Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université D'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

REGUIBI Talia

Thème

Approximation du Problème Neumann-Kelvin

Soutenu le 25/10/2020 devant le jury composé de :

M. MAMOUNI Touhami	Maître assistant A	Université d'Adrar	Président
M. BOUAZIZ Said	Maître assistant A	Université d'Adrar	Rapporteur
M. KHALLADI Mohammed Taha	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Examinateur

2019-2020

Remerciement

Je remerce en premier lieu notre le bon Dieu " ALLAH " qui nos facilité la tache, et ma donne la force et la volonté pour bien réaliser ce travail.

Ma plus grands remerciements vont à " Mr. S. Bouaziz " notre encadreur Pour j'avoir guider pour la réalisation de cette étude et le soutien scientifique et Morale qu'il j'a apporté, mais surtout pour ma avoir insufflé le désir et la passion de la recherche, qui trouve dans ces mots l'expression de ma vif remerciements.

Je remerci le nombre de jury consiste de Mr. MAMOUNI Touhami et Mr. KHALLADIMouhamed Taha a l'acception du discouté notre mémoire.

En remercie les on ne remercie pas de Dieu. je remerce tous les enseignants qui étudier en tous les années, et tous les enseignants de département de LMD des Mathématiques et Informatiques. je remerce tous les étudions qui soutien et réaliser de cette mémoire.

Dédicace

Tous mes remerciements *à* dieu le Tout-puissant et que la grâce et paix Soient sur notre prophète Mohammed.

Je dédie ce modeste travail :

À ma très chère mère.

À mon très cher père,

qui m'ont tant contenu et encouragé dans tout les domaines d'étudier et surtout pour réaliser ce mémoire.

À mes petit enfants, Mouhammed El Cherif et Seradj El Ddinne.

À mes sœurs et frères, *à* mes nièces et neveux chaque un par son nom

À mon très cher mari, pour leur patience

À ma grande mère

À toute ma famille ;

À tous mes amis et toute ma promotion Des mathématiques de l'anné 2019-2020.

R.TALIA

Table des matières

Introduction

Les problèmes des ondes de surface libre est d'une importance notable pour l'étude de la résistance à l'avancement d'une bateau et donc dans le domaine naval dans l'optimisation de la forme des coques des bateaux pour avoir une résistance minimale.

L'objectif de ce mémoire est d'étudie l'approximation du problème de Neuman-Kelvin. Le problème est déterminé par un écoulement plan de fluide dans un canal de profondeur finie avec un obstacle (cylindre) qui flotte sur la surface du fluide. on suppose que l'écoulement est incompressible, irrotationnel, non visqueux, et se déplace à une vitesse uniforme dans une direction parallèle à le profondeur. Le problème se caractérise par une condition non linéaire (condition de Bernoulli) sur la surface libre ; de plus la surface libre elle rencontre l'obstacle en des points inconnus.

Par ces dispositifs, il est difficile d'établir la solvabilité exacte de ce problème. Alors, on suppose que le profil de la surface libre a une perturbation assez petite (assimilable à une ligne) de sorte qu'on peut considérer une approximation linéaire de la condition de Bernoulli sur une frontière fixe. Par ailleurs, le fluide est supposé avoir une profondeur finie ou infinie. Le problème linéairisé est connu comme problème de Neumann-Kelvin. Le paramètre approprié pour les propriétés des solutions du problème Neumann-Kelvin est le nombre Fr de Froude défini par

$$Fr = \frac{C}{\sqrt{gH}},$$

où C est la vitesse de l'écoulement par rapport à un repère lié à l'obstacle (voire chapitre 2), H la profondeur de fluide, et g l'accélération de la pesenteur. On dit que le mouvement

du cylindre est supercritique si $Fr > 1$ et sous critique si $Fr < 1$. Clairement, dans le cas du fluide de profondeur infinie, l'écoulement est sous critique pour chaque valeur de C.

Le but du travail actuel est de approximer le problème pour trouver la solution.

Cette mémoire constitué par une introduction, cinque chapitre, conclusion et bibliographie.

Dans le premier chapitre, on va déduit une rappels de quelques résultats fondamentaux à l'analyse fonctionnel et complexe.

Dans le deuxième chapitre, on va poser le problème qui s'intéresse à l'étude du problème d'un écoulement plan de fluide, puis on va trouver les conditions aux limites conserne et linéairisé le problème pour un obstacle mince.

Dans le troisième chapitre, on va formalisé le problème non perturbé (linéairisé) pour le champ de vitesse et on cherche à la solution du problème Neumann-Kelvin.

Depuis, on va considère la régularité de la solution. Dans le cas sous critique on attend des solutions seulement pour des configurations spéciales des donnés de frontière, ou pour des valeurs particulières de la vitesse C.

Le quatrième chapitre, est consacré d'étudier l'existence et l'unicité de la solution. Et on essaiera de montrer, pour chaque valeur de C dépendant seulement de la longueur de la coque et la profondeur de fluide, il existe un sous-espace des données de frontière ce qui détermine uniquement les champs de vitesse ce qui sont continus et bornes parout dans la bande (voir chapitre 3).

Dans la dérnier chapitre, on va résolu notre problème en utilise la méthode d'éléments finis en dimension deux pour numériser la solution. Par, on va présenter leur principe, puis en cherche à la solution approché pour établir la solution exacte, avec supposera l'éléments sont de la forme de rectangle.

Notation

Ω : un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$\triangle U = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}$: laplaciènne de U.

$\nabla U = (\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_N})$: grad de U.

m : un entier.

$\partial_x U$: la dérivé de U par rapport à x.

w_x : la dérivé de w par rapport à x.

Espaces fonctionnels (concrets)

$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfinimments différentiable sur Ω à support compact.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ = l'espace des distributions sur Ω.

S' : l'espace des distributions tempérées.

$\hat{u}$: désigne la transformée de fourier de u.

$Supp\psi$: support de la fonction ψ.

$L^2(\Omega)$: l'espace des fonctions puissances 2-ième sommable sur Ω pour la mesure $dx = dx_1, \ldots, dx_2$; $\| f \|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

C^k : l'espace des fonctions $k-$fois continues différentiables sur Ω, avec $k = \overline{0,2}$.

H^s : l'espace de sobolev défini par : $H^s = \{u \in S', (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2\}$.

H^0, H^1, H^m : espaces de sobolev.

$mes(\Gamma)$: mesure de surface sur Γ.

