Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Univérsité D'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

RAFAI Nawal

Thème

Sur l'existence de solutions d'équations différentielles stochastiques

Soutenu publiquement le 19/10 / 2020 devant le jury composé de :

M. MAZOUZI Hadj	Maître assistant A	Université d'Adrar	Président
M. SLAMA Abdeldjalil	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Encadreur
M. DEBAGH Mohammed	Maître assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

Année Universitaire : 2019-2020

Résumé

Le but de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un type d'équations différentielles stochastiques. Nous avons donné la définition d'équations différentielles stochastiques linéaires et les différentes types de ces équations. La caractérisation de la solution d'équations différentielles stochastiques linéaires à été donnée ainsi que des exemples d'illustration pour la solution.

Mots-clés : Processus stochastique, Mouvement brownien, Intégrale stochastique, Formule d'Itô, Èquation différentielle stochastique.

Abstract

The aim of this memorie is the study of the existence and uniqueness of the solution a class of stochastic differential equations. We have given the definition of linear stochastic differential equations and the different types of these equations. The characterization of the solution of linear stochastic differential equations has been given as well as illustrative examples for the solution.

Keywords : Stochastic process, Brownian motion, Stochastic integral, The Itô formula, Stochastic differential equation.

الملخص

الهدف من هذه الرسالة هو دراسة وجود و تفرد الحل لنوع من المعادلات التفاضلية. قدمنا تعريف المعادلات التفاضلية العشوائية الخطية و الأنواع المختلفة لهذه المعادلات. ثم إعطاء توصيف لحل المعادلات التفاضلية العشوائية الخطية بالإضافة إلى أمثلة توضيحية لّلحل.

الكلمات المفتاحية : العملية العشوائية، الحركة البراونية، التّكامل العشوائي، الصياغة لإيثو، المعادلة التفاضلية العشوائية.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

À mon père et ma mère que Dieu les protège, pour leur amour, leur soutien et leur encouragements.

À mon fréres et ma soeurs.

À toute ma famille, chacun en son nom petit et grand.

À tous les amis et mes collègues.

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail.

J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Dr. SLAMA Abdeldjalil qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils, ses dirigés et son soutien du début à la fin de ce travail.

Tous mes remerciements et ma gratitude aux membres du jury

à Mr. MAZOUZI Hadj, pour l'honneur de présider ce jury.

à Mr. DEBAGH Mohammed, pour accepter d'être membres du jury et d'examiner mon travail.

Je remercie tous mes professeurs de mathématiques et tous ceux qui m'ont enseigné au long de ma vie scolaire.

J'exprime également mes sincères remerciements aux personnes qui aidez à remplir de ce mémoire.

Table des matières

Notations

Ω	espace de réalisation possible.
ω	événement élémentaire.
A	événement.
A^C	événement complémentaire de A dans Ω, i.e. $A^C = \Omega - A$.
I_A	la fonction d'indicateur d'un ensemble A, i,e $I_A(x) = 1$ si $x \in A$ ou sinon 0.
$\mathcal{P}(\Omega)$	ensemble des touts parties de Ω.
$\mathcal{F}$	tribu.
$\mathbb{P}$	mesure de probabilité.
$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$	espace de probabilité.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs, i.e $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres naturels.
X	variable aléatoire.
C	est une famille de sous-ensembles de Ω.
$\sigma(C)$	la tribu engendré par C.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$.
μ_X	loi de la probabilité de X.
f_X	densité de probabilité de X.
F_X	fonction de répartition de X.
$\mathbb{E}(X)$	espérance mathématique de X.
$\mathcal{G}$	sous tribu de $\mathcal{F}$.
$\mathbb{E}(X\|\mathcal{G})$	espérance conditionnelle de X sachent $\mathcal{G}$.

$(X_t)_{t\geq 0}$	processus stochastique.
$\mathcal{F}_t$	filtration de processus X_t .
B_t	mouvement brownien relativement un filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
$a\bigvee b$	le max entre a et b
$a\bigwedge b$	le min entre a et b
$\lvert x\rvert$	la norme euclidienne de la vecteur x.
A^T	la transposée de vecteur ou matrice A
$traceA$	la trace de racine d'un matrice $A=(a_{ij})_{d\times d}$ i.e $traceA=\sum\limits_{1\leq i\leq d} a_{ii}$.
$L^p(\Omega,\mathbb{R}^d)$	ensemble des variable aléatoire X á valeur dans $\mathbb{R}^d$ avec $\mathbb{E}\lvert X\rvert^p<\infty$.
$L^p_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^d)$	ensemble des variables aléatoire X sont $\mathcal{F}_t$-mesurable á valeur dans $\mathbb{R}^d$ avec $\mathbb{E}\lvert X\rvert^p<\infty$.
$L^p([a,b];\mathbb{R}^d)$	ensemble des fonctions borélienne (mesurable) $f:[a,b]\to\mathbb{R}^d$ á valeur dans $\mathbb{R}^d$ avec $\int\limits_a^b \lvert f(t)\rvert^p dt<\infty$.
$\mathcal{L}^p([a,b];\mathbb{R}^d)$	une famille des processus $(f(t))_{a\leq t\leq b}$ sont $\mathcal{F}_t$-adapté tel que $\int\limits_a^b \lvert f(t)\rvert^p\,\mathrm{d}t<\infty$ p.s .
$\mathcal{M}^p([a,b];\mathbb{R}^d)$	une famille des processus $(f(t))_{a\leq t\leq b}$ dans $\mathcal{L}^p([a,b];\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathbb{E}\int\limits_a^b \lvert f(t)\rvert^p\,\mathrm{d}t<\infty$.

Introduction générale

La théorie des probabilités est en liée étroit avec le réalité (avec les termes : hasard, aléatoire, évènement, probabilité), en ce sens qu'elle permet de poser un modèle mathématique sur des expériences aléatoires, que l'on pourra ainsi mieux comprendre et étudier. Un peu histoire, le mot hasard est un mot d'origine arabe : az-zahr, le dé. Il est apparu en français pour désigner tout d'abord un jeu de dés, puis plus généralement un évènement non prévisible.

Avant de définir un cadre très général permettant de modéliser le plus grand nombre d'expériences aléatoires possible, de nombreux principes de calcul de probabilités d'évènements ont été avancés. Les travaux de Pierre de Fermat, Blaise Pascal et Christian Huygens ($17^{\text{ème}}$ siècle), puis Pierre-Simon de Laplace, Abraham de Moivre, Jacques Bernoulli, et Denis Siméon Poisson ($18^{\text{ème}}$) et Carl Friedrich Gauss et Henri Poincaré ($19^{\text{ème}}$).

Le calcul stochastique jouer un rôle important dans différentes branches des sciences, sciences, physique, science sociale et de technologie. Le besoin de modélisation pour gérer au mieux les risques, pour automatiser les tâches, bref pour « industrialiser » une activité au départ très artisanale, a trouvé des moyens de calculs très sophistiqués dans la théorie développée à partir des années 1930 par Kolmogorov, Itô et bien d'autres mathématiciens. En finance par exemple, le calcul stochastique a pris un place importante depuis le milieu des années 1970 et a poussé les mathématiciennes à développer certaines de leurs théories pour le meilleur.

Le concept d'équation différentielle stochastique [9] généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux cas où un ou plusieurs des termes est un processus stochastique. La formalisation théorique de ce problème a posé des problèmes aux mathématiciens, et il a fallu attendre 1949 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux intégrale des processus stochastiques selon un mouvement brownien, pour définir le notion de l'intégrale stochastique. A partir de la théorie d'intégration stochastique, on construit la théories des équations différentielles stochastiques.

Un des problèmes liés à la théorie des équations différentielles stochastiques est le problème de l'existence et de l'unicité des solutions. Le problème de l'existence et de l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques à été étudier par plusieurs auteurs, on peut citer les travaux de Mao [9] en 1997 a développé les théories de l'existence et l'unicité de la solution. Puis en 2013, Cao et al. [2] ont étudiés une classe des équations différentielles stochastiques dont la partie non linéaire ne satisfait pas la condition de croissance linéaire, et donnés une quelques nouveaux critères garantissant l'existence et l'unicité de la solution comme le système stochastique de Lorenz, et aussi par (voir [1], [3], [12]).

Pour les équations différentielles stochastiques linéaires, en 1989, Ocone et al. [11] ont donné les conditions analytiques nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution des équations différentielles stochastiques linéaires avec des conditions aux limites affines.

En générale, les équations différentielles ordinaires gouvernent des nombreux phénomènes déterministes et sont des équations évolutives de type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \tag{1}$$

Symboliquement, l'équation (1) est réécrite sur la formule

$$\mathrm{d}x(t) = f(t, x(t))\,\mathrm{d}t.$$

Cette équation représente un modèle d'un système physique $(x(t))_{t\geq 0}$ qui évoluant avec le temps t, selon le taux $f(t, x(t))$. Par exemple, le modèle de croissance de la population

$$\mathrm{d}N(t) = f(t)N(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Ou bien

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = f(t)N(t).$$

Mais dans les équations différentielles stochastiques, la dynamique évolutive déterministe de f est perturbée par un terme aléatoire (bruit) avec $f(t) = r(t) + \sigma(t)$**"bruit"**, ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = r(t)N(t) + \sigma(t)N(t)\xi_t.$$

Où ξ_t est une grandeur aléatoire. Dans beaucoup de situations, le processus $\xi = (\xi_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un bruit blanc, c'est à dire un processus aléatoire stationnaire centré dont les variables aléatoires sont indépendantes.

En générale, le terme **"bruit"** $= \xi_t$ est modèlisé formellement comme la dérivée du processus de Wiener (Mouvement brownien) B_t, c'est à dire $\mathrm{d}B_t = \xi_t\,\mathrm{d}t$. L'équation (2) avec la valeur initiale $N(0) = N_0$, est écrite sous la forme :

$$\mathrm{d}N(t) = r(t)N(t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t)N(t)\,\mathrm{d}B_t, \quad t \geq 0,$$

qui définie un équation différentielle stochastique.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnons les notions générales et définitions nécessaires pour la réalisation de ce travail.

En le deuxième chapitre, nous expliquons la variation d'un mouvement brownien et donnons la définition de l'intégrale stochastique d'Itô :

$$\int_0^T X_t\,\mathrm{d}B_t.$$

Où X_t est un processus stochastique muni de propriétés de régularité suffisantes, et aborderons certaines de ses propriétés très importantes.

Dans le chapitre trois, nous définissons les équations différentielles stochastiques de la forme :

$$\mathrm{d}x(t) = f(t, x(t))\,\mathrm{d}t + g(t, x(t))\,\mathrm{d}B_t. \tag{3}$$

Ensuite, nous donnons quelque théories de l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (3) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$, puis nous les appliquons à des équations différentielles stochastiques linéaires avec des exemples.

Chapitre 1

Notions générales et définitions

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base dont nous avons besoin dans ce qui suit, la théorie des probabilités, processus aléatoire et mouvement brownien, avec quelques propriétés de l'espace L^2.

1.1 Espace de probabilité

Définition 1.1. On appelle espace fondamentale Ω l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Définition 1.2. Un événement est une caractéristique qui permet de dire s'il a été réalisé ou non une fois que le résultat d'une expérience est connu.

Définition 1.3. On dit qu'un événement A de Ω qu'il est réalisé si le résultat d'une expérience aléatoire ω appartient á A et on écrit $\omega \in A$. Sinon $\omega \notin A$.

Définition 1.4. Une famille $\mathcal{F}$ de sous ensembles de Ω est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω, s'elle vérifie les conditions suivantes

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
3. $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Remarque 1.1. Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appelé espace mesurable, et les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les événements ou les ensembles mesurables.

Définition 1.5. Si C est une famille de sous-ensembles de Ω. Alors, il existe une plus petite tribu $\sigma(C)$ sur Ω qui contient C. la tribu $\sigma(C)$ est appelé la tribu engendré pa r C.

Définition 1.6. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et C est la famille de tous les ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^n$. Alors, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(C)$ est appelé la tribu borélienne sur Ω, et les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sont appelés les boréliennes.

Définition 1.7. Une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ et $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ sont disjoint (i.e $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$) alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque 1.2. — Le triplet $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité.
- — $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de la réalisation de A.
- — Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est réalisé avec probabilité 1, ou A est réalisé presque sûrement $(p.s)$.

