4.6. *[5] Un champ de vecteurs $\widetilde{X} \in \chi(TV)$ est dit horizontal, si pour tout $v \in TV$ on a $\widetilde{X}_v \in \mathcal{H}_v$.*

Proposition 4.4. *[5] Un champ de vecteurs $\widetilde{X} \in \chi(TV)$ est horizontal, si et seulement pour tout $h = 1, .., n$, on a*

$$\widetilde{X}_2^h + \mathcal{T}_{ji}^h \widetilde{X}_1^j y_i = 0 \tag{4.9}$$

où $\widetilde{X} = \widetilde{X}_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i} + \widetilde{X}_j^2 \frac{\partial}{\partial y_j}$.

Proposition 4.5. *[5] Pour tous X, $Y \in \chi(V)$ et $f \in C^\infty(V)$, on a*

$$\begin{aligned} &(X+Y)^H = X^H + Y^H. \\ &(fX)^H = f^V X^H. \\ &X^H f^V = (Xf)^V. \\ &X^H f^C = (Xf)^C - \xi(df \circ \nabla X). \\ &[X^V, Y^H] = [X, Y]^V - (\nabla_X Y)^V = -(\widehat{\nabla}_Y X)^V. \end{aligned}$$

Preuve. *Soient X, $Y \in \chi(V)$ et $f \in C^\infty(V)$, on a :*

•

$$\begin{aligned} X^H\left(f^V\right) &= \left(X^C - \nabla_\xi X\right)\left(f^V\right) \\ &= X^C\left(f^V\right) - (\nabla_\xi X)\left(f^V\right) \end{aligned}$$

,
Puisque $\nabla_\xi X$ est un champ de vecteur vertical, alors

$$\begin{aligned} X^H\left(f^V\right) &= X^C\left(f^V\right) \\ &= (Xf)^V. \end{aligned}$$

•

$$X^H\left(f^C\right) \quad = \quad X^C\left(f^C\right) - (\nabla_\xi X)\left(f^C\right)$$

De la Propriétés 3.1 formule (3.5), *on obtient :*

$$X^H\left(f^C\right) \quad = \quad (Xf)^C - \xi(df \circ \nabla X)$$

. •

$$\begin{aligned} \left[X^V, Y^H\right] &= \left[X^V, Y^C\right] - \left[X^V, \xi(\nabla Y)\right], (\textit{de la Proposition 2.5}) \\ &= [X, Y]^V - \xi_X(\nabla Y) \\ &= [X, Y]^V - (\nabla_X Y)^V. \end{aligned}$$

Proposition 4.6. *[3] Soient $X \in \chi(V)$ et $F \in \Im_1^1(V)$ on a*

$$F^V X^H = (FX)^V.$$
$$F^C X^H = (FX)^H + (\nabla_\xi F) X^H.$$

Proposition 4.7. *[3]*

$$w^V(X^H) = (w(X))^V.$$
$$w^C(X^H) = (w(X))^C - \xi(w \circ (\nabla X)).$$

Pour tous $X \in \chi(V)$ et $w \in \chi^*(V)$.

Preuve. *[3] Soient $X \in \chi(V)$ et $w \in \chi^*(V)$, on a*

$$w^V(X^H) = w^V(X^C) - w^V(\nabla_\xi X) = (w(X))^V.$$
$$w^C(X^H) = w^C(X^C) - w^C(\nabla_\xi X) = (w(X))^C - \xi(w \circ (\nabla X)).$$

4.3 Relèvement horizontal d'une 1-forme

Définition 4.7. *[5] Soit w une 1-forme dans V. on définit le Relèvement horizontal de w noté w^H de V au fibré TV par :*

$$w^H = w^C - \nabla_\xi w \tag{4.10}$$

où $\nabla_\xi w = \xi(\nabla w)$.

Expressions Locale.[5] Si (x_i) désignent les coordonées de $w \in \chi^*(V)$ et $\mathcal{T}_{ji}^h$ les coefficients de Christoffel associés à la connexion ∇ relativement à la carte (U, x_h) sur V on a :

$$w^C : (\partial w_i, w_i) \tag{4.11}$$
$$\nabla_\xi w : (y_j \partial_j w_i - y_j \mathcal{T}_{ji}^h w_h, 0) \tag{4.12}$$
$$\widehat{\nabla}_\xi w : (y_j \partial_j w_i - y_j \mathcal{T}_{ij}^h w_h, 0) \tag{4.13}$$
$$w^H : (y_j \mathcal{T}_{ij}^h w_h, w_i). \tag{4.14}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x_h, y_h)$ sur TV.

Définition 4.8. *[5] Une 1-forme $\widetilde{w} \in \chi^*(TV)$ est dite horizontale si on a*

$$\widetilde{w}(X^H) = 0 \tag{4.15}$$

pour tout $X \in \chi(V)$.

Expressions Locale. Si $(\widetilde{w}_i^1, \widetilde{w}_j^2)$ désignent les composantes de $\widetilde{w} \in \chi^*(TV)$ par rapport à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x_h, y_h)$ sur TV, alors pour tout $X \in \chi(V)$, on a

$$\widetilde{w}(X^H) = \widetilde{w}_i^1 X^i - \widetilde{w}_h^2 y_j \mathcal{T}_{ji}^h X^i = 0$$

d'où

$$\widetilde{w}_i^1 - \widetilde{w}_h^2 y_j \mathcal{T}_{ji}^h = 0 \tag{4.16}$$

pour tout $i = 1, ..., n$.