$S_{H,M}$ la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -H \leq y \leq 0 \quad \text{et} - M \leq x \leq M\}$

Chapitre 1

Rappels de quelques résultats fondamentaux

1.1 Rappels sur l'analyse complexe

1.1.1 Les équations de Cauchy-Riemann

Définition 1.1. Soit f une fonction à variable complexe définie sur Ω dans un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est **holomorphe** en z_0 (resp. sur Ω), si elle est dérivable en z_0 (resp. sur Ω).

Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Désignons par U et V les parties réelle et imaginaire de f. Les équations de Cauchy-Riemann sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_x U = \partial_y V, \\ \partial_y U = -\partial_x V. \end{cases}$$

1.1.2 Harmonique conjugué

Soit $[a, b]$ un intervalle de la droite réelle et Ω un domaine de $\mathbb{C}$.

Définition 1.2. On appelle chemin dans Ω, toute fonction continue γ de $[a, b]$ dans Ω. Les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont dits l'origine et l'extrémité du chemin γ.

Un chemin γ dans Ω est fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 1.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ_0 et γ_1 deux chemins fermés dans Ω et définis sur le même intervalle $[0, 1]$. On dit que γ_0 est **homotope** *à* γ_1 dans Ω s'il existe une fonction continue Ψ de $[0, 1]^2$ dans Ω telle que :

1. $\Psi(t,0) = \gamma_0(t)$ et $\Psi(t,1) = \gamma_1(t), \forall t \in [0,1]$,
2. $\Psi(0,t) = \Psi(1,t), \quad \forall t \in [0,1]$.

Si γ_0 et γ_1 sont deux chemins homotopes dans Ω, et si γ_1 est constante, on dit que γ_0 est **homotope à un point** dans Ω.

Définition 1.4. On dit que Ω est **simplement connexe** si tout chemin fermé tracé sur Ω est homotope *à* un point.

Soit U une fonction réelle harmonique ($\triangle U = 0$) dans un ouvert Ω, un domaine de $\mathbb{R}^2$. En général, il n'existe pas de fonction f holomorphe dont la partie réelle soit égale *à* U.

Théorème 1.1. *Toute fonction réelle harmonique U, dans un ouvert simplement connexe Ω, est la partie réelle d'une fonction holomorphe f dans Ω.*

Définition 1.5. On appelle **harmonique conjugu**é de U la fonction V telle que

$$V = Imf$$

.

1.2 Quelques outils d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Espace de Sobolev

Espaces $H^1(\Omega)$, $H^m(\Omega)$

On adoptera dans ce qui suit les notations suivantes :
Ω désignera un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_j \in \mathbb{N},\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

un multi indice.

On notera :

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \quad \text{où} \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Si T est une distribution, $D^\alpha T$ désignera la dérivée d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ de T au sens des distributions (voir[9]).

Définition 1.6. On note $H^1(\Omega)$ l'espace des distributions identifiables *à* des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées partielles sont identifiables *à* des fonctions de $L^2(\Omega)$.

On adoptera la notation abrégée suivante :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n \right\}$$

Plus généralement on introduit les espaces suivants.

Définition 1.7. Pour m, on note :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) \Big/ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m \right\}.$$

Alors pour $m = 0$, on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour $m = 1$, on retrouve l'espace introduit dans la définition1.6.

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx, \tag{1.1}$$

et la norme associée *à* ce produit scalaire est :

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

Proposition 1.2. *Soit m un entier positif ou nul, alors :*

i) $H^m(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$.

ii) $H^m(\mathbb{R}^n)$ *coïncide avec l'espace des distributions tempérées u telles que :*

$$(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

.

iii) La norme est coïncide à la norme définie par

$$|u|_{m,\mathbb{R}^n} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Remarque 1.1. Le résultat $ii)$ de la proposition suggère de définir de nouveaux espaces contenant comme cas particulier les espaces H^m. En effet, même si la définition, utilise m entier, elle peut s'étendre *à* des valeurs non entières de m. C'est l'objet du paragraphe suivant. [4]

Espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.8. Pour $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions u tempérées réelles, telles que :

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \xi \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

On munit $H^s(\mathbb{R}^n)$ du produit scalaire :

$$(u,v)_s = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\hat{u}(\xi).\hat{v}(\xi)d\xi$$

et la norme associée est :

$$|u|_{s,\mathbb{R}^n} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Remarque 1.2. Pour $s = m$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ coïncide d'après la proposition 1.2 avec l'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$ de la définition 1.7 et les structures préhilbertiennes définies par les produits scalaires (1.1) et (1.2) sont les mêmes.

Théorème de trace pour $H^m(\mathbb{R}^n_-)$

On pose

$$\Gamma \quad = \quad \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n = 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}\} \equiv \mathbb{R}^{n-1}.$$

Pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_-})$, on peut définir une application

$$\gamma_0 : u \longrightarrow \gamma_0 u \quad \text{telle} \quad \text{que} \quad x' \longrightarrow \gamma_0 u(x') = u(x', 0); \tag{1.3}$$

γ_0 ainsi définie est linéaire de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_-})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Théorème 1.3. *i) L'application linéaire γ_0 définie par (1.3) est continue de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_-})$ muni de la topologie de $H^1(\overline{\mathbb{R}^n_-})$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ muni de la topologie induite par $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.*

ii) Elle se prolonge donc en une application linéaire continue de $H^1(\overline{\mathbb{R}^n_-})$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ notée encore γ_0 qui est surjective.

Remarque 1.3. L'application γ_0 est appelée application trace d'ordre zéro.

Norme équivalente

Théorème 1.4. *Soit Ω un domaine borné à frontière lipschizienne. Soit $\Gamma \subset \partial\Omega$ tel que $mes(\Gamma) \neq 0$. Pour $u \in H^1(\Omega)$:*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \leq \quad const\left(\int_\Gamma |u|^2 ds + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Ligne de courant : On appelle "ligne de courant" une courbe dont la direction tangente en chacun de ses points est la direction du vecteur vitesse.

Formule de Green :

Théorème 1.5. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega = \Gamma$ est continue, admettant tout au plus des discontinuités de première espèce pour le vecteur tangent (i.e,*

typiquement des points anguleux). Si u et v sont deux fonctions des variables $(x_1, \ldots, x_n)$, définies de Ω à valeurs réelles, appartenant à $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i d\Gamma.$$

Où ν_i désigne la composante selon la i-ième coordonnée x_i, du vecteur normal $\overrightarrow{v}$, extérieur à l'ouvert Ω.