Définition 1.8. Un ensemble B de Ω est dit négligeable s'il existe un événement A tel que $B \subset A \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = 0$.

On note N l'ensemble des ensembles négligeables de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1.9. On dit que l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est complet, si pour tout $B \in \Omega$ négligeable, B est contenu dans $\mathcal{F}$.

Définition 1.10. Soit $X : (\Omega,\mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^n,\mathcal{B})$ une application sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit qu'il est $\mathcal{F}$-mesurable si
$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F} \quad ,\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

1.1.1 Variable aléatoire

Définition 1.11. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité complet. Une variable aléatoire est une application $\mathcal{F}$-mesurable de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B})$.

Définition 1.12. Toute variable aléatoire X induit une mesure de probabilité μ_X dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ définie par

$$\mu_X(\mathrm{B}) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathrm{B}\} \quad , \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

et μ_X s'appelle la distribution de X.

Définition 1.13. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, si X une variable aléatoire réelle et $\int_\Omega |X(\omega)| \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) < \infty$. Alors le nombre :

$$\mathbb{E}(X) : = \int\limits_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x \,\mathrm{d}\mu_X(x),$$

s'appelle l'espérance de X.

Dans le cas général, soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction borélienne alors

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int\limits_\Omega g(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}\mu_X(x).$$

Définition 1.14. Soient X, Y deux variables aléatoires réels sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ de carrée intégrable, on a le deux nombres

$$var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2;$$
$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)),$$

S'appelles respectivement la variance de X et la covariance de X et Y.

Définition 1.15. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire, la fonction de répartition de X est l'application $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F_X = \mathbb{P}(X \in]-\infty,x]) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad , x \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.16. Une variable aléatoire X est à densité s'il existe une fonction Lebesgue-intégrable positive f_X telle que

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X \, \mathrm{d}x,$$

pour tout $A \in \mathcal{B}$. f_X est la densité (de probabilité) de X.

Exemple 1.1. *Loi gaussienne* : X suit une loi gaussienne (ou normale) de paramètres m et σ^2, s'elle à densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Définition 1.17. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ la tribu engendrée par X est la plus petite tribu sur Ω qui rende X est $\mathcal{F}$-mesurable :

$$\sigma(X) = \{A = X^{-1}(\mathrm{B}), \quad \mathrm{B} \in \mathcal{B}\}.$$

Définition 1.18. Si $\{X_i, i \in I\}$ une famille des variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, la tribu engendrée par cette famille est définie par

$$\sigma(X_i, i \in I) = \sigma\left(\{X_i \in \mathrm{B}\}, i \in I, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right) = \sigma(\{X_i \leq t\}, i \in I, t \in \mathbb{R}).$$

Espaces L^p

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire et $p \in [1, \infty)$ une constante. On définie la norme de X dans L^p par $\|X\|_p$ tel que

$$\|X\|_p = \|X\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a

$$\|X\|_\infty = \|X\|_{L^\infty} = \sup\left\{|X(\omega)|, \omega \in \Omega\right\}.$$

On définie l'espace L^p par

$$L^p(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R}^n, \|X\|_p < \infty\}.$$

L'espace L^p est un espace de Banach, c'est à dire un espace vectoriel normé complet.

1.1.2 Indépendance

Définition 1.19. Deux événements A, B de $\mathcal{F}$ sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Soit $A, B, C \in \mathcal{F}$ sont indépendants si :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) & , & \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) & \text{et} & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C). \end{array}$$

Définition 1.20. Une collection des événements $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\} \in \mathcal{F}$ est indépendante si

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_n}),$$

pour tous les choix d'indices possibles $i_1, \ldots, i_n \in I$.

Définition 1.21. Une famille $\{\mathcal{F}_i, i \in I\}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ est indépendante si pour tous les choix d'indices possibles $i_1, \cdots, i_n \in I$

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_n}),$$

pour tous $A_{i_1} \in \mathcal{F}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathcal{F}_{i_n}$.

Exemple 1.2. Deux sous-tribu $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}$ sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \quad \text{pour tous} \quad A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2.$$

Proposition 1.1. *Une famille $\{\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n)\}$ de sous-tribus engendré par $A_i, i \in I$ est indépendante si et seulement si les événement $(A_1, \ldots, A_n)$ sont indépendants.*

Définition 1.22. Une variable aléatoire X est indépendante d'une sous tribu $\mathcal{G}$ si le tribu $\mathcal{H}_X = \sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendants.

Définition 1.23. Une famille de variables aléatoires $\{X_i, i \in I\}$ est indépendante si la collection $\sigma(X_i)$ des tribus engendrée par X_i est indépendante.

Exemple 1.3. Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}^m$ deux variables aléatoires, elles sont indépendants si

$$\mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in A, Y(\omega) \in B\} = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in A\}\mathbb{P}\{\omega : Y(\omega) \in B\},$$

pour tous $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Remarque 1.3. Si deux variables aléatoires $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sont indépendants, et $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Alors :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Soit $\{A_k\}$ une suite d'ensembles dans $\mathcal{F}$. Définissons la limite supérieure des ensembles par

$$\limsup_{k\to\infty} A_k = \{\omega : \omega \in A_k \text{ pour infiniment nombreux } k\} = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty} A_k.$$

Il est clair qu'il appartient à $\mathcal{F}$. En ce qui concerne sa probabilité, nous avons le

Lemme 1.2. *[9](**Lemme de Borel-Cantelli**)*

(1) Si la suite $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty$, alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 0.$$

C'est-à-dire, qu'il existe un ensemble $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et une variable aléatoire à valeur entière k_0 telle que pour chaque $\omega \in \Omega_0$, on a $\omega \notin A_k$ chaque fois que $k \geq k_0(\omega)$.

(2) Si la suite $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$ est indépendante et $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$, alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 1.$$

C'est-à-dire, qu'il existe un ensemble $\Omega_\theta \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_\theta) = 1$ tel que pour chaque $\omega \in \Omega_\theta$, il existe une sous-suit $\{A_{k_i}\}$ telle que ω appartient à chaque $\{A_{k_i}\}$.

1.1.3 Convergence de suites des variables aléatoires

Soient $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une variable et une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On distingue plusieurs types de convergence :

1. S'elle existe un ensemble $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 0$ tel que pour chaque $\omega \notin \Omega_0$, la suit $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $X(\omega)$ au sens habituel dans $\mathbb{R}^d$, alors (X_n) est dit converger vers X presque sûrement ou avec probabilité 1, et on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ $p.s.$
2. Si pour chaque $\epsilon > 0$
$$\mathbb{P}\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$
Alors, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X en probabilité.
3. Si X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiens L^p avec
$$\mathbb{E}(|X_n - X|^p) \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$
Alors, la suit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans L^p.
4. Si pour chaque fonction continue bornée f á valeur dans $\mathbb{R}^d$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f(X_n) = \mathbb{E}f(X).$$
Alors, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

Définition 1.24. On appelle loi conjointe du vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$ sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ la mesure de probabilité définie par
$$\mu_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) \quad , \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Définition 1.25. Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ définie par
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Définition 1.26. Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$ est à densité s'elle existe une fonction positive Lebesgue-intégrable $f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n, \ \ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$
f_X est la densité conjointe de X.

Remarque 1.4. 1. C est une matrice variance covariance de X notée $C_{i,j} = Cov(X_i,X_j)$ est définie par $Cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i \cdot X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$, $i,j \in \{1, \cdots ,n\}$.

2. Un variable aléatoire X dans $\mathbb{R}^n$ est un vecteur gaussien si et seulement si toute les combinaisons linéaires des ses composantes X_i sont gaussiennes sur $\mathbb{R}$, et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, C)$.

1.1.4 Espérance conditionnelle

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une variable aléatoire intégrable et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.
Soit $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B est

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Définition 1.27. L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ de X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire vérifiant

1. $\mathcal{G}$-mesurable.
2. $$\int_G \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_G X\, \mathrm{d}\mathbb{P} \quad ,\forall G \in \mathcal{G}.$$

Remarque 1.5. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité, X, Y deux variables aléatoires intégrables. Si $\sigma(Y)$ est la tribu engendré par rapport Y, alors

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y)).$$

Propriétés 1.1.1. Les propriétés importantes de l'espérance conditionnelle sont les suivantes :

1. $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.
3. $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.
4. X est $\mathcal{G}$-mesurable $\Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X$.

5. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$.
6. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable $\Rightarrow \mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$.
7. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
8. $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$.

1.2 Processus stochastique

Définition 1.28. On appelle processus stochastique à valeurs dans un espace E muni d'une tribu ε, une famille $(X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ à valeurs dans (E,ε).

Remarque 1.6. — Dans la pratique l'indice t représente le temps.
- — Un processus peut aussi être vu comme une fonction aléatoire : à chaque ω dans Ω on associe la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans E, $t \longmapsto X_t(\omega)$, appelée trajectoire du processus.
- — Un processus peut être considéré comme une application de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans E, nous supposons toujours que cette application est mesurable lorsque l'on munit $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ de la tribu $B(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}$ et E de la tribu ε.
- — On prendre usuellement $T = [0, \infty[$ ou un intervalle $[0, a]$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.

Définition 1.29. Un processus X_t est dit à trajectoires continues (ou est continu), si l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue pour tout $\omega \in \Omega$.

Définition 1.30. Un processus X_t est dit càdlàg (continue à droit, limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, et pour tout $\omega \in \Omega$ la limite à gauche existe et finit pour tout $t \geq 0$. Pour càglàd la même définition.

Définition 1.31. Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante des sous tribus de $\mathcal{F}$. C'est-à-dire $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$, pour tout $0 \leq t < s < \infty$.

Définition 1.32. Une filtration est dite satisfait la condition usuelle, si

1. Les ensembles négligeables sont dans $\mathcal{F}_0$;

2. $\mathcal{F}_t$ est continue á droite, i.e :

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 1.33. Un processus X_t est dit adapté (par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.

Définition 1.34. Un processus X_t est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$ si pour tout $t \in T$ l'application $(t, \omega) : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$-mesurable .

Définition 1.35. Un processus Y_t est dit modification ou version de processus X_t si $\forall \omega \in \Omega,\ X_t = Y_t \ \ p.s, \forall t \geq 0$, i.e :

$$\mathbb{P}\left\{\omega, X_t(\omega) = Y_t(\omega)\right\} = 1, \quad \text{pour tout} \ \ t \geq 0.$$

Définition 1.36. Deux processus X_t et Y_t sont indistinguables si $\forall \omega \in \Omega,\ X_t = Y_t$, $\forall t \geq 0 \ p.s$, i.e :

$$\mathbb{P}\left\{\omega, X_t(\omega) = Y_t(\omega), \forall t \geq 0\right\} = 1.$$

Définition 1.37. Deux processus X_t et Y_t sont égaux en loi $X \overset{loi}{=} Y$ si

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \overset{loi}{=} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k}),\ \ \forall t_1, \ldots, t_k \in T, k \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.38. Un processus X_t est dit stationnaire si pour tout $h > 0$, $X_{t+h} \overset{loi}{=} X_t$ ne dépend pas de $h > 0$, c'est à dire : $\forall h > 0, \forall t_1, \ldots, t_k \in T$

$$(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_k+h}) \overset{loi}{=} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}).$$

Définition 1.39. Un processus X_t est dit à accroissements stationnaires si la loi des accroissements $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de $t \geq 0$, i.e. $X_{t+h} - X_t \overset{loi}{=} X_h$.

Définition 1.40. Un processus X_t est dit à accroissements indépendants si pour tout $k \geq 1$ et $0 < t_1 < \cdots < t_k$ les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ic \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ sont indépendants .

Définition 1.41. (Processus gaussien) Un processus stochastique $(X_t)_{t\in T}$ est gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles $(X_{t_1},\cdots,X_{t_p})$ sont gaussiennes (pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et $t_1,\cdots,t_p\in T$).
Autrement dit $X=(X_t)_{t\in T}$ est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses marginales $a_1X_{t_1}+\cdots+a_pX_{t_p}$ suit une loi gaussienne (pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et $t_1,\cdots,t_p\in T$ et $a_1,\cdots,a_p\in\mathbb{R}$).

Définition 1.42. Soit $\tau:\Omega\to[0,\infty]$ une variable aléatoire est appelé $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt (ou simplement, temps d'arrât) si $\{\omega:\tau(\omega)\leq t\}\in\mathcal{F}_t$ pour tout $t\geq 0$.