Proposition 4.8. *[5] Soient $w \in \chi^*(V)$ et $X \in \chi(V)$, on a*

$$w^H(X^V) = (w(X))^V. \tag{4.17}$$
$$w^H(X^C) = w^C(\nabla_\xi X). \tag{4.18}$$
$$w^H(X^H) = 0. \tag{4.19}$$

Remarque 4.2. *[5] De la formule (4.14), localement on obtient*

$$(dx_h)^H = y_j \mathcal{T}_{ji}^h dx_i + dy_h. \tag{4.20}$$

4.4 Relèvement horizontal d'un champ de tenseurs

Définition 4.9. *[5] Soit S un champ de tenseurs sur V de type $(0,s)$ (resp $(1,s)$). On définit le relèvement horizontal de S au fibré TV noté S^H par*

$$S^H = S^C - \nabla_\xi S \tag{4.21}$$

Définition 4.10. *[5] D'une manière générale le relèvement horizontal peut être prolonger à un tenseur quelconque de maniére unique tel que pour tous P, $Q \in \Im_q^p(V)$, on a*

$$(P \otimes Q)^H = P^H \otimes Q^V + P^V \otimes Q^H. \tag{4.22}$$

$$(P + Q)^H = P^H + Q^H. \tag{4.23}$$

Expressions Locale. *Si $F \in \Im_1^1(V)$ tel que $F = F_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx^j$ alors :*

$$F^H : \begin{pmatrix} F_k^i & 0 \\ -y_j F_k^t \mathcal{T}_{jt}^i + y_j F_t^i \mathcal{T}_{jk}^i & F_k^i \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

Si $G \in \Im_2^0(V)$ tel que $G = G_{ij} dx_i \otimes dx_j$ alors :

$$G^H : \begin{pmatrix} y_t \mathcal{T}_{tj}^h G_{hi} + y_t \mathcal{T}_{ti}^h G_{jh} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

Si $H \in \Im_0^2(V)$ tel que $H = H^{ih} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\theta}{\partial x_h}$ alors :

$$H^H : \begin{pmatrix} 0 & H^{ih} \\ H^{ih} & -y_t \mathcal{T}_{tj}^i H^{jh} - y_t \mathcal{T}_{tj}^h H^{ij} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Définition 4.11. *[3] Soient $F \in \Im_1^1(V)$ et $X \in \chi(V)$ on considère $(\nabla F)X$ qui est un élément de $\Im_1^1(V)$ définie par*

$$((\nabla F)X)Y = (\nabla_Y F)X.$$

Proposition 4.9. *[3] Pour tous $F \in \Im_1^1(V)$ et $X \in \chi(V)$ on a*

$$(\nabla_\xi F)X^V = 0.$$
$$(\nabla_\xi F)X^C = (\nabla_\xi F)X^H = \xi((\nabla F)X) = \xi\nabla(FX) - F^C(\nabla_\xi X) = \nabla_\xi(FX) - F^H(\nabla_\xi X).$$

Proposition 4.10. *[3]*

$$F^H X^V = (FX)^V.$$
$$F^H X^C = (FX)^H + F^H(\nabla_\xi X) = (FX)^H + F^C(\nabla_\xi X).$$
$$F^H X^H = (FX)^H.$$

Preuve. *[3]*

$$F^H X^V = (F^C - \nabla_\xi F)X^V = F^C X^V = (FX)^V.$$

$$\begin{aligned} F^H X^C &= (F^C - \nabla_\xi F)X^C = (FX)^C - (\nabla_\xi F)X^C \\ &= (FX)^C - \nabla_\xi(FX) + F^H(\nabla_\xi X) \\ &= (FX)^H + F^H(\nabla_\xi X) = (FX)^H + F^C(\nabla_\xi X). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^H X^H &= (F^C - \nabla_\xi F)(X^C - \nabla_\xi X) \\ &= (FX)^C - \nabla_\xi(FX) = (FX)^H. \end{aligned}$$

Proposition 4.11. *[5] Soit $F \in \Im_1^1(V)$ un champ de tenseurs de type (1,1) sur la variété V alors*

$$\begin{aligned} F^H &: TV \to TTV \\ (x,u) &\mapsto F^H(x,u) = F^H_{(x,u)}(u^H), \end{aligned} \tag{4.27}$$

est un champ de vecteurs sur TV.

Localement, relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x_i, y_j)$, on a

$$F^H = y_i F_i^j \frac{\partial}{\partial x_j} - y_i y_k F_i^l \mathcal{T}_{lk}^s \frac{\partial}{\partial y_s} = y_i (F(\frac{\partial}{\partial x_i}))^H$$

.

Conclusion

Le fibré tangent est une réunion d'espace tangent à tout point d'une variété différentiable. Lorsqu'on munit cette variété des connexions et des tenseurs de types quelconques, ces dernières faites du fibré tangent une variété des connexions des tenseurs de types quelconques qui peut être définie à l'aide des relèvements des structures différentielles

Bibliographie

[1] **E. AUBRY**, *Introduction à la géométrie Riemannienne*, **2008**.

[2] **H. EL HENDI**, *Géométrie harmonique des fibrés tangents*, Thèse de doctorat, Université D'Oran, Algérie, **2015**.

[3] **K. YANO** and **S. ISHIHARA**, *Tangent and cotangent bundles* (Marecel Dekker.Inc. New York **1973**).

[4] **M. SPIVAK**, *DIFFERNTIAL GEOMETRY, volume I*, Brandeis University, **March, 1970**.

[5] **Pr.M. DJAA**, *Introdiction a la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés*, Publications du Centre, Universitaire Ahmed Zabana Relizane, Algérie, **2017**.

[6] **S. GUDMUNDSSON**, *An Introduction to Riemannian Geometry, http ://www.matematik.lu.se/ matematiklu/personal/sigma/.*

[7] **T. AL-SHAMAN**, *GEOMETRY OF TANGENT BUNDLE*, KING SAUD UNIVERSITY, **1427–2005**.

[8] **T. MASSON**, *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions.*