Variante de la Formule de Green :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega = \Gamma$ est continue, admettant tout au plus des discontinuités de première espèce pour le vecteur tangent (i.e, typiquement des points anguleux). Si u et v sont deux fonctions des variables $(x_1, \ldots, x_n)$, définies de Ω à valeurs réelles, tels que :

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

on a alors :

$$\int_\Omega \Delta u . v d\Omega = -\int_\Omega \overrightarrow{\nabla} u . \overrightarrow{\nabla} v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma.$$

Où ν désigne le vecteur normal extérieur à l'ouvert Ω et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ la projection du vecteur gradient dans la direction de la normal ν.

Chapitre 2

Position du problème

On s'intéresse à l'étude du problème d'un écoulement plan de fluide, dans un canal de profondeur H finie avec un obstacle (cylindre) qui flotte sur la surface du fluide. L'écoulement se fait de la gauche vers la droite avec une vitesse initiale horizontale C. Ce problème peut modéliser l'écoulement de l'eau dans une rivière ou un fleuve.

On choisit un repère d'origine lié à l'obstacle ; l'axe des abscisses est dirigé suivant la direction de l'écoulement, la surface calme du fluide (sans obstacle) est alors la droite $\{Y = 0\}$ et le fond de canal est la droite $\{Y = -H\}$.

On suppose que l'obstacle est "mince" dans le sens suivant : la coupe de la "coque" est décrite par l'équation :

$$Y = \epsilon f(X), \tag{2.1}$$

où $\epsilon > 0$ est un petit paramètre et f est une fonction de classe C^1 définie dans un certain intervalle J, et strictement négative sur un certain sous-intervalle contenu dans J.

La surface libre du fluide est donnée par l'équation $Y = h(X)$ où h est une fonction régulière inconnue définie sur $\mathbb{R}/[X_-, X_+]$ avec $X_\pm \in J$.

Les deux nombres X_- et X_+ sont les abscisses inconnues des points où la surface libre rencontre la coque, de sorte que $h(X_\pm) = \epsilon f(X_\pm)$ (figure1).

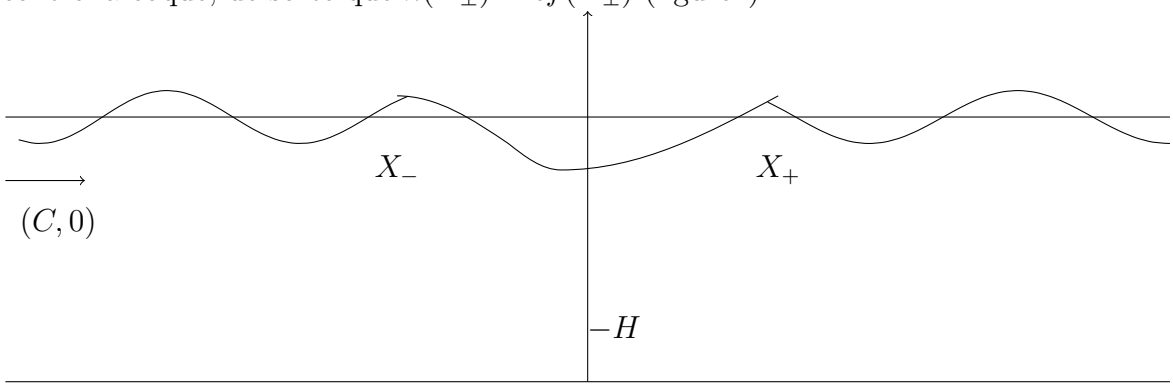


figure1

On étudie le cas où la vitesse C de l'écoulement non perturbé est sous critique (fluvial) c'est-à-dire :

$$C \quad < \quad \sqrt{gH} \tag{2.2}$$

où g est l'accélération de la pesenteur.

Comme dans ce type des problèmes on travaille souvent dans le plan complexe, pour la variable $Z = X + iY$, et on note par $W(Z) = U(X, Y) - iV(X, Y)$ la fonction complexe des vitesses de l'écoulement perturbé (avec l'obstacle), U et V étant les composantes de classe C^1 du vecteur vitesse.

On suppose que le fluide est incompressible, et irrotationnel. On a :

$$\left(div \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = 0 \right) \iff (\partial_X U = -\partial_Y V),$$

et

$$\left(rot \begin{pmatrix} U \\ V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \iff (\partial_Y U = \partial_X V),$$

donc W est holomorphe.

2.1 Equation de Bernoulli

On considère l'équation d'Euler[5]

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (w\nabla)w = -\frac{\nabla P}{\rho}, \tag{2.3}$$

où P la pression prise sur l'unité de volume, ρ la masse de l'unité de volume du fluide, et w la vitesse d'une particule déterminée se déplaçant dans l'espace. Cette vitesse doit être exprimée en fonction des quantités relatives aux points fixes de l'espace.

On utilise la formule d'analyse vectorielle :

$$\frac{1}{2}\nabla|w|^2 = w \times rotw + (w\nabla)w,$$

on pourra écrire (2.3) sous la forme :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla|w|^2 - w \times rotw = -\frac{\nabla P}{\rho}, \tag{2.4}$$

L'écoulement stationnaire est tel qu'en chaque point de l'espace occupé par le fluide, la vitesse d'écoulement reste constante au cours du temps. Autrement dit, $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$. L'équation (2.4) se réduit à présent à l'égalité :

$$\frac{1}{2}\nabla|w|^2 - w \times rotw = -\frac{\nabla P}{\rho}. \tag{2.5}$$

Introduisions la notion de lignes de courant, dont les tangentes indiquent la direction du vecteur vitesse au point de tangence à l'instant donné ; elles sont déterminées par le système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}.$$

Dans le cas où le mouvement du fluide est stationnaire, les lignes de courant restent invariables dans le temps et coïncident avec les trajectoires des particules du fluide.

On multiple l'équation (2.5) par le vecteur unité de la tangente à la ligne de courant en chacun de ses points ; notons ce vecteur l.

On sait que la projection du gradient sur une certaine direction est égale à la dérivée dans cette direction. La projection cherchée de ∇P est $\frac{\partial P}{\partial l}$. En ce qui concerne le vecteur $w \times rotw$, étant normal à la vitesse w, sa projection sur la direction l est nulle.

De la sorte, on déduit de (2.5) :

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{|w|^2}{2}+\frac{P}{\rho}\right) = 0.$$

Il en résulte que la quantité $\frac{|w|^2}{2}+\frac{P}{\rho}$ est constante le long d'une ligne de courant :

$$\frac{|w|^2}{2}+\frac{P}{\rho} = const. \tag{2.6}$$

La valeur de la constante diffère en général d'une ligne de courant à une autre. (2.6) est **l'équation de Bernoulli** [1].