Définition 1.43. Soient τ et ρ deux temps d'arrêt avec $\tau\leq\rho$ $p.s.$ Nous définissons

$$[[\tau,\rho[[=\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega:\tau(\omega)\leq t<\rho(\omega)\},$$

et l'appeler un intervalle stochastique. De même, nous pouvons définir les intervalles stochastiques $[[\tau,\rho]],]]\tau,\rho]]$ et $]]\tau,\rho[[$.

1.2.1 Martingale

Définition 1.44. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{F}_t$ une filtration de cet espace. Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ intégrables, (c'est-á-dire vérifiant $\mathbb{E}(|X_t|)$ pour tout t) est une :

1. Une martingale si pour $s\leq t:\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]=X_s$.
2. Une sur-martingale si pour $s\leq t:\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]\leq X_s$.
3. Une sous-martingale si pour $s\leq t:\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s]\geq X_s$.

1.3 Mouvement brownien

Le mouvement brownien est le nom donné au mouvement irrégulier des particules de pollen en suspension dans l'eau, observés par le botaniste écossais Robert Brown en 1828. Le mouvement s'est ensuite expliqué par les collisions aléatoires avec les molécules d'eau. Pour décrire le mouvement mathématiquement, il est naturel de utiliser le concept de processus stochastique $(B_t(\omega))_{t\geq 0}$, interprété comme la position du grain de pollen ω au temps t. On donne maintenant la définition mathématique de mouvement brownien.

Définition 1.45. [9] Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité avec une filtration $\mathcal{F}_t$. Un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ adapté à la filtration $\mathcal{F}_t$ à valeur réelles est appelé mouvement brownien si :

1. $B_0 = 0$ $p.s$;
2. $\forall 0 \leq s \leq t$, le variable aléatoire $B_t - B_s$ est de loi normale de moyen 0 et de variance $t - s$;
3. $\forall 0 \leq s \leq t$, le variable aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien et $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \infty$ alors les incréments $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, 1 \leq i \leq k$ sont indépendants, et nous disons que les mouvement brownien á des accroissement indépendants. De plus, la distribution de $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ dépend uniquement de la différence $t_i - t_{i-1}$, et nous disons que le mouvement brownien est stationnaire.

Proposition 1.3. *[14] Si $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien, alors*

(i) Le processus B_t défini par $B_t = -B_t$ est un mouvement brownien.

(ii) Le processus B_t défini par $B_t = \frac{1}{c}B_{c^2t}$ est un mouvement brownien.

(iii) Le processusB_t défini par $B_t = tB_{\frac{1}{t}}, \forall t > 0$ et $B_0 = 0$ est un mouvement brownien.

Lemme 1.4. *[6] Supposons que B_t un mouvement brownien. Alors*

$$\mathbb{E}(B_tB_s) = t \wedge s \quad \forall t \geq 0,\ s \geq 0.$$

Pont Brownien

Soit $T = [0, 1]$, le pont brownien $(B^o_t)_{t\in[0,1]}$ est le processus gaussien centré défini par la fonction de covariance $K(s, t) = \min(s, t) - st$.

Proposition 1.5. *On peut définir directement un pont brownien B^o à partir d'un mouvement brownien B^o par B*

$$B^o_t = B_t - tB_1, t \geq 0.$$

Définition 1.46.
1. Soit $0 < \gamma < 1$. Une fonction $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ est appelée uniformément Höldernienne continue avec l'exposant $\gamma > 0$ s'il existe un constante K telle que
$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^{\gamma}, \text{ pour tous } \; s, t \in [0,T].$$
2. Soit $\gamma > 0$. Une fonction $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ est appelée Höldernienne continue avec l'exposant $\gamma > 0$ au point s, s'il existe un constante K telle que
$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^{\gamma}, \text{ pour tous } \; s, t \in [0,T].$$

Pour répondre à la question de la continuité du mouvement brownien, on peut utiliser un autre célèbre théorème de Kolmogorov :

Théorème 1.6. *[12](**Théorème de continuité de Kolmogorov**). Supposons que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ satisfait la condition suivante : Pour tout $T > 0$, il existe des constantes positives α, β, C telles que*
$$\mathbb{E}\left(|X_t - X_s|^{\beta}\right) \leq C|t - s|^{1+\alpha}, \qquad \forall 0 \leq s, t \leq T.$$
Ensuite, il existe une version continue de X.

Théorème 1.7. *[6] Soit X_t un processus stochastique avec des trajectoires continues p.s, tel que*
$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^{\beta} \leq C|t - s|^{1+\alpha}, \quad \forall 0 \leq s, t < \infty,$$
pour les constantes $\alpha, \beta > 0$, $C \geq 0$ et pour tous $0 \leq t, s$.
Ensuite, pour chaque $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}, T > 0$, et presque chaque ω, il existe un constante $K = K(\omega, \gamma, T)$ de telle sorte que
$$|X(t, \omega) - X(s, \omega)| \leq K|t - s|^{\gamma}, \quad \text{pour tous } \; 0 < t, s \leq T.$$
Ainsi, le trajectoire $t \to X(t, \omega)$ est uniformément Höldernienne continue avec l'exposant γ sur $[0,T]$.

Application sur les mouvement brownien

Considérons $B(t)$, un mouvement brownien n-dimensionnel. Nous avons pour tous les entiers $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|B(t) - B(s)|^{2m}) &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} f_x(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2m} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On utilisons le changement des variable suivante $r = t - s > 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{t-s}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|B(t) - B(s)|^{2m}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} r^m |y|^{2m} \exp^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y \\ &= |t-s|^m \mathbb{E}(|y|^{2m}) \\ &\leq C_m |t-s|^m\end{aligned}$$

D'après le théorème 1.6 pour $\alpha = m - 1, \beta = 2m$, il existe un version $\widetilde{B}$ continue de $B(t)$, et d'après les hypothèses du théorème 1.7 $\widetilde{B}$ est Höldernienne continue $p.s$ pour les exposants

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \text{ pour tous } m.$$

Donc, pour presque tous les ω et tout $T > 0$, le trajectoire $t \to B(t, \omega)$ est uniformément Höldernienne continue sur $[0,T]$ pour chaque exposant $0 < \gamma < 1/2$.

1.3.1 Mouvement brownien multidimensionnel

Définition 1.47. Un processus stochastique d-dimensionnels $B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots, B_t^{(d)})$ est un mouvement brownien d-dimensionnels si

1. $B_0 = 0$;
2. $\forall 0 \leq s \leq t$, le vecteur aléatoire $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$;
3. $\forall 0 \leq s \leq t$, le vecteur aléatoire $B_t - B_s$ est de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,C)$.

1.3.2 Caractérisation d'un mouvement brownien

Définition 1.48. Soit $B = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots, B_t^{(d)})_{t\geq 0}$ un processus á valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on dit que B est un mouvement brownien d-dimensionnel si pour tout $1 \leq i \leq d, B_t^{(i)}$ est un mouvement brownien réels, et $B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \ldots, B_t^{(d)}$ sont indépendants.

1.4 Espace L^2

On pose, $L^2(\Omega, \mathbb{R}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{E}(|f(t)|^2) < \infty\}$ avec

$$\|f\|_2 = \mathbb{E}\left(|f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $L^2 = L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ une famille de variables aléatoires X sur $\mathbb{R}^d$ avec $\mathbb{E}|X|^2 < \infty$. En outre, les deux inégalités suivantes sont très utiles :

(i) **Inégalité de Hölder**

$$|\mathbb{E}(X^T Y)| \leq (\mathbb{E}|X|^2)^{\frac{1}{2}}(\mathbb{E}|Y|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$X \in L^2,\ Y \in L^2$

(ii) **Inégalité de chebyshev**

$$\mathbb{P}\{\omega : |X(\omega)| \geq c\} \leq \frac{1}{c^2}\mathbb{E}|X|^2,$$

si $c > 0,\ X \in L^2$

Définition 1.49. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dit préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire $(\langle ., . \rangle)$, il est dit de Hilbert si on a de plus est complet relativement á la norme associée á ce produit scalaire .

L'espace L^2 est un espace de Hilbert, i.e. espace complet muni d'un produit scalaire

$$\langle X, Y\rangle_{L^2} = \mathbb{E}(X \cdot Y) \quad , X, Y \in L^2.$$

Théorème 1.8. *[9](**Inégalité de Gronwall**)*
Soit $u(\cdot)$ une fonction positive bornée mesurable sur $[0,T]$, et que $v(\cdot)$ soit une fonction intégrable positive sur $[0,T]$ telle que $T>0$ et $c \geq 0$. Si

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)\,\mathrm{d}s \quad ,\forall 0 \leq t \leq T.$$

Alors

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s\right) \quad ,\forall 0 \leq t \leq T.$$

Chapitre 2

Calcul Stochastique

Dans ce chapitre, on va définir l'intégrale d'un processus par rapport à mouvement brownien, si $B(t)$ était différentiable, alors l'intégrale n'aurait aucun problème. Mais, nous verrons que $B(t)$ n'est différentiable nulle part, donc cette intégrale ne peut être définie de la manière habituelle.

2.1 Étude de la variation

Définition 2.1. Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et Δ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ i.e $\Delta = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$. On a les notions suivantes :

1. La variation de f sur $[a, b]$ est le membre

$$V_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

2. La variation totale de f sur $[a, b]$ est égale à

$$V_{[a,b]}^f = \sup_\Delta V_\Delta,$$

le sup étant pris sur toutes les subdivisions de $[a, b]$.

3. f à variation bornée sur $[a, b]$ si

$$V_{[a,b]}^f < \infty.$$

4. La variation quadratique de f sur $[a,b]$ est défini par

$$V_{\Delta}^{(2)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)^2 .$$

2.1.1 Variation quadratique du mouvement brownien

Soit B un mouvement brownien sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\Delta = \{s = t_0 < \cdots < t_n = t\}$ une subdivision de l'intervalle $[s,t]$, nous posons $|\Delta| = \max_{0\leq i\leq n-1}(t_{i+1} - t_i)$. On appelle la variation quadratique d'une trajectoires du mouvement brownien la variable aléatoire

$$V_{\Delta}^{(2)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2 .$$

Théorème 2.1. *[4] Si $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{s = t_0^n, \cdots, t_n^n = t\}$ une subdivision de $[s,t]$ telle que $|\Delta_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, alors*

$$\lim_{n\to\infty} V_{\Delta_n}^{(2)} = t - s,$$

dans L^2.

Preuve Calculons $\mathbb{E}(V_{\Delta_n}^{(2)})$
Puisque $B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \sim \mathcal{N}(0, t_{i+1}^n - t_i^n)$, on peut écrit $B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} = \sqrt{t_{i+1}^n - t_i^n}X_i$ avec $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ ainsi :

$$\mathbb{E}\left[V_{\Delta_n}^{(2)}\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}^n - t_i^n)\mathbb{E}(X_i^2) = s - t.$$

Et

$$\begin{aligned}
var\left(V_{\Delta_n}^{(2)}\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} var[\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} var[(t_{i+1}^n - t_i^n)X_i^2] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)^2 var(X_i^2) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)|\Delta_n| var(X_i^2) \\
&= 2(s-t)|\Delta_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, On a

$$\begin{aligned} var\left(V_{\Delta_n}^{(2)}\right) &= var\left[V_{\Delta_n}^{(2)} - (t-s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(V_{\Delta_n}^{(2)} - (t-s)\right)^2\right] \\ &= \|V_{\Delta_n}^{(2)} - (t-s)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

D'où $V_{\Delta_n}^{(2)}$ tend vers $t-s$ dans L^2. □

Proposition 2.2. *Pour toute subdivision Δ_n de $[s,t]$, la variation totale d'un mouvement brownien associée à cette subdivision n'est pas fini .*

Preuve Soit Δ_n une subdivision de $[s,t]$. Alors pour tout $\omega \in \Omega$, on a la relation :

$$\begin{aligned} V_{\Delta_n}^{(2)}(\omega) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)^2(\omega) \\ &\leq \sup_{|t_{i+1}-t_i|\leq\Delta_n} |B_{t_{i+1}^n}(\omega) - B_{t_i^n}(\omega)| \sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)(\omega) \\ &\leq \sup_{|t_{i+1}^n-t_i^n|\leq\Delta_n} |B_{t_{i+1}^n}(\omega) - B_{t_i^n}(\omega)| V_{[s,t]}^B(\omega). \end{aligned}$$

Le terme à gauche tend vers $t-s$ car la variation quadratique converge dans L^2. Le premier terme à droite tend vers 0 car le mouvement brownien a trajectoires uniformément continues sur $[s,t]$ (Höldernienne d'exposant $\gamma < \frac{1}{2}$). Donc le deuxième terme de droite tend vers l'infini lorsque $|\Delta_n| \to 0$.
L'uniforme continuité de trajectoires du mouvement Brownien sur l'intervalle $[s,t]$ implique que $\lim\sup_{|t_{i+1}^n-t_i^n|\leq\Delta_n}|B_{t_{i+1}^n}(\omega) - B_{t_i^n}(\omega)| = 0$ presque sûrement. Donc
$V_{[s,t]}^B(\omega) \geq \dfrac{V_{\Delta_n}^{(2)}(\omega)}{\sup_{|t_{i+1}^n-t_i^n|\leq\Delta_n}|B_{t_{i+1}^n}(\omega) - B_{t_i^n}(\omega)|} = +\infty \; P.p.s.$

Remarque 2.1. Le mouvement brownien n'est pas à variation bornée, implique que ses trajectoires ne sont pas dérivables á dérivée borné et ne pas dérivable en aucun point.