Si l'écoulement du fluide s'effectue dans le champ de pesanteur, il faudra ajouter encore au second membre de l'équation (2.5) l'accélération de la pesanteur g. Prenons l'axe des z dans la direction de la pesanteur, les z étant positifs vers le haut. Alors le cosinus de l'angle entre les directions g et l est égale à la dérivée $-\frac{dz}{dl}$, de sorte que la projection de g sur l est :

$$-g\frac{dz}{dl}.$$

Ceci étant, nous aurons à présent :

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{|w|^2}{2}+\frac{P}{\rho}+gz\right) = 0.$$

Ainsi donc, l'équation de Bernoulli stipule que le long d'une ligne de courant reste constante la somme :

$$\rho\frac{|w|^2}{2}+P+\rho gz = Const. \tag{2.7}$$

On suppose un fluide incompressible (ρ constant, d'après la loi de conservation de la masse), parfait (sans viscosité), en régime permanent, irrotationnel (et sans transfert de chaleur).

L'équation traduit en fait la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant :

1. L'équation de Bernoulli a été établie en 1739 par Daniel Bernoulli

$$e_c = \frac{1}{2V} m|w|^2 \quad = \quad \rho \frac{|w|^2}{2}$$

e_c est la densité volumique d'énergie cinétique (énergie cinétique par unité de volume, m étant la masse du volume V de fluide) ;

$$e_z = \frac{m}{V} gz = \rho g z$$

e_z est la densité volumique d'énergie potentielle de gravité ;

$$e_p = \frac{1}{V} PV = P$$

e_P est la densité volumique d'énergie élastique.

La loi de conservation s'écrit donc :

$$e_c + e_z + e_p = const.$$

On applique l'équation (2.7) à notre problème :

$$\frac{1}{2}|W(X,Y)|^2 + gY + \frac{P}{\rho} = const. \tag{2.8}$$

Cette formule est l'équation de Bernoulli sur toutes les lignes de courants.

La pression sur la surface libre est constante. Donc pour la surface libre on obtient la condition de Bernoulli :

$$\frac{1}{2}|W(X,h(X))|^2 + gh(X) + \frac{P}{\rho} = const, \qquad X < X_- \quad ou \quad X > X_+.$$

2.2 Autres conditions aux limites

Comme le fluide ne traverse pas la surface libre :

$$\overrightarrow{W}.\overrightarrow{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \setminus Y = h(X), \quad \text{si} \quad X < X_- \quad ou \quad X > X_+\},$$

avec

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} h'(X) \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$V(X, h(X)) = h'(X)U(X, h(X)), \quad \text{pour} \quad X < X_- \quad ou \quad X > X_+.$$

De plus, sur la coque, le fluide ne traverse pas la surface mouillée de la coque :

$$\overrightarrow{W}.\overrightarrow{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \setminus Y = \epsilon f(X), \quad \text{si} \quad X_- \leq X \leq X_+\},$$

avec

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \epsilon f'(X) \\ -1 \end{pmatrix};$$

donc

$$V(X, \epsilon f(X)) = \epsilon f'(X)U(X, \epsilon f(X)), \quad \text{pour} \quad X_- \leq X \leq X_+.$$

Nous pouvons maintenant énoncer notre problème sous la forme suivante :

Problème : Trouver les deux nombres réels $X_- < 0$ et $X_+ > 0$, la fonction $h \in C^1(\mathbb{R})$ et la fonction complexe $W(Z) = U(X,Y) - iV(X,Y)$ holomorphe, du problème suivant :

$$\frac{1}{2}|W(X,h(X))|^2 + gh(X) = constante, \quad X < X_- \quad ou \quad X > X_+ \tag{2.9}$$

$$V(X,h(X)) = h'(X)U(X,h(X)), \quad \text{pour} \quad X < X_- \quad ou \quad X > X_+, \tag{2.10}$$

$$V(X,\epsilon f(X)) = \epsilon f'(X)U(X,\epsilon f(X)), \quad \text{pour} \quad X_- \leq X \leq X_+, \tag{2.11}$$

$$V(X,-H) = 0, \quad X \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

$$\lim_{X\to-\infty} W(Z) = C, \tag{2.13}$$

$$\lim_{X\to-\infty} h(X) = 0, \tag{2.14}$$

Condition de continuité :

$$h(X_\pm) = \epsilon f(X_\pm) \tag{2.15}$$

Les équations (2.13) et (2.14) représentent la condition que le fluide est non perturbé à l'infini, et la condition (2.12) montre que le flux ne traverse pas la surface du fond.

On note qu'il n'y a pas des conditions à $+\infty$.

Maintenant nous pouvons linéairiser le problème.

2.3 Linéairisation du problème

Nous exposons comment, par définition, s'obtiennent formellement les équations et les conditions aux frontières du problème linéaire associés à notre mouvement, appelé mouvement non perturbé.

Prenons (2.9), nous posons :

$$\lim_{X\to-\infty}\frac{1}{2}|W(X,h(X))|^2+gh(X)=constante;$$

d'après (2.13) et (2.14) on a donc

$$constante=\tfrac{1}{2}C^2.$$

On translate l'origine au centre des deux points X_- et X_+, de telle sorte, qu'on peut prendre les valeurs $X_\pm$ égal à $\pm x_0$ où $x_0>0$.

De plus, on suppose que, le problème a une perturbation assez petite. On présente les nouvelles fonctions u,v,$\widetilde{h}$ par les relations :

$$U(X,Y)=C+\epsilon u(x,y),\quad V(X,Y)=\epsilon v(x,y),\quad h(X)=\epsilon\widetilde{h}(x). \tag{2.16}$$

En utilisant (2.16) dans (2.9), on obtient :

$$\frac{1}{2}\left|C+\epsilon u(x,\epsilon\widetilde{h}(x))+i\epsilon v(x,\epsilon\widetilde{h}(x))\right|^2+g\epsilon\widetilde{h}(x)=\frac{1}{2}C^2,\quad |x|>x_0.$$

Donc

$$C\epsilon u(x,\epsilon\widetilde{h}(x))+\frac{\epsilon^2}{2}\left[u^2(x,\epsilon\widetilde{h}(x))+v^2(x,\epsilon\widetilde{h}(x))\right]+g\epsilon\widetilde{h}(x)=0,\quad |x|>x_0,$$

d'où

$$u(x,\epsilon\widetilde{h}(x))+\frac{\epsilon}{2C}\left[u^2(x,\epsilon\widetilde{h}(x))+v^2(x,\epsilon\widetilde{h}(x))\right]+\frac{g}{C}\widetilde{h}(x)=0,\quad |x|>x_0.$$