En effet, lorsqu'une fonction $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ est dérivable á dérivées bornées, pour toute subdivision Δ de $[0,T]$, il existe $s_i^n \in]t_i, t_{i+1}]$ tel que :

$$\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1}) - f(t_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} f'(s_i)|t_{i+1} - t_i| \leq \|f'\|_\infty T.$$

Donc, cette fonction est á variation bornée :

$$\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)|<\infty.$$

On obtient également qu'elle est á variation quadratique nulle :

$$\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)|^2\leq \|f'\|_\infty^2\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)^2\leq \|f'\|_\infty T|\Delta|\to 0.$$

On applique la réciproque de cette raison sur les trajectoires d'un mouvement brownien respectivement on trouve la remarque précédente.

2.1.2 Intégrale de Riemann-Stieltjes

Dans cette partie, on a la subdivision $\{0=t_0^n<\cdots<t_n^n=t\}$ de $[0,t]$ telle que $\lim_{n\to\infty}\max_{0\leq i\leq n-1}|t_{i+1}^n-t_i^n|=0$.

Définition 2.2. (**Intégrale de Riemann**) Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $t>0$. On définit

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(s_i^n)(t_{i+1}^n-t_i^n).$$

Où $s_i^n\in[t_0^n,t_n^n]$.

Définition 2.3. (**Intégrale de Riemann-Stieltjes**) Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue, $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ à variation bornée et $t>0$. On définit

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}g(s)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(s_i^n)(g(t_{i+1}^n)-g(t_i^n)).$$

Où $s_i^n\in[t_0^n,t_n^n]$.

2.2 Intégrale stochastique

Dans cette section on veut donner un sens à la variable aléatoire suivante :

$$\int_a^b X_s\,\mathrm{d}B_s.$$

On sait que le trajectoire $t \longmapsto B_t$ est à variation non bornée, donc on ne peut pas appliquer la théorie de Riemann-Stieltjes, Cependant. En 1949, K.Itô a pu définir l'intégrale stochastique par utilisant la nature stochastique du mouvement brownien.
Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité complet avec la filtration $(\mathcal{F}_t)_{a\leq t\leq b}$ satisfait la condition usuelle. Soit $B = (B_t)_{a\leq t\leq b}$ un mouvement brownien unidimensionnel défini sur un espace de probabilité adapté à la filtration, nous allons construire cette intégrale étape par étape sur l'ensemble

$$\mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R}) = \{\text{une famille des processus} \quad (f(t))_{a\leq t\leq b} \quad \text{dans} \quad \mathcal{L}^p([a,b];\mathbb{R}) \quad \text{tel que} \quad \mathbb{E}\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty\}.$$

Étape 1 :

Définition 2.4. Un processus stochastique $g = (g(t))_{a\leq t\leq b}$ à valeur réelle est appelé un processus simple s'il existe une partition $a = t_0 \leq \cdots \leq t_n = b$ de $[a,b]$, et des variables aléatoires limitées ξ_i, $0 \leq i \leq n-1$ telles que ξ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et

$$g(t) = \xi_0 I_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i I_{(t_i,t_{i+1}]}(t). \tag{2.1}$$

On note $\mathcal{M}_0([a,b];\mathbb{R})$ la famille de tous ces processus.

Il est clair que, $\mathcal{M}_0([a,b];\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$.

Étape 2 :

Définition 2.5. On définie l'intégrale d'ltô d'un processus simple $g \in \mathcal{M}_0([a,b];\mathbb{R})$ avec la forme (2.1) par la variable aléatoire

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}B_t = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),$$

et appelons l'intégrale stochastique de g par rapport à le mouvement brownien B_t ou l'intégrale d'Itô.

Il est clair que, l'intégrale stochastique $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}B_t$ est $\mathcal{F}_b$-mesurable, Le lemme suivant montrer qu'elle appartient à $L^2(\Omega;\mathbb{R})$.

Lemme 2.3. *[9] Si $g \in \mathcal{M}_0([a,b];\mathbb{R})$, Alors*

$$\mathbb{E}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}B_t = 0, \tag{2.2}$$

$$\mathbb{E}\left|\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}B_t\right|^2 = \mathbb{E}\int_a^b |g(t)|^2\,\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

Proposition 2.4. *Soit $f,\ g \in \mathcal{M}_0([a,b];\mathbb{R})$, et soit α, β deux nombres réels, on définie les propriétés suivantes :*

1. *La linéarité : $\mathbb{E}\int_a^b[\alpha f(t) + \beta g(t)]\,\mathrm{d}B_t = \alpha\mathbb{E}(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}B_t) + \beta\mathbb{E}(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}B_t)$;*
2. *$t \mapsto \int_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s$ est continue ;*
3. *$(\int_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s)$ est $\mathcal{F}_b$-adapté ;*
4. *$\mathbb{E}\left(\int_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s\right) = 0$, $Var\left(\int_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_a^b f_s^2\,\mathrm{d}s\right)$;*
5. *Propriété d'Isométrie :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_a^b f_s^2\,\mathrm{d}s\right).$$

Preuve

1. La linéarité de l'intégrale stochastique est immédiate.
2. La continuité de l'intégrale stochastique se lié par la continuité des trajectoires d'un mouvement brownien.
3. Le variable aléatoire $\int_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s$ est $\mathcal{F}_b$-mesurable comme est somme des variables aléatoires $\mathcal{F}_b$-mesurables.
4. On va calculer l'espérance de l'intégrale stochastique

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s\right) &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}(f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i})\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(f_i\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i})\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(f_i\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right) = 0.
\end{aligned}$$

D'après les propriété d'espérance conditionnelle (1.1.1), 5, 6, 7 respectivement.

La calcule de variance

$$\begin{aligned}
&Var\left(\int\limits_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s\right) = \mathbb{E}\left(\int\limits_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s\right)^2 \\
&= \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1} f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(f_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right) + 2\sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n-1} \mathbb{E}\,[\ f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\ ] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\,[\ f_i^2 \mathbb{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i})\ ] \\
&+2\sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n-1} \mathbb{E}\,[\ f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\mathbb{E}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}|\mathcal{F}_{t_j})\ ] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(f_i^2)(t_{i+1} - t_i) + 0 = \mathbb{E}\int_a^b f_s^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

5. Pour montrer la propriété d'isométrie on va calcule

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int\limits_a^b f_s\,\mathrm{d}B_s\right)^2 \\
&= \mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1} f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(f_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right) + 2\sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n-1} \mathbb{E}\,[\ f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\ ] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\,[\ f_i^2 \mathbb{E}((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2|\mathcal{F}_{t_i})\ ] \\
&+2\sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n-1} \mathbb{E}\,[\ f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\mathbb{E}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}|\mathcal{F}_{t_j})\ ] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(f_i^2)(t_{i+1} - t_i) + 0 = \mathbb{E}\int_a^b f_s^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

□

Ètape 3 :

Lemme 2.5. *[9] Pour tout $f \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$, il existe une suite g_n de processus simples tels que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0.$$

Définition 2.6. Soit $f \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$. L'intégrale d'Itô de f par rapport à B_t est définie par

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}B_t = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}B_t \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega,\mathbb{R}).$$

Où g_n une suite de processus simples tels que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_a^b |f(t)-g_n(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0.$$

Théorème 2.6. *Soit $f,g \in \mathcal{M}^2([a,b];\mathbb{R})$, et soit α,β deux nombres réels, on définit les propriétés suivantes :*

1. $\int_a^b f_t\,\mathrm{d}B_t$ *est* $\mathcal{F}_b$*-mesurable ;*
2. $\int_a^b[\alpha f(t)+\beta g(t)]\,\mathrm{d}B_t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}B_t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}B_t$ *;*
3. $\mathbb{E}(\int_a^b f_t\,\mathrm{d}B_t) = 0$ *;*
4. $\mathbb{E}[(\int_a^b f_t\,\mathrm{d}B_t)^2] = \mathbb{E}(\int_a^b f_t^2\,\mathrm{d}t)$.

2.2.1 Intégrale stochastique multidimensionnel

Nous étendons maintenant l'intégrale stochastique d'Itô au cas d-dimensionnel. Soit $(B_t = (B_t^1,\dots,B_t^m))_{t\geq 0}$ être un mouvement brownien m-dimensionnel définie sur un espace de probabilité complet $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, adapté á la filtration $(\mathcal{F}_t)$.
Soit $\mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ une famille de tous les matrices $d\times m$ á valeur mesurable $(\mathcal{F}_t)$-adapté, le processus $f=(f_{ij}(t))_{d\times m}$ pour tout $0\leq t\leq T$, tels que

$$\mathbb{E}\int_0^T |f(s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty.$$

Définition 2.7. Soit $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$. Nous définissons l'intégrale d'Itô multidimensionnel de processus f par

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s = \int_0^t \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{d1} & \dots & f_{dm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}B_s^1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}B_s^m\end{pmatrix}.$$

Être le processus d'une valeur de vecteur colonne de dimension d, dont la ième composante est la somme d'intégrale d'Itô en dimension 1

$$\sum_{j=1}^{m} \int_0^t f_{ij}(s)\,\mathrm{d}B_s^j.$$

Théorème 2.7. *[9] Soit $p > 2$. Soit $f \in \mathcal{M}^2([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$ tel que*

$$\mathbb{E}\int_0^T |f(s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty.$$

Alors

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B(s)|^p\right) \le \left(\frac{p^3}{2(p-1)}\right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}}\mathbb{E}\int_0^T |f(s)|^p\,\mathrm{d}s.$$

2.3 Formule d'Itô

Définition 2.8. Un processus d'Itô uni-dimensionnel est un processus continue adapté $(x(t))_{t\ge 0}$ de la forme

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. On dire que $x(t)$ a un différentiel stochastique $\mathrm{d}x(t)$ sur $[0,T]$ donné par

$$\mathrm{d}x(t) = f(s)\,\mathrm{d}s + g(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Soit $C^{2,1}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ désigne la famille des fonctions réels $V(t,x)$ définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$, tels qu'ils sont continuellement deux fois différentiable en x, et une fois en t. Si $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, nous fixons

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_d}\right).$$

Si $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R};\mathbb{R})$, alors $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$.