Et pour $\epsilon \longrightarrow 0$ on obtient :

$$u(x,0) + \frac{g}{C}\widetilde{h}(x) = 0, \quad |x| > x_0. \tag{2.17}$$

En utilisant (2.16) dans (2.10), on obtient :

$$v(x, \epsilon\widetilde{h}(x)) = \widetilde{h}'(x)\Big[\epsilon u(x, \epsilon\widetilde{h}(x)) + C\Big], \quad |x| > x_0.$$

Et pour $\epsilon \longrightarrow 0$ on obtient :

$$v(x,0) = C\widetilde{h}'(x), \quad |x| > x_0. \tag{2.18}$$

On dérive l'équation (2.17) par rapport à x, et on obtient :

$$\partial_x u(x,0) + \frac{g}{C}\widetilde{h}'(x) = 0, \quad |x| > x_0, \tag{2.19}$$

et d'après l'équation (2.18) on remplace $\widetilde{h}'$ par $\frac{1}{C}v(.,0)$ dans (2.19) ; on obtient alors :

$$\partial_x u(x,0) + \frac{g}{C^2}v(x,0) = 0, \quad |x| > x_0.$$

Maintenant, par l'équation de Cauchy-Riemann $\partial_x u = \partial_y v$, on obtient la condition :

$$\partial_y v(x,0) + \frac{g}{C^2}v(x,0) = 0, \quad |x| > x_0. \tag{2.20}$$

En outre, en utilisant (2.16) dans (2.11) on obtient :

$$v(x, \epsilon f(x)) = f'(x)[C + \epsilon u(x, \epsilon f(x))]$$

Pour $\epsilon \longrightarrow 0$ on trouve :

$$v(x,0) = Cf'(x), \quad |x| \leq x_0. \tag{2.21}$$

En utilisant (2.16) dans (2.12), on a :

$$v(x, -H) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Finalement en utilisant (2.16) dans la condition (2.13), on obtient :

$$\lim_{x \to -\infty} u(x, y) - iv(x, y) = 0. \tag{2.23}$$

Il faut noter que les équations (2.15) n'ont aucun rôle dans cette linéairisation.

Elles dépendent seulement de la taille et de la position de la coque c'est-à-dire du paramètre inconnu x_0 et de la translation d'origine (aussi inconnue).

Chapitre 3

Formulation variationnelle et la solution du problème Neumann-Kelvin

Pour bien préciser les énoncés des ces problèmes, nous avons besoin de certaines définitions et notations.

On note par S_H la bande $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -H < y < 0\}$; on appelle $B = \mathbb{R} \times \{-H\}$ le fond. Sur la marge supérieure $\mathbb{R} \times \{0\}$, on note par I l'intervalle ouvert $]-x_0, x_0[\times\{0\}$ (représentant l'obstecle) et l'ensemble $F = \{\mathbb{R} \setminus [-x_0, x_0]\} \times \{0\}$.

On écrit $H^1(S_H)$, l'espace habituel de Sobolev sur le domaine S_H.

On considère le problème aux limites suivant.

Problème $(\mathbf{P}_v)$.

Soit $\nu > \frac{1}{H}$. Trouver la solution $v \in H^1(S_H)$ vérifié :

$$\Delta v = 0 \quad \text{dans} \quad S_H \tag{3.1}$$

$$v = \mathcal{F} \quad \text{sur} \quad I \tag{3.2}$$

$$v_y - \nu v = 0 \quad \text{sur} \quad F \tag{3.3}$$

$$v = 0 \quad \text{sur} \quad B \tag{3.4}$$

Il est claire que les conditions (3.2)-(3.4) coïncident avec (2.20)-(2.22) lorsque $\mathcal{F} = Cf'$ et $\nu = \frac{g}{C^2}$. De plus si $v \in H^1(S_H)$ et s'il satisfait (3.1)-(3.4), alors v tend vers zéro lorsque $|x| \longrightarrow +\infty$, d'après le théorème1.1 il existe un unique harmonique conjugué u qui s'annulle pour $x \longrightarrow -\infty$ et de limite finie pour $x \longrightarrow +\infty$. Donc, on obtient un

champ de vitesse complexe $u+iv$ satisfaisant (2.23), et sans oscillations pour $x \longrightarrow +\infty$.

Maintenant, on écrit le Problème $(\mathbf{P}_v)$ en formulation variationnelle et en étudiant quelque propriété a priori de leur solution. On considère le Problème $(\mathbf{P}_v)$ et on supposant $\mathcal{F} \in H^{1/2}(I)$ définie dans (3.2) ; alors il existe $v_0 \in H^1(S_H)$ tels que $v_0 = \mathcal{F}$ sur I et $v_0 = 0$ sur B.

D'après le théorème 1.4 on peut munir l'espace $H^1(S_H)$ de la norme équivalente suivante :

$$\|v\|_*^2 = \int_{S_H} |\nabla v|^2 dxdy + \int_B |v|^2 dx, \tag{3.5}$$

associe au produit scalaire :

$$(v,w)_* = \int_{S_H} \nabla v \nabla w dxdy + \int_B vw dx. \tag{3.6}$$

Le sous-espace H_*^1 de $H^1(S_H)$ des fonctions s'annulant sur $I \cup B$; on remarque que la norme (3.5) se réduit à l'intégrale de Dirichlet dans ce sous-espace.

Soit $w \in H_*^1$, on multiplie (3.1) par w, et en intégrant sur S_H par partie, on trouve :

$$-\int_{S_H} \nabla v \nabla w dxdy + \int_F v_y w dx = 0.$$

et de (3.3) on a :

$$-\int_{S_H} \nabla v \nabla w dxdy + \nu \int_F vw dx = 0.$$

on pose $v = v_1 + v_0$; l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\int_{S_H} \nabla v_1 \nabla w dxdy - \nu \int_F v_1 w dx = -\int_{S_H} \nabla v_0 \nabla w dxdy + \nu \int_F v_0 w dx.$$

On note :

$$A(v_1, w) = \int_{S_H} \nabla v_1 \nabla w dxdy - \nu \int_F v_1 w dx,$$

et

$$L(w) = -\int_{S_H} \nabla v_0 \nabla w dxdy + \nu \int_F v_0 w dx.$$

Forme faible du problème $(\mathbf{P}_v)$. Soient $v_0 \in H^1(S_H)$, et $\nu > 1/H$, trouvez $v_1 \in H^1_*$ tel que :

$$A(v_1, w) = L(w), \tag{3.7}$$

pour chaque $w \in H^1_*$.