Théorème 2.8. *[9](Formule d'Itô)*
Soit $x(t)$ un processus d'Itô avec un différentiel stochastique

$$\mathrm{d}x(t) = f(s)\,\mathrm{d}s + g(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$. Soit $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ alors $V(t,x)$ est à nouveau une processus d'Itô avec le différentiel stochastique donné par

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(t,x(t)) = &\left[V_t(t,x(t)) + V_x(t,x(t))f(t) + \frac{1}{2}V_{xx}(t,x(t))g^2(t)\right]\mathrm{d}t\\ &+ V_x(t,x(t))g(t)\,\mathrm{d}B_t \quad \textit{p.s.}\end{aligned}$$

Définition 2.9. Un processus d'Itô d-dimensionnel $x(t) = (x_1(t),\dots,x_d(t))^T$ sur $t \geq 0$ est un processus continue adapté á valeur dans $\mathbb{R}^d$, de la forme

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Où $f = (f_1,\cdots,f_d) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ et $g = (g_{ij})_{d\times m} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$.On dire que $x(t)$ a un différentiel stochastique $\mathrm{d}x(t)$ sur $[0,T]$ donné par

$$\mathrm{d}x(t) = f(s)\,\mathrm{d}s + g(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Théorème 2.9. *[9](**Formule d'Itô de multidimensionnel**)*
Soit $(x(t))_{t\geq 0}$ un processus de Itô d-dimension avec un différentiel stochastique

$$\mathrm{d}x(t) = f(s)\,\mathrm{d}s + g(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{d\times m})$. Soit $V \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};\mathbb{R}^d)$ alors $V(t,x)$ est à nouveau un processus d'Itô avec le différentiel stochastique donné par

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V(t,x(t)) = &\left[V_t(t,x(t)) + V_x(t,x(t))f(t) + \frac{1}{2}\mathrm{trace}[g(t)^T V_{xx}(t,x(t))g(t)]\right]\mathrm{d}t\\ &+ V_x(t,x(t))g(t)\,\mathrm{d}B_t.\end{aligned}$$

Voyons maintenant introduire formellement une table de multiplication :

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t = 0, && \mathrm{d}B_t\,\mathrm{d}t = 0,\\ &\mathrm{d}B_t\,\mathrm{d}B_t = \mathrm{d}t, && \mathrm{d}B_i\,\mathrm{d}B_j = 0 \ \text{ si } i \neq j.\end{aligned}$$

Où $\mathrm{d}x_i(t)\,\mathrm{d}x_j(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} g_{ik}(t)g_{kj}(t)\,\mathrm{d}t$.
De plus, la formule d'Itô peut s'écrire

$$\mathrm{d}V(t,x(t)) = V_t(t,x(t))\,\mathrm{d}t + V_x(t,x(t))\,\mathrm{d}x(t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x(t)^T V_{xx}(t,x(t))\,\mathrm{d}x(t). \tag{2.4}$$

Théorème 2.10. *[9](**Formule d'intégration par parties**)*
Soit $(x(t))_{t\geq 0}$ un processus 1-dimensionnel d'ltô avec le différentiel stochastique

$$\mathrm{d}x(t) = f(s)\,\mathrm{d}s + g(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Où $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^{1\times m})$. Soit $y(t)$ un processus continue et adapté de variation finie. Puis

$$\mathrm{d}[x(t)y(t)] = y(t)\,\mathrm{d}x(t) + x(t)\,\mathrm{d}y(t). \tag{2.5}$$

C'est-à-dire

$$x(t)y(t) - x(0)y(0) = \int_0^t y(s)[f(s)\,\mathrm{d}s + g(s)\,\mathrm{d}B_s] + \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}y(s). \tag{2.6}$$

Où la dernière intégrale est l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes.

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons définir les équations différentielles stochastiques, leur solution et étudions l'existence et l'unicité de ce solution, et nous souhaitons si possible obtenir la solution explicite d'une équation différentielle stochastique linéaire générale à dimension d.

3.2 Équations différentielles stochastiques

Considérons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet avec la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ qui satisfait les conditions usuelles. Soit $B(t) = (B_1(t), \cdots, B_m(t))^T, t \geq 0$ un mouvement brownien de dimension m défini dans cet espace. Soit $0 < t_0 < T < \infty$, soit x_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_0}$-mesurable tel que $\mathbb{E}|x_0|^2 < \infty$.

Définition 3.1. On appelle équation différentielle stochastique toute équations différentielles de la forme :

$$\mathrm{d}x(t) = f(t, x(t))\,\mathrm{d}t + g(t, x(t))\,\mathrm{d}B(t) \quad \forall t \in [0, T], \tag{3.1}$$

telle que :

1. $(x(t))_{t\geq 0}$ est un processus stochastique à valeur dans $\mathbb{R}^d$;
2. $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $g : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ sont deux fonctions borélienne.

Ce qui, en terme intégrale s'écrit

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))\,\mathrm{d}B(s). \tag{3.2}$$

Exemple 3.1. Si nous choisissons $d = m = 1$ et une fonction $g \in L^2([t_0,t])$, le processus

$$x(t) = \exp(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} g(s)^2\,\mathrm{d}s + \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}B(s)),$$

est une solution de l'équation

$$\mathrm{d}x(t) = g(t)x(t)\,\mathrm{d}B(t), x(t_0) = 1.$$

Dans ce cas, $f(t,x) \equiv 0$ et $G(t,x) = g(t)x$. L'unicité de la solution pour toutes les fonctions g qui sont limitées à $[t_0, T]$. Pour le cas particulier $g = 1$, l'équation

$$\mathrm{d}x(t) = x(t)\,\mathrm{d}B(t),$$

a la solution

$$x(t) = \exp((B(t) - B(t_0)) - \frac{1}{2}(t - t_0)),$$

pour chaque intervalle $[t_0, T] \subset [0, \infty)$.

Définition 3.2. On appelle solution de (3.1) un processus stochastique $(x(t))_{t_0 \leq t \leq T}$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $(x(t))_{t_0 \leq t \leq T}$ est continu et $\mathcal{F}_t$ adapté ;
2. $(f(t, x(t)))_{t_0 \leq t \leq T} \in \mathcal{L}^1([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$, et $(g(t, x(t)))_{t_0 \leq t \leq T} \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$;
3. L'équation (3.2) se tient pour chaque $t \in [t_0, T]$ avec une probabilité 1.

La solution $(x(t))_{t_0 \leq t \leq T}$ est dit unique si n'importe quelle autre solution $(y(t))_{t_0 \leq t \leq T}$ est indistinguable avec $(x(t))_{t_0 \leq t \leq T}$, i.e

$$\mathbb{P}\left\{x(t) = y(t), \quad \forall t_0 \leq t \leq T\right\} = 1.$$

Définition 3.3. (**Types de solution**) Le caractère aléatoire d'équation différentielle stochastique impose plusieurs notions d'existence et d'unicité. On dit qu'il y a

(1) Existence d'une solution faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution x.

(2) Existence et unicité d'une solution faible si tous les processus x solutions de (3.1) ont même loi.

(3) Existence d'une solution forte si (3.1) admet une solution x qui soit adapté à la filtration du Brownien porteur.

(4) Unicité d'une solution forte pour (3.1) si pour tout mouvement brownien B, deux solutions fortes associée à B sont indistinguables.

(5) Unicité trajectorielle si, l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et le Brownien B étant fixés, deux solutions quelconques x et x' de (3.1) sont indistinguables.

Remarque 3.1. 1. Nous exprimons la solution de l'équation (3.1) par $x(t; t_0, x_0)$. On note d'après l'équation (3.2) que pour n'importe $s \in [t_0, T]$,

$$x(t) = x(s) + \int_s^t f(r, x(r))\,\mathrm{d}r + \int_s^t g(r, x(r))\,\mathrm{d}B(r), \quad s \leq t \leq T.$$

Mais, c'est une équation différentielle stochastique sur $[s, T]$ avec la valeur initiale $x(s) = x(s; t_0; x_0)$, dont la solution est désignée par $x(t; s, x(s))$, donc, la solution de l'équation (3.1) satisfait la propriété de semi groupe suivante :

$$x(s) = x(t; s, x(s)), \qquad t_0 \leq t \leq T.$$

2. Les coefficients f et g peuvent être dépende dans une manière générale, et ils sont adaptés.

Exemple 3.2. Plus généralement, considérons une équation différentielle d'ordre d avec bruit de la forme

$$y^{(d)}(t) = F(t, y(t), \cdots, y^{(d-1)}(t)) + G(t, y(t), \cdots, y^{(d-1)}(t))\dot{B}(t), \tag{3.3}$$

où $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{1\times m}$, et $B(t)$ est un mouvement brownien á de dimension m.

On a le processus stochastique $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_d(t))^T = (y(t), \cdots, y^{(d-1)}(t))^T$ á valeur dans $\mathbb{R}^d$, nous pouvons convertir l'équation (3.3) en une équation d' Itô á dimension d

$$\mathrm{d}x(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \\ F(t, x(t)) \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ G(t, x(t)) \end{pmatrix} \mathrm{d}B(t).$$

3.2.1 Existence et unicité de la solution

Dans ce qui suit, on va donner quelque théorème d'existence et l'unicité de la solution d'équation (3.1).

Théorème 3.1. *[9] Supposons qu'il existe deux constantes positives $\bar{K}$ et K tel que*

1. *(**La condition de Lipschitz**) pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [t_0, T]$*

$$|f(t,x) - f(t,y)|^2 \bigvee |g(t,x) - g(t,y)|^2 \leq \bar{K}|x-y|^2, \tag{3.4}$$

2. *(**La condition de croissance linéaire**) pour tout $(t,x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$*

$$|f(t,x)|^2 \bigvee |g(t,x)|^2 \leq K(1+|x|^2). \tag{3.5}$$

Alors, il existe une solution unique $x(t)$ de l'équation (3.1) et cette solution appartient á $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$.

Nous prépare d'abord un lemme.

Lemme 3.2. *[9] Supposons que la condition de croissance linéaire (3.5) se vérifie, si $x(t)$ est une solution de l'équation (3.1), alors*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)|^2\right) \leq \left[1 + 3\mathbb{E}|x_0|^2\right] e^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}. \tag{3.6}$$

En particulier, $x(t)$ appartient á $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$.

Preuve Pour chaque entier $n \geq 1$, définir le temps d'arrêt

$$\tau_n = T \wedge \inf\{t \in [t_0, T] : |x(t)| \geq n\}.$$

Clairement, $\tau_n \uparrow T$ p.s. Définissez $x_n(t) = x(t \wedge \tau_n)$ pour $t \in [t_0, T]$. Alors, $x_n(t)$ satisfait á l'équation

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s)) I_{[[t_0,\tau_n]]}(s)\, \mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} g(s, x_n(s)) I_{[[t_0,\tau_n]]}(s)\, \mathrm{d}B(s).$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $|a+b+c|^2 \leq 3(|a|^2+|b|^2+|c|^2)$, l'inégalité de Hölder et la condition (3.5), on peut montrer que

$$\begin{aligned}
|x_n(t)|^2 &= |x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x_n(s)) I_{[[t_0,\tau_n]]}(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t g(s,x_n(s)) I_{[[t_0,\tau_n]]}(s)\,\mathrm{d}B(s)|^2 \\
&\leq 3|x_0|^2 + 3|\int_{t_0}^t f(s,x_n(s)) I_{[[t_0,\tau_n]]}(s)\,\mathrm{d}s|^2 + 3|\int_{t_0}^t g(s,x_n(s)) I_{[[t_0,\tau_n]]}(s)\,\mathrm{d}B(s)|^2 \\
&\leq 3|x_0|^2 + 3(T-t_0)K\int_{t_0}^t (1+|x_n(s)|^2)\,\mathrm{d}s + 3|\int_{t_0}^t g(s,x_n(s)) I_{[[t_0,\tau_n]]}(s)\,\mathrm{d}B(s)|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, par le Théorème 2.7 et la condition (3.5), on peut en outre montrer que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{t_0\leq s\leq t} |x_n(s)|^2) &\leq 3\mathbb{E}|x_0|^2 + 3(T-t_0)K\int_{t_0}^t (1+\mathbb{E}|x_n(s)|^2)\,\mathrm{d}s \\
&\quad + 12\int_{t_0}^t |g(s,x_n(s))|^2 I_{[[t_0,\tau_n]]}(s)\,\mathrm{d}s \\
&\leq 3\mathbb{E}|x_0|^2 + 3(T-t_0+4)K\int_{t_0}^t (1+\mathbb{E}|x_n(s)|^2)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$1+\mathbb{E}(\sup_{t_0\leq s\leq t} |x_n(s)|^2) \leq 1+3\mathbb{E}|x_0|^2 + 3(T-t_0+4)K\int_{t_0}^t \left[1+\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq r\leq s}|x_n(r)|^2\right)\right]\,\mathrm{d}s.$$

Maintenant, l'inégalité de Gronwall (c'est-à-dire le Théorème 1.8) donne cela

$$1+\mathbb{E}(\sup_{t_0\leq t\leq T} |x_n(t)|^2) \leq (1+3\mathbb{E}|x_0|^2)\mathrm{e}^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(\sup_{t_0\leq t\leq \tau_n} |x(t)|^2) \leq (1+3\mathbb{E}|x_0|^2)\mathrm{e}^{3K(T-t_0)(T-t_0+4)}.$$

Enfin, l'inégalité requise (3.2) suit en laissant $n\to\infty$. □

Preuve de Théorème 3.1

1− L'unicité :

Soit $x(t)$ et $\bar{x}(t)$ deux solutions de l'équation (3.1). Dans le cas de Lemme 3.2, les deux appartiennent à $\mathcal{M}^2([t_0,T],\mathbb{R}^d)$. Il faut noter que

$$x(t)-\bar{x}(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s,x(s))-f(s,\bar{x}(s))]\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} [g(s,x(s))-g(s,\bar{x}(s))]\,\mathrm{d}B(s),\ \ s\leq t\leq T.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, le Théorème 2.7 et la condition (3.4), on peut montrer de la même manière que la preuve de Lemme 3.2 que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq s\leq t}|x(s)-\bar{x}(s)|^2\right)\leq 2\bar{K}(T+4)\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq r\leq s}|x(r)-\bar{x}(r)|^2\right)\mathrm{d}s.$$

L'inégalité de Gronwall donne alors que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0\leq t\leq T}|x(t)-\bar{x}(t)|^2\right)=0.$$

D'où, $x(t)=\bar{x}(t)$ pour $t_0\leq t\leq T$ presque sûrement. L'unicité a été prouvée.