Maintenant on considère la régularité et les propriétés faibles de la solution de $(\mathbf{P}_v)$.

Proposition 3.1. *Soit $v \in H^1(S_H)$ la solution de (3.1)-(3.4), et soit u l'harmonique conjuguée de v. Alors les fonctions u et v sont régulières dans $\overline{S}_H$ en dehors de chaque voisinage de I, et pour chaque $R > 0$, on a :*

$$\sup_{|x| \geq R, -H \leq y \leq 0} e^{\lambda_1 |x|} |v(x, y)| < \infty, \tag{3.8}$$

tel que λ_1 est la première solution de :

$$tang(\lambda H) = \frac{\lambda}{\nu} \tag{3.9}$$

De plus, $u(x, y)$ a des limites finies $c_\pm$ pour $x \longrightarrow \pm\infty$, uniformément en ce qui concerne $y \in [-H, 0]$.

Plus loin on suppose $\mathcal{F} \in H^{3/2}(I)$ définie dans (3.2). Alors les fonctions u et v sont continues et bornées dans la bande fermée. De plus, si la condition :

$$u(x_0, 0) - u(-x_0, 0) + \nu \int_I \mathcal{F} dx = 0 \tag{3.10}$$

se vérifie, alors $c_+ = c_- = c_0$, la fonction $u - c_0$ appartient à $H^1(S_H)$, et $u - c_0$ satisfait (3.8) comme v.

Preuve En général, comme S_H présente des singularités aux $\pm x_0$ le Problème $(\mathbf{P}_v)$ n'admet pas des solutions régulières sur S_H, mais les résultats classiques sur les Problèmes elliptiques assurent que les solutions sont de classe C^∞ loin des singularités.

D'où la régularité de u et de v en dehors d'un voisinage de I.

Maintenant on considère la restriction de v au domaine $]R, +\infty[\times]-H, 0[$; il est claire que v est harmonique et de carré sommable dans ce domaine et satisfait les conditions (3.3) et (3.4) sur F et B respectivement ; en outre, $v(R, .)$ est régulière et bornée dans $[-H, 0]$. On peut obtenir un dévelopement en série pour v dans ce domaine.

On utilise la méthode de séparation des variables.

On suppose :

$$v(x, y) = \varphi(x)\psi(y),$$

L'équation (3.1) s'écrit :

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = constant, \tag{3.11}$$

De (3.3),(3.4), et (3.11) on obtient le problème suivant :

$$-\psi''(y) = \lambda\psi(y) \tag{3.12}$$

$$\psi'(0) = \nu\psi(0) \tag{3.13}$$

$$\psi(-H) = 0 \tag{3.14}$$

où λ est une constante et ψ régulier. On ne peut rien affirmer sur le signe de λ. Alors on opère de la manière suivante :

si $\lambda < 0$ on pose $\lambda = -\nu_0^2, \quad \nu_0 \in \mathbb{R}^*$,

l'équation différentielle (3.12) s'écrit :

$$\psi''(y) - \nu_0^2\psi(y) = 0$$

sa solution générale s'écrit :

$$\psi(y) = Acosh(\nu_0 y) + Bsinh(\nu_0 y), \quad A, B = c^{tes}$$

les conditions aux frontières (3.13) et (3.14) donnent le système d'inconnues A et B :

$$\begin{cases} Acosh(\nu_0 H) - Bsinh(\nu_0 H) = 0 \\ \nu_0 B = \nu A \end{cases}$$

Nous aurons une solution non triviale si le déterminant principal de ce système est nul, ce qui entraîne :

$$\frac{t}{\nu} = tanh(tH). \tag{3.15}$$

On sait que si la condition $\nu H > 1$ est satisfaite, cette équation admet les racines ν_0,0,$-\nu_0$ (figure2).

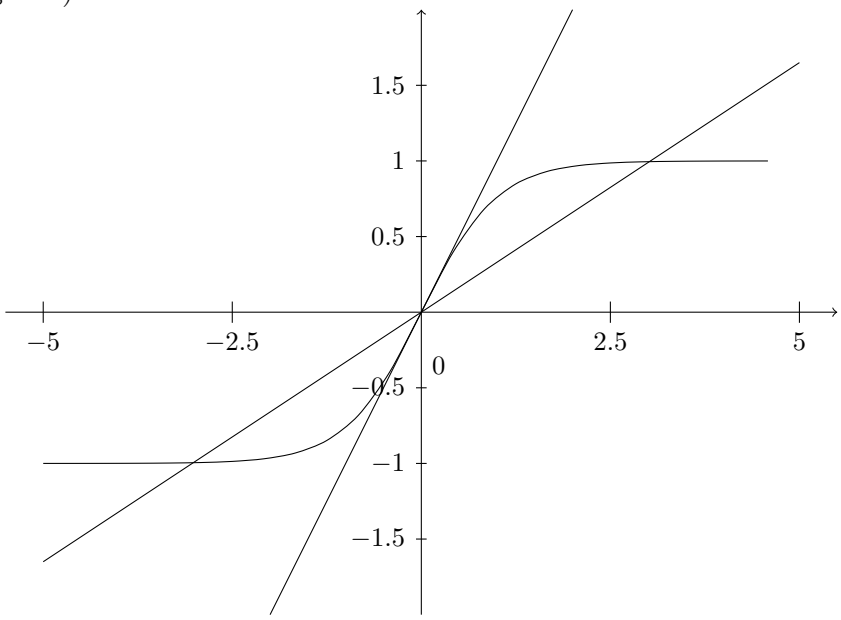


figure2

L'espace propre associé à valeur propre $-\nu_0^2$ est engendré par la fonction propre :

$$\begin{aligned} \psi_0(y) &= -sinh(\nu_0 H)cosh(\nu_0 y) + cosh(\nu_0 H)sinh(\nu_0 y) \\ &= sinh[\nu_0(y+H)]. \end{aligned}$$

De (3.11) on considère l'équation différentielle suivante :

$$\varphi''(x) + \nu_0^2 \varphi(x) = 0.$$

Sa solution générale s'écrit :

$$\varphi(x) = Ccos(\nu_0 x) + Dsin(\nu_0 x), \quad C, D = C^{tes}.$$

Si $\lambda \geq 0$ on pose $\lambda = a^2, \quad a \in \mathbb{R}$,

l'équation différentielle (3.11) s'écrit :

$$\psi''(y) + a^2\psi(y) = 0$$

Sa solution générale s'écrit :

$$\psi(y) = Acos(ay) + Bsin(ay), \quad A, B = C^{tes}$$

les conditions aux frontières (3.13) et (3.14) donnent le système d'inconnues A et B :

$$\begin{cases} Acos(aH) - Bsin(aH) = 0 \\ aB = \nu A. \end{cases}$$

Nous aurons une solution non triviale si le déterminant principal de ce système est nul. Ce qui entraîne :

$$\frac{a}{\nu} = tang(aH).$$

Nous avons donc une infinité de valeurs propres $\lambda_n, \quad n \in \mathbb{Z}$ (figure3), elles sont racines de l'équation ci-dessus ; on a alors pour chaque valeur de a :

$$\begin{aligned} \psi_n(y) &= B_n[sin(\lambda_n H)cos(\lambda_n y) + cos(\lambda_n H)sin(\lambda_n y)], \\ \text{ou} & \\ \psi_n(y) &= B_n sin[\lambda_n(y + H)] \end{aligned}$$

on note que de (3.9), on a : $\lambda_{-k} = -\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}$. Par suite ψ_{-n} appartient au même espace vectoriel que $\psi_n, \quad n \in \mathbb{N}$.

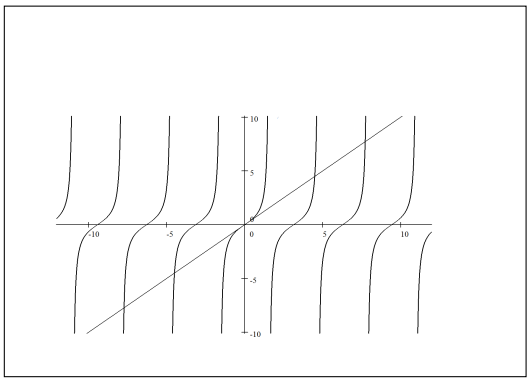


figure3

De (3.11) on considère l'équation différentielle suivante :

$$\varphi''(x) - \lambda_n^2 \varphi(x) = 0.$$

Sa générale s'écrit :

$$\varphi_n(x) = C_n cosh(\lambda_n x) + D_n sinh(\lambda_n x), \quad C_n, D_n = C^{tes}.$$

Alors, dans $]R, +\infty[\times] - H, 0[$ nous avons les fonctions harmoniques suivantes :

$$sin(\nu_0 x) sinh[\nu_0(y+H)], \quad cos(\nu_0 x) sinh[\nu_0(y+H)], \tag{3.16}$$

$$e^{\pm\lambda_n x} sin[\lambda_n(y+H)], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.17}$$

Maintenant, comme $v \in L^2(]R, +\infty[\times] - H, 0[)$, et les fonctions cos, sin, et $exp[\lambda_n(.)]$ ne sont pas de carré sommable, alors la fonction v s'écrit :

$$v = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\lambda_n x} sin[\lambda_n(y+H)] \tag{3.18}$$

Dans $]R, +\infty[\times] - H, 0[$, les coefficients c_n sont déterminés de manière unique par $v(R, y), y \in [-H, 0]$. Ainsi, $v \sim Ce^{-\lambda_1 x}$ pour des grandes valeurs positives de x, uniformément en ce qui concerne y.

Maintenant, dans $]-\infty, -R[\times]-H, 0[$, les fonctions cos, sin, et $exp[-\lambda_n(.)]$ ne sont pas de carré sommable, alors la fonction v s'écrit :

$$v = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{-\lambda_n |x|} sin[\lambda_n(y+H)]$$

Dans $]-\infty, -R[\times]-H, 0[$, où les coefficients $\tilde{c}_n$ sont déterminés de manière unique par $v(R, y), y \in [-H, 0]$. Ainsi, $v \sim Ce^{-\lambda_1|x|}$ au voisinage de $-\infty$, uniformément en ce qui concerne y.

Donc la fonction v vérifie (3.8).

Maintenant on suppose que $\mathcal{F} \in H^{3/2}(I)$ et considère un petit voisinage $\mathfrak{B}$ du point $(x_0, 0)$. Alors, l'intersection $\mathfrak{F} = \partial\mathfrak{B} \cap \{y = 0\}$ peut être considèrée comme frontière polygonale avec un angle $\varpi = \pi$ en $(x_0, 0)$. Maintenant, notre solution v est harmonique dans $\mathfrak{B}$ et satisfait sur $\mathfrak{F}$ les conditions :

$$\begin{aligned} v &= \mathcal{F} \in H^{3/2}(\mathfrak{F} \cap I), \quad \text{sur} \quad \mathfrak{F} \cap I; \\ v_y &= \nu v \in H^{3/2}(\mathfrak{F} \cap F), \quad \text{sur} \quad \mathfrak{F} \cap F; \end{aligned}$$

D'après les résultats connus de la régularité des problèmes elliptiques dans les domaines polygonaux [3],on a :

$$v(x, y) - cr^{1/2} sin(\theta/2) \in H^2(\mathfrak{B}), \tag{3.19}$$

où c est une constante et $r, \quad \theta$ sont les coordonnées polaires de (x, y) autour du point $(x_0, 0)$, avec $\theta = 0$ sur I et $\theta = \pi$ sur F.

Évidement une propriété analogue se vérifie dans un voisinage du point $(-x_0, 0)$. Par l'évaluation du gradient de v sous la forme (3.19), on vérifie facilement que l'harmonique conjugué :

$$u(x, y) = \int_{(\tilde{x}, \tilde{y})}^{(x,y)} [-v_y dx + v_x dy],$$

où $(\tilde{x}, \tilde{y})$ un point quelconque de S_H, se prolonge en une fonction continue sur la bande fermée $\overline{S}_H$. En particulier, il est significatif de considérer les valeurs $u(\pm x_0, 0)$.

On note d'abord que $|\nabla u| = |\nabla v|$, de sorte que $\nabla u \in L^2(S_H)$. De plus, de (3.18) et d'après les équations de Cauchy-Riemann, on a :

$$u_x = v_y = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \lambda_n e^{-\lambda_n x} cos[\lambda_n(y+H)]$$

et

$$u_y = v_x = -\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \lambda_n e^{-\lambda_n x} sin[\lambda_n(y+H)]$$

On intègre les deux équations ci-dessus et on obtient :

$$u_x = c_+ + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\lambda_n x} cos[\lambda_n(y+H)]$$

pour $x > x_0$, où c_+ est une constante. Un développement analogue (avec des différentes constantes $c_+, \tilde{c}_n$) est vérifie pour $x < x_0$. Alors, la fonction u a des limites finies $c_\pm$ pour $x \longrightarrow \pm\infty$, uniformément en y. Nous prouvons maintenant que si (3.14) est vérifie, alors $c_+ = c_-$.