2− L'existence :

Soit $x_0(t)\equiv x_0$ et pour $n=1,2,\ldots,$ on définie l'itération de picard

$$x_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}g(s,x_{n-1}(s))\,\mathrm{d}B(s). \tag{3.7}$$

Pour $t\in[t_0,T]$, bien sûr $x_0(\cdot)\in\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$. En effet, il est facile de remarquer par récurrence que $x_n(\cdot)\in\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$, car nous avons de (3.7) que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|x_n(t)|^2 &\leq 3\mathbb{E}|x_0|^2+3KT\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}(1+|x_{n-1}(s)|^2)\,\mathrm{d}s+3K\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}(1+|x_{n-1}(s)|^2)\,\mathrm{d}s\\ &\leq 3(\mathbb{E}|x_0|^2+KT(T+1))+3K(T+1)\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}|x_{n-1}(s)|^2\,\mathrm{d}s)\\ &\leq c_1+3K(T+1)\int_{t_0}^{t}\mathbb{E}|x_{n-1}(s)|^2\,\mathrm{d}s).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Où $c_1=3(\mathbb{E}|x_0|^2+KT(T+1))$. Il découle également (3.8) que pour toute $k\geq 1$,

$$\begin{aligned}\max_{1\leq n\leq k}\mathbb{E}|x_n(t)|^2 &\leq c_1+3K(T+1)\int_{t_0}^{t}\max_{1\leq n\leq k}\mathbb{E}|x_{n-1}(s)|^2\,\mathrm{d}s\\ &\leq c_1+3K(T+1)\int_{t_0}^{t}(\mathbb{E}|x_0|^2+\max_{1\leq n\leq k}\mathbb{E}|x_n(s)|^2)\,\mathrm{d}s\\ &\leq c_2+3K(T+1)\int_{t_0}^{t}\max_{1\leq n\leq k}\mathbb{E}|x_n(s)|^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Où $c_2=c_1+3KT(T+1)\mathbb{E}|x_0|^2$. L'inégalité de Gronwall implique

$$\max_{1\leq n\leq k}\mathbb{E}|x_n(t)|^2\leq c_2\mathrm{e}^{3KT(T+1)}.$$

Puisque k est arbitraire, nous devons avoir

$$\mathbb{E}|x_n(t)|^2\leq c_2\mathrm{e}^{3KT(T+1)},\quad \text{pour tout } t_0\leq t\leq T,\ n\geq 1. \tag{3.9}$$

Ensuite, nous notons que

$$
\begin{aligned}
&|x_1(t) - x_0(t)|^2 = |x_1(t) - x_0|^2 \\
&\leq 2|\int_{t_0}^{t} f(s,x_0(s))\,\mathrm{d}s|^2 + 2|\int_{t_0}^{t} g(s,x_0(s))\,\mathrm{d}B(s)|^2.
\end{aligned}
$$

En prenant l'espérance et en utilisant (3.5), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|x_1(t) - x_0(t)|^2 \\
&\leq 2K(t-t_0)^2\mathbb{E}(1+|x_0|^2) + 2K(t-t_0)\mathbb{E}(1+|x_0|^2) \leq C,
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

où $C = 2K(T - t_0 + 1)(T - t_0)(1 + \mathbb{E}|x_0|^2)$.
Nous demandons maintenant que pour $n \geq 0$

$$
\mathbb{E}|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \leq \frac{C[M(t-t_0)]^n}{n!} \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq T, \tag{3.11}
$$

où $M = 2\bar{K}(T - t_0 + 1)$. Nous allons le montrer par récurrence. Compte tenu de (3.10) nous voyons que (3.11) tient lorsque $n = 0$. Dans l'hypothèse inductive que (3.11) est valable pour certains $n \geq 0$, nous montrerons que (3.11) est toujours valable pour $n + 1$. Notez que

$$
\begin{aligned}
|x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)|^2 \quad &\leq 2|\int_{t_0}^{t}[f(s,x_{n+1}(s)) - f(s,x_n(s))]\,\mathrm{d}s|^2 \\
&+2|\int_{t_0}^{t}[g(s,x_{n+1}(s)) - g(s,x_n(s))]\,\mathrm{d}B(s)|^2.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

En prenant l'espérance et l'utilisation la condition (3.4) ainsi que l'hypothèse récurrence, nous en déduisons que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)|^2 &\leq 2\bar{K}(t - t_0 + 1)\mathbb{E}\int_{t_0}^{t} |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2\,\mathrm{d}s \\
&\leq M\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}|x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2\,\mathrm{d}s \\
&\leq M\int_{t_0}^{t} \frac{C[M(s-t_0)]^n}{n!}\,\mathrm{d}s = \frac{C[M(t-t_0)]^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

C'est-á-dire que (3.11) est valable pour $n+1$. Par conséquent, par récurrence, (3.11) est valable pour tous les $n \geq 0$. En outre, en remplaçant n dans (3.12) par $n-1$, on voit que

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \leq 2\bar{K}(T-t_0) \int_{t_0}^{T} |x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2 \, \mathrm{d}s$$
$$+ 2 \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\int_{t_0}^{T} [g(s,x_n(s)) - g(s,x_{n-1}(s))] \, \mathrm{d}B(s)|^2.$$

En prenant l'espérance et en utilisant la Théorème 2.7 et (3.11), nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\right) \leq 2\bar{K}(T-t_0+4) \int_{t_0}^{T} \mathbb{E}|x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2 \, \mathrm{d}s$$
$$\leq 4M \int_{t_0}^{T} \frac{C[M(s-t_0)]^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}s = \frac{4C[M(T-t_0)]^n}{(n)!}.$$

En utilisant l'inégalité de Chebyshev, nous trouvons

$$\mathbb{P}\{\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| > \frac{1}{2^n}\} \leq \frac{4C[4M(T-t_0)]^n}{n!}.$$

Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} 4C[4M(T-t_0)]^n/(n)! < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli donne que pour presque tout $\omega \in \Omega$ il existe un nombre entier positif $n_0 = n_0(\omega)$ tel que

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{à chaque fois } n \geq n_0.$$

Il s'ensuite que, avec la probabilité 1, les sommes partielles

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1}(t) - x_i(t)| = x_n(t),$$

convergent uniformément dans $t \in [t_0, T]$. Indiquez la limite par $y(t)$. Il est clair que $y(t)$ est continu en t et $\mathcal{F}_t$-adapté.

D'autre part, on voit d'après (3.11) que pour chaque t, $(x_n(t))_{n\geq 1}$ est également une suite de Cauchy dans L^2. Nous avons donc aussi $x_n(t) \to x(t)$ dans L^2. En conséquence $x(t) = y(t)$ *p.s.* et on a bien le fait de $n \to \infty$ en (3.9) donne

$$\mathbb{E}|x(t)|^2 \leq c_2 \mathrm{e}^{3KT(T+1)}, \quad \text{pour tout } t_0 \leq t \leq T.$$

Par conséquent, $x(t) \in \mathcal{M}^2([t_0,T],\mathbb{R}^d)$. Il reste montrer que $x(t)$ satisfait à l'équation (3.2). Il est à noter que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s\right|^2 \\
&+\mathbb{E}\left|\int_{t_0}^{t} g(s,x_n(s))\,\mathrm{d}B(s) - \int_{t_0}^{t} g(s,x(s)))\,\mathrm{d}B(s)\right|^2 \\
&\leq \bar{K}(T-t_0+1)\int_{t_0}^{t} \mathbb{E}|x_n(t)-x(t)|^2\,\mathrm{d}s \to 0 \\
&\qquad\qquad \text{en tant que } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc laisser $n \to \infty$ in (3.7) pour obtenir cela

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} g(s,x(s))\,\mathrm{d}B(s) \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Comme demandé. La preuve est maintenant complète. $\square$

Théorème 3.3. *[9] Supposons que la condition de croissance linéaire (3.5) se tient, mais la condition de Lipschitz (3.4) est remplacée par la condition de Lipschitz locale suivante : Pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un constante positive K_n tel que, pour tout $t \in [t_0,T]$ et tout $x,y \in \mathbb{R}^d$ avec $|x| \vee |y| \leq n$,*

$$|f(t,x)-f(t,y)|^2 \bigvee |g(t,x)-g(t,y)|^2 \leq K_n|x-y|^2. \tag{3.13}$$

Alors il existe une solution unique $x(t)$ de l'équation (3.1) appartient á $\mathcal{M}^2([t_0,T);\mathbb{R}^d)$.

Théorème 3.4. *[9] Supposons que la condition de Lipschitz locale (3.13) se tient, mais la condition de croissance linéaire (3.5) est remplacée par la condition monotone suivante : Il existe un constante positive K telle que, pour tout $(t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^d$*

$$x^T f(t,x) + \frac{1}{2}|g(t,x)|^2 \leq K(1+|x|^2). \tag{3.14}$$

Alors il existe une solution unique $x(t)$ de l'équation (3.1) appartient á $\mathcal{M}^2([t_0,T];\mathbb{R}^d)$.

Théorème 3.5. *[9] Supposons que pour chaque nombre réel $T > t_0$ et nombre entier $n \geq 1$, il existe une constante positive $K_{T,n}$ tel que, pour tout $t \in [t_0,T]$ et tout $x,y \in \mathbb{R}^d$ avec $|x| \vee |y| \leq n$*

$$|f(t,x)-f(t,y)|^2 \bigvee |g(t,x)-g(t,y)|^2 \leq K_{T,n}|x-y|^2. \tag{3.15}$$

Supposons aussi que pour chaque $T > t_0$, il existe un constante positive K_T tel que pour tout $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$,

$$x^T f(t,x) + \frac{1}{2}|g(t,x)|^2 \leq K_T(1 + |x|^2). \tag{3.16}$$

Alors, il existe une solution globale unique $x(t)$ de l'équation (3.1) avec $t \in [t_0,\infty)$ cette solution appartient á $\mathcal{M}^2([t_0,\infty); \mathbb{R}^d)$.

3.3 Équations différentielles stochastiques linéaires

Tout comme pour les équations différentielles ordinaires, une théorie beaucoup plus complète peut être développé dans le cas stochastique lorsque les coefficients fonctionnels $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont des fonctions linéaires de x, en particulier lorsque b est indépendant de x.

Définition 3.4. Une équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}x(t) = a(t, x(t))\,\mathrm{d}t + b(t, x(t))\,\mathrm{d}B(t) \quad \forall t \geq t_0, \tag{3.17}$$

est dite linéaire si pour le processus d-dimensionnel $x(t)$ les fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont des fonctions linéaires de $x \in \mathbb{R}^d$ sur $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$, autrement dit, si

$$a(t, x) = F(t)x(t) + f(t),$$

$$b(t, x) = G(t)x(t) + g(t),$$

où $F(\cdot)$ est une fonction à valeur matricielle $d \times d$, et $f(\cdot)$ est une fonction á valeur dans $\mathbb{R}^d$, et si

$$b(t, x) = (G_1(t)x(t) + g_1(t), \cdots, G_m(t)x(t) + g_m(t)), \tag{3.18}$$

où $G_k(\cdot)$ est une fonction à valeur matricielle $d \times d$, et $g_k(\cdot)$ est une fonction á valeur dans $\mathbb{R}^d$. Ainsi, l'équation différentielle linéaire a la forme

$$\mathrm{d}x(t) = (F(t)x(t) + f(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m}(G_k(t)x(t) + g_k(t))\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.19}$$

Où $B(t) = (B_1(t), \cdots, B_m(t))^T$ est un mouvement brownien m-dimensionnelle.