On considère le rectangle $Q_R = \{(x, y) \in S_H, -R < x < R\}$ et on définit le potentiel ϕ tel que : $\nabla\phi = (u, v)$. Alors on a :

$$\int_{Q_R} \Delta\phi = 0$$

d'après la formule de Green on a :

$$\int_{\partial Q_R} \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \tag{3.20}$$

où $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ désigne la dérivée normale de ϕ.

Alors (3.20) s'écrit :

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0)dx + \int_{-H}^{0} \frac{\partial \phi}{\partial x}(R,y)dy + \int_{0}^{-H} \frac{\partial \phi}{\partial x}(-R,y)dy = 0,$$

d'où

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0)dx + \int_{-H}^{0} u(R,y)dy + \int_{0}^{-H} u(-R,y)dy = 0;$$

lorsque $R \longrightarrow +\infty$ on a :

$$\int_F \phi_y dx + \int_I \phi_y dy + H(c_+ - c_-) = 0;$$

on multiplie par ν, en utilisant les deux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_y &= \mathcal{F} \quad \text{sur} \quad I, \\ \phi_{xx} + \nu\phi_y &= 0 \quad \text{sur} \quad F, \end{aligned}$$

on obtient :

$$-\int_F \phi_{xx} dx + \nu \int_I \mathcal{F} dx + H\nu(c_+ - c_-) = 0,$$

d'où

$$c_- - u(-x_0,0) + u(x_0,0) - c_+ + \nu \int_I \mathcal{F} dx + H\nu(c_+ - c_-) = 0,$$

donc

$$u(x_0,0) - u(-x_0,0) + \nu \int_I \mathcal{F} dx + (H\nu - 1)(c_+ - c_-) = 0, \tag{3.21}$$

en utilisant la condition $\nu > 1/H$ et (3.10) on obtient :

$$c_+ = c_- = c_0.$$

De plus,

$$\lim_{|x| \to +\infty} u - c_0 = 0$$

, et la fonction $u - c_0$ satisfait (3.8) comme v. □

Remarque 3.1. (3.15) n'admet pas des solutions différentes de zéro pour des écoulements supercritique. On note que λ_1 dans (3.8) satisfait, $\pi/H < \lambda_1 < 3\pi/2H$ pour chaque $\nu > 1/H$.

Chapitre 4

Solution du problème Neumann-Kelvin de vitesse

D'après les résultats du chapitre précédent on peut considérer le sous espace suivant :

$$V_* = \{v \in H^1_*(S_H) : \int_{-H}^{0} sinh[\nu_0(y+H)]v(x,y)dy = 0, \quad \text{pour} \quad |x| \geq x_0\}; \qquad (4.1)$$

On peut vérifier que V_* est un sous espace fermé de $H^1_*(S_H)$.

En fait, on considère l'opérateur suivant :

$$T : H^1_*(S_H) \longrightarrow L^2(F), \quad (Tw)(\xi) = \int_{-H}^{0} sinh[\nu_0(y+H)]w(\xi,y)dy, \quad \xi \in F.$$

D'après le théorème 1.3 et comme la fonction intégrale est continue, l'opérateur T est continue, donc $V_*(S_H) = T^{-1}\{0\}$ est fermé.

Nous avons maintenant la proposition suivante :

Proposition 4.1. *La forme bilinéaire $A(.,.)$ est coercive sur le sous-espace V_*.*

Preuve Nous avons prouvé la coercivité de $A(.,.)$ sur V_*.

D'après (4.1) on a :

$$\int_{-H}^{0} sinh[\nu_0(y+H)]v(x,y)dy = 0, \quad \text{pour} \quad |x| \geq x_0;$$

on intègre par parties, on trouve :

$$v(x,0) = \frac{1}{cosh(\nu_0 H)} \int_{-H}^{0} cosh[\nu_0(y+H)]v_y(x,y)dy, \quad \text{pour} \quad |x| \geq x_0,$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|v(x,0)|^2 \leq \frac{1}{cosh^2(\nu_0 H)} \left(\int_{-H}^{0} |sinh[\nu_0(y+H)]|^2 dy \right) \int_{-H}^{0} |v_y(x,y)|^2 dy, \quad \text{pour} \quad |x| \geq x_0.$$

En intègrant sur F et en multipliant par ν,

$$\nu \int_F |v(x,0)|^2 dx \leq \frac{\nu}{cosh^2(\nu_0 H)} \left(\int_{-H}^{0} |sinh[\nu_0(y+H)]|^2 dy \right) \int_F \int_{-H}^{0} |v_y(x,y)|^2 dydx,$$

d'où

$$\nu \int_F |v(x,0)|^2 dx \leq \frac{\nu}{cosh^2(\nu_0 H)} \left(\int_{-H}^{0} |sinh[\nu_0(y+H)]|^2 dy \right) \int_{F\cup I} \int_{-H}^{0} |v_y(x,y)|^2 dydx,$$

donc

$$\nu \int_F |v(x,0)|^2 dx \leq \frac{\nu(sinh(2\nu_0 H) + 2\nu_0 H)}{4\nu_0 cosh^2(\nu_0 H)} \|\nabla v\|^2_{L^2(S_H)}.$$

On utilise (3.15), on obtient :

$$\int_{S_H} |\nabla v(x,y)|^2 dydx - \nu \int_F |v(x,0)|^2 dx \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\nu_0 H)}{sinh(2\nu_0 H)} \right) \|\nabla v\|^2_{L^2(S_H)}.$$

Il est claire que le coefficient dans le dernier terme est inférieur strictement à un, pour chaque ν_0. □

Maintenant on a le problème suivant :

Problème $\mathbf{\Pi}_v$: soient $v_0 \in H^1(S_H)$, (avec $v_0 = \mathcal{F}$ sur I) et $\nu > 1/H$.

Trouver $v_1 \in H^1_*$ tel que :

$$\int_{S_H} \nabla v_1 \nabla w dxdy - \nu \int_F v_1 w dx = - \int_{S_H} \nabla v_0 \nabla w dxdy + \nu \int_F v_0 w dx, \tag{4.2}$$

pour chaque $w \in V_*$.

De la proposition 4.1 et de la discussion du chapitre précédent, nous avons obtenu le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Le problème $\mathbf{\Pi}_v$ a une solution unique.*

Preuve Il est clair que la forme linéaire L est continue, et que la forme bilinéaire $A(.,.)$ aussi est continue.D'après le théorème de Lax-Milgram on a l'existence et l'unicité de la solution de problème $