Définition 3.5. L'équation linéaire (3.19) est dite homogène si
$f(t) = g_1(t) = \cdots = g_m(t) = 0$.

Définition 3.6. L'équation linéaire (3.19) est dite linéaire au sens étroit si
$G_1(t) = \cdots = G_m(t) = 0$.

Définition 3.7. L'équation linéaire (3.19) est dite autonome si les coefficients F, f, G_k, g_k sont tous indépendants de t.

Tout au long de ce section, nous supposons que F, f, G_k, g_k sont tous des Borel-mesurable et bornées sur $[t_0, T]$. Par le théorème d'existence et l'unicité Théorème (3.1), l'équation linéaire (3.19) a une solution continue unique en $\mathcal{M}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$ pour chaque valeur initiale a $x(t_0) = x_0$, qui est $\mathcal{F}_{t_0}$-mesurable et appartient à $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

3.3.1 Le théorème de l'existence de la solution

Considérons l'équation différentielle stochastique linéaire

$$\mathrm{d}x(t) = F(t)x(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)x(t)\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.20}$$

Sur $[t_0, T]$. Comme on le suppose,

$$F(t) = (F_{ij}(t))_{d\times d}; \quad G_k(t) = (G_{ij}^k(t))_{d\times d}, \tag{3.21}$$

sont tous Borel-mesurable et bornées. Pour chaque $j = 1, \cdots, d$, soit e_j le vecteur colonne-unité dans la direction x_j, c'est-à-dire

$$e_j = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1}_{j}, \cdots, 0)^T.$$

Soit $\Phi_j(t) = (\Phi_{1j}(t), \cdots, \Phi_{dj}(t))^T$ la solution de l'équation (3.20) avec l'initiale valeur $x(t_0) = e_j$. Définissez la matrice $d \times d$

$$\Phi(t) = (\Phi_1(t), \cdots, \Phi_d(t)) = (\Phi_{ij}(t))_{d\times d}. \tag{3.22}$$

Nous appelons $\Phi(t)$ la matrice fondamentale de l'équation (3.20). Il est utile de noter que $\Phi(t_0) =$ la matrice d'identité $d \times d$ et

$$\mathrm{d}\Phi(t) = F(t)\Phi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)\Phi(t)\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.23}$$

L'équation (3.23) peut également être exprimée comme suit : Pour $1 \leq i, j \leq d$,

$$\mathrm{d}\Phi_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{d} F_{il}(t)\Phi_{lj}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{d} G_{il}^{k}(t)\Phi_{lj}(t)\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.24}$$

Le théorème suivant montre que toute solution de l'équation (3.20) peut être exprimée en termes de $\Phi(t)$ et c'est pourquoi $\Phi(t)$ est appelé la matrice fondamentale.

Théorème 3.6. *[9] Étant donné la valeur initiale $x(t_0) = x_0$, la solution unique de l'équation (3.20) est*

$$x(t) = \Phi(t)x_0.$$

Preuve Clairement $x(t_0) = x_0$. En outre, par (3.23)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x(t) = \mathrm{d}\Phi(t)x_0 &= F(t)\Phi(t)x_0\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)\Phi(t)x_0\,\mathrm{d}B_k(t)\\ &= F(t)x(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)x(t)\,\mathrm{d}B_k(t).\end{aligned}$$

Donc $x(t)$ est une solution à l'équation (3.20). Mais par le théorème d'existence et l'unicité, l'équation (3.20) n'a qu'une seule solution. Ainsi, le $x(t)$ doit être le unique. □

Nous désignons maintenant par $W(t)$ le déterminant de la matrice fondamentale $\Phi(t)$, c'est-à-dire

$$W(t) = det.\Phi(t).$$

Nous appelons $W(t)$ le déterminant stochastique Wronskian. Èvidemment, $W(t_0) = 1$. De plus, nous avons la formule stochastique de Liouville suivante.

Théorème 3.7. *[9](**Formule stochastique de Liouville**)*
Le déterminant stochastique Wronskian $W(t)$ a l'expression explicite

$$W(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t}\left(traceF(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} trace[G_k(s)G_k(s)]\right)\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} traceG_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s)\right]. \tag{3.25}$$

On prépare le lemme.

Lemme 3.8. *[9] Soit $a(\cdot), b_k(\cdot)$ des fonctions mesurables de Borel bornées à valeur réelle sur $[t_0, T]$. Puis*

$$y(t) = y_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t} \left(a(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2(s)\right) \mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s)\right], \tag{3.26}$$

est la solution unique à l'équation différentielle stochastique linéaire scalaire

$$\mathrm{d}y(t) = a(t)y(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)y(t)\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.27}$$

Sur $[t_0, T]$ avec la valeur initiale $y(t_0) = y_0$.

Preuve On pose

$$\xi(t) = \int_{t_0}^{t} \left(a(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2(s)\right) \mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s).$$

On peut écrit

$$y(t) = y_0 \exp(\xi(t)),$$

il est claire, $y(t_0) = y_0$. De plus par formule d'Itô, on prend $x(t) = \xi(t)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y(t) &= 0 + y_0 \exp(\xi(t))\,\mathrm{d}\xi(t) + \frac{1}{2}y_0 \exp(\xi(t))(\,\mathrm{d}\xi(t))^2 \\
&= y(t)\left[(a(t) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)\,\mathrm{d}B_k(t)\right] + \frac{1}{2}y(t)\sum_{k=1}^{m} b_k^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a(t)y(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)y(t)\,\mathrm{d}B_k(t).
\end{aligned}$$ □

La formule de Liouville (3.25) implique directement que $W(t) > 0$ p.s. pour tout $t \in [t_0, T]$, qui implique á son tour que $\Phi(t)$ est inversible. Nous avons donc a obtenu le résultat important suivant.

Théorème 3.9. *[9] Pour tout $t \in [t_0, T]$, la matrice fondamentale $\Phi(t)$ est inversible avec probabilité 1.*

On désignera par $\Phi^{-1}(t)$ la matrice inverse de $\Phi(t)$.

Passons maintenant á l'équation différentielle stochastique linéaire générale en dimension d

$$\mathrm{d}x(t) = (F(t)x(t) + f(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m}(G_k(t)x(t) + g_k(t))\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.28}$$

Sur $[t_0, T]$ avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$. L'équation (3.20) est appelée la correspondante équation homogène du système (3.28). Dans cette suite, nous établirons une formule utile appelée une formule de variation des constantes, qui représente la solution unique de l'équation (3.28) en termes de matrice fondamentale du équation homogène correspondante (3.20).

Théorème 3.10. *[9](**La formule de variation des constantes**)*
La solution unique de l'équation (3.28) peut être exprimée comme suit

$$x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\left[f(s) - \sum_{k=1}^{m} G_k(s)g_k(s)\right]\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s)\right). \tag{3.29}$$

Où $\Phi(t)$ est la matrice fondamentale de l'équation homogène correspondante (3.20).

Preuve On pose

$$\xi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\left[f(s) - \sum_{k=1}^{m} G_k(s)g_k(s)\right]\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s). \tag{3.30}$$

Puis le différentiel de $\xi(t)$ est

$$\mathrm{d}\xi(t) = \Phi^{-1}(t)[f(t) - \sum_{k=1}^{m} G_k(t)g_k(t)]\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} \Phi^{-1}(t)g_k(t)\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.31}$$

Soit

$$\eta(t) = \Phi(t)\xi(t). \tag{3.32}$$

Clairement, $\eta(t_0) = x_0$. De plus, par la formule d'Itô

$$\mathrm{d}\eta(t) = \mathrm{d}\Phi(t)\xi(t) + \Phi(t)\,\mathrm{d}\xi(t) + \mathrm{d}\Phi(t)\,\mathrm{d}\xi(t). \tag{3.33}$$

En y substituant (3.23) et (3.31), et en utilisant la table de multiplication formelle

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\eta(t) &= \Big(F(t)\eta(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)\eta(t)\,\mathrm{d}B_k(t)\Big) + \\
&\Big([f(t) - \sum_{k=1}^{m} G_k(t)g_k(t)]\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)\,\mathrm{d}B_k(t)\Big) \\
&+ \Big(F(t)\Phi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)\Phi(t)\,\mathrm{d}B_k(t)\Big) \\
&\times \Big(\Phi^{-1}(t)f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{m} \Phi^{-1}(t)G_k(t)g_k(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} \Phi^{-1}(t)g_k(t)\,\mathrm{d}B_k(t)\Big) \\
&= \Big(F(t)\eta(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)\eta(t)\,\mathrm{d}B_k(t)\Big) + (\ [f(t) - \sum_{k=1}^{m} G_k(t)g_k(t)]\,\mathrm{d}t \\
&+ \sum_{k=1}^{m} g_k(t)\,\mathrm{d}B_k(t)\ ) + \sum_{k=1}^{m} G_k(t)g_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (F(t)\eta(t) + f(t))\,\mathrm{d}t + (\sum_{k=1}^{m} G_k(t)\eta(t) + g_k(t))\,\mathrm{d}B_k(t).
\end{aligned}$$

En d'autres termes, nous avons montré que $\eta(t)$ est une solution de l'équation (3.28) satisfaisant la condition initiale $\eta(t_0) = x_0$. D'autre part, l'équation (3.28) n'a qu'un seule solution $x(t)$. Donc nous devons avoir que $x(t) = \eta(t)$, qui est la formule requise(3.29). $\square$

Puisque nous supposons que $x_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$, les premier et deuxième moments des solutions de l'équation (3.28) existent et sont finies. Le théorème suivant montre que on peut obtenir des premier et second moments en résolvant l'équation différentielle ordinaire linéaire.

Théorème 3.11. [9] *Pour la solution de l'équation (3.28), nous avons :*

(a) $m(t) := \mathbb{E}(x(t))$ est la solution unique de l'équation

$$\dot{m}(t) = F(t)m(t) + f(t). \tag{3.34}$$

Sur $[t_0, T]$ avec la valeur initiale $m(t_0) = \mathbb{E}(x_0)$.

(b) $P(t) := \mathbb{E}(x(t)x^T(t))$ est la solution symétrique unique défini non négative de l'équation

$$\begin{aligned}
\dot{P}(t) &= F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + f(t)m^T(t) + m(t)f^T(t) \\
&+ \sum_{k=1}^{m} [\ G_k(t)P(t)G_k^T(t) + G_k(t)m(t)g_k^T(t) \\
&+ g_k(t)m^T(t)G_k^T(t) + g_k(t)g_k^T(t)\ ].
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Sur $[t_0, T]$ avec la valeur initiale $P(t_0) = \mathbb{E}(x_0 x_0^T)$. Notez que (3.35) représente un système de $d(d+1)/2$ équations linéaires.

Preuve (a) On pose

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (F(s)x(s) + f(s))\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{m} (G_k(s)x(s) + g_k(s))\,\mathrm{d}B_k(s).$$

Prendre l'espérance des deux côtés rapporte

$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^{t} (F(s)m(s) + f(s))\,\mathrm{d}s,$$

qui est la forme intégrale de l'équation (3.34). La conclusion de la partie (a).

(b) Par la formule de Itô,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}[x(t)x^T(t)] = \mathrm{d}x(t)x^T(t) + x(t)\,\mathrm{d}x^T(t) + \mathrm{d}x(t)\,\mathrm{d}x^T(t)\\
&= \mathrm{d}x(t)x^T(t) + x(t)\,\mathrm{d}x^T(t) + \sum_{k=1}^{m}[G_k(t)x(t) + g_k(t)][G_k(t)x(t) + g_k(t)]^T\,\mathrm{d}t\\
&= \Big(F(t)x(t)x^T(t) + f(t)x^T(t) + x(t)x^T(t)F^T(t) + x(t)f^T(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&+ \sum_{k=1}^{m}\Big[G_k(t)x(t)x^T(t) + g_k(t)x^T(t) + x(t)x^T(t)G_k^T(t) + x(t)g_k^T(t)\Big]\,\mathrm{d}B_k(t)\\
&+ \sum_{k=1}^{m}[\, G_k(t)x(t)x^T(t)G_k^T(t) + G_k(t)x(t)g_k^T(t) + g_k(t)x^T(t)G_k^T(t)\\
&+ g_k(t)g_k^T(t)\,]\,\mathrm{d}t\\
&= \Big(F(t)x(t)x^T(t) + f(t)x^T(t) + x(t)x^T(t)F^T(t) + x(t)f^T(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&+ \sum_{k=1}^{m}\Big[(G_k(t)x(t) + g_k(t))x^T(t) + x(t)(G_k(t)x(t) + g_k(t)x(t))^T\Big]\,\mathrm{d}B_k(t)\\
&+ \sum_{k=1}^{m}[\, G_k(t)x(t)x^T(t)G_k^T(t) + G_k(t)x(t)g_k^T(t) + g_k(t)x^T(t)G_k^T(t)\\
&+ g_k(t)g_k^T(t)\,]\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Maintenant, l'équation (3.35) suit en prenant l'espérance des deux côtés de l'intégrale forme de l'égalité ci-dessus. Puisque $P(t)$ est la matrice de covariance de $x(t)$, elle est de cours défini-non négatif et symétrique. □

Le théorème 3.10 nous dit que nous pouvons avoir la solution explicite de l'équation linéaire (3.28) á condition de connaître la matrice fondamentale correspondante $\Phi(t)$. Bien que nous ne puissions pas obtenir la matrice fondamentale explicite $\Phi(t)$ pour chaque cas, nous pouvons l'obtenir pour plusieurs cas importants et nous allons nous tourner vers ces études de cas.

3.3.2 Conditions d'existence de la solution

Définition 3.8. (***Équations linéaires scalaires***)
Nous considérons d'abord l'équation différentielle stochastique linéaire scalaire générale

$$\mathrm{d}x(t) = (a(t)x(t) + \bar{a}(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m}(b_k(t)x(t) + \bar{b}_k(t))\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.36}$$

Sur $[t_0, T]$ avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$. Ici $x_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ est $\mathcal{F}_{t_0}$-mesurable, et $a(t), \bar{a}(t), b_k(t), \bar{b}_k(t)$ sont des fonctions scalaires bornées mesurables par Borel sur $[t_0, T]$. L'équation linéaire homogène correspondante est

$$\mathrm{d}x(t) = a(t)x(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)x(t)\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.37}$$

Par le lemme 3.8, la solution fondamentale de l'équation (3.37) est donnée par

$$\Phi(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t}(a(s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} b_k^2(s))\,\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s)\right]. \tag{3.38}$$

En appliquant le théorème 3.10, on obtient alors la solution explicite de l'équation (3.36)

$$x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)[\bar{a}(s) + \sum_{k=1}^{m} b_k(s)\bar{b}_k(s)]\,\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\bar{b}_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s)\right). \tag{3.39}$$

Définition 3.9. (***Équations linéaires au sens étroit***)
Nous considérons ensuite l'équation différentielle stochastique linéaire à dimension d au sens étroit du terme

$$\mathrm{d}x(t) = (F(t)x(t) + f(t))\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} g_k\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.40}$$

Sur $[t_0, T]$ avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$, où F, f, g_k et x_0 sont identiques à définie au section 3.3. L'équation linéaire homogène correspondante est maintenant l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t). \tag{3.41}$$

Encore une fois, que $\Phi(t)$ soit la matrice fondamentale de l'équation (3.41). Ensuite, la solution de l'équation (3.40) a la forme

$$x(t) = \Phi(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s)\right). \tag{3.42}$$

En particulier, lorsque $F(t)$ est indépendant de t, c'est-á-dire $F(t) = F$ a $d\times d$ constant la matrice fondamentale $\Phi(t)$ a la forme simple $\Phi = \mathrm{e}^{F(t-t_0)}$ et $\Phi^{-1}(t) = \mathrm{e}^{-F(t-t_0)}$ sa matrice inverse . Par conséquent, dans le cas où $F(t) = F$, l'équation (3.40) a la solution explicite

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{F(t-t_0)}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-F(s-t_0)}f(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-F(s-t_0)}g_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s)\right) \\ &= \mathrm{e}^{F(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{F(t-s)}f(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{F(t-s)}g_k(s)\,\mathrm{d}B_k(s). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Définition 3.10. (***Équations linéaires autonomes***)
Nous considérons maintenant l'équation différentielle stochastique linéaire autonome à dimension d

$$\mathrm{d}x(t) = (Fx(t) + f)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m}(G_k x(t) + g_k)\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.44}$$

Sur $[t_0, T]$ avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$, où $F, G_k \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $f, g_k \in \mathbb{R}^d$. L'équation homogène correspondante est

$$\mathrm{d}x(t) = Fx(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k x(t)\,\mathrm{d}B_k(t). \tag{3.45}$$

En général, la matrice fondamentale $\Phi(t)$ ne peut pas être donnée explicitement. Toutefois, si les matrices F,$G_1, \cdots, G_m$ commute, c'est-à-dire si

$$FG_k = G_k F,\;\; G_k G_j = G_j G_k \;\; \text{pour tous} \;\; 1 \le k, j \le m. \tag{3.46}$$

Alors la matrice fondamentale de l'équation (3.45) a la forme explicite

$$\Phi(t) = \exp\left[\left(F - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} G_k^2\right)(t - t_0) + \sum_{k=1}^{m} G_k(B_k(t) - B_k(t_0))\right]. \tag{3.47}$$

Pour le montrer, mettez

$$Y(t) = \left(F - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} G_k^2\right)(t - t_0) + \sum_{k=1}^{m} G_k(B_k(t) - B_k(t_0)). \tag{3.48}$$

Nous pouvons alors écrire

$$\Phi(t) = \exp(Y(t)). \tag{3.49}$$

Par la condition (3.46), nous calculons le différentiel stochastique

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Phi(t) &= 0 + \exp[Y(t)]\,\mathrm{d}Y(t) + \tfrac{1}{2}\exp[Y(t)](\,\mathrm{d}Y(t))^2 \\
&= \Phi(t)\,\mathrm{d}Y(t) + \tfrac{1}{2}\Phi(t)(\sum_{k=1}^{m} G_k^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \Phi(t)(F - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} G_k^2)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k\Phi(t)\,\mathrm{d}B_k(t) \\
&+ \tfrac{1}{2}\Phi(t)\sum_{k=1}^{m} G_k^2\,\mathrm{d}t \\
&= F\Phi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} G_k\Phi(t)\,\mathrm{d}B_k(t).
\end{aligned}$$

En d'autres termes, $\Phi(t)$ satisfait à l'équation homogène et constitue donc la matrice. Enfin, nous appliquons le Théorème 3.10 pour conclure que sous condition (3.46), l'équation linéaire autonome (3.44) a la solution explicite

$$x(t) = \Phi(t)\left[x_0 + \left(\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathrm{d}s\right)\left(f - \sum_{k=1}^{m} G_k g_k\right) + \sum_{k=1}^{m}\left(\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\,\mathrm{d}B_k(s)\right) g_k\right]. \tag{3.50}$$

3.3.3 Exemples

Dans la suite, on prend $B(t)$ un mouvement brownien à une dimension.

Exemple 3.3. (**Le mouvement brownien sur le cercle unitaire**)
Considérons l'équation différentielle stochastique linéaire de dimension 2

$$\mathrm{d}x(t) = -\frac{1}{2}x(t)\,\mathrm{d}t + Kx(t)\,\mathrm{d}B(t) \quad \text{pour } t \geq 0, \tag{3.51}$$

avec la valeur initiale $x(0) = (1{,}0)^T$, où

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En vue de (3.47), la matrice fondamentale correspondante est

$$\Phi(t) = \exp\left[(-\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}K^2)t + KB(t)\right],$$

où I est la matrice d'identité 2×2. Notant que $K^2 = -I$, on obtient

$$\Phi(t) = \exp[KB(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^n B^n(t)}{n!}.$$

Mais

$$K^{2n} = (-1)^n I \quad et \quad K^{2n+1} = (-1)^n K \quad \text{pour } n = 0,1,\cdots .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{K^{2n}B^{2n}(t)}{2n!} + \frac{K^{2n+1}B^{2n+1}(t)}{(2n+1)!}\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n B^{2n}(t)I}{2n!} + \frac{(-1)^n B^{2n+1}(t)K}{(2n+1)!}\right].\end{aligned}$$

Maintenant, par (3.50), la solution unique de l'équation (3.51) est

$$x(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n B^{2n}(t)}{2n!}\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n B^{2n+1}(t)}{(2n+1)!}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos B(t)\\ \sin B(t)\end{pmatrix},$$

et c'est le mouvement brownien sur le cercle unitaire.

Exemple 3.4. (**Le pont brownien**)

Soit a, b deux constantes. Considérons l'équation linéaire à une dimension

$$\mathrm{d}x(t) = \frac{b - x(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B(t) \quad \text{pour } t \in [0,1[. \tag{3.52}$$

Avec la valeur initiale $x(0) = a$.

On voir que (3.52) est un équations linéaires au sens étroit. Donc la solution fondamentale correspondante d'après (3.41) est

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{1}{1-t}\Phi(t).$$

Donc

$$\Phi(t) = \exp\left[-\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{1-s}\right] = 1 - t.$$

Par conséquent, par (3.39), la solution de l'équation (3.52) est

$$\begin{aligned}x(t) &= \Phi(t)\left(x_0 + \left[\int_0^t \Phi^{-1}(s)\frac{b}{1-s}\,\mathrm{d}s + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\,\mathrm{d}B(s)\right]\right)\\ &= (1-t)\left(a + b\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{(1-s)^2} + \int_0^t \frac{\mathrm{d}B(s)}{(1-s)}\right)\\ &= (1-t)a + bt + (1-t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}B(s)}{(1-s)}\end{aligned}$$

La solution est appelée le pont brownien de a à b.

C'est un processus gaussien avec moyenne

$$\mathbb{E}x(t) = (1-t)a + bt,$$

et la variance

$$var(x(t)) = t(1-t).$$

Conclusion

L'objet de ce travail a été l'étude de l'existence et l'unicité d'un certains types d'équations différentielles stochastiques. Une application a été donné pour l'équations différentielles stochastiques linéaires. En plus, la définition d'équation différentielle stochastique linéaire et leurs différents types ont été données.

Deux exemples d'équations différentielles stochastiques linéaires ont été donnés. Le premier exemple est un équation dont la solution est le mouvement brownien sur le cercle unitaire et l'autre exemple est une équation dont la solution est le pont brownien.

Le présent travail peut étendu à l'étude d'autres propriétés d'équations différentielles stochastiques telle par exemple les équations différentielles stochastiques dans des espaces de dimension infini.

Bibliographie

[1] Bharucha-Reid. A. T. "Stochastic Differential Equations" : *Theory and Applications* (Ludwig Arnold), 1976.

[2] Cao, J., Huang, Z., et Zeng, C. "Existence and Uniqueness of Solution for a Class of Stochastic Differential Equations". *The Scientific World Journal*, 2013.

[3] Chang. Y. K, Zhao. Z. H et N'Guérékata. G. M. "Square-mean almost automorphic mild solutions to some stochastic differential equations in a Hilbert space". *Advances in Difference Equations*, 2011(1), 9.

[4] Ciprian. T. "Cours de calcul stochastique", *Sorbonne Paris* 1, 2008.

[5] ELIE, R. et KHARROUBI, I. "Calcul stochastique appliqué à la finance". *ENSAE Avril*, 2006.

[6] Evans, L.C. "An introduction to stochastic differential equations version 1.2." Lecture Notes, UC Berkeley (2006).

[7] Jean-Christophe, B."Processus stochastique". *Université de Rennes 1*, 2013.

[8] Lévêque, O. "Cours de probabilités et calcul stochastique". No. LECTURE. 2005.

[9] Mao, X. "Stochastic differential equations and applications". Elsevier,2007 Dec 13.

[10] Monique. J, (2006) "Cours de Calcul stochastique".

[11] Ocone. D, Pardoux. É. "Linear stochastic differential equations with boundary conditions". *Probability Theory and Related Fields*, 82.4(1989) : $489 - 526$.

[12] Oksendal. B."Stochastic differential equations : an introduction with applications". *Springer Science et Business Media*, 2013.

[13] Øksendal, B. "Stochastic differential equations". *In Stochastic differential equations.* Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. 65 − 84.

[14] Velenik. Y. "Probabilités et Statistique", *université de genéve* (2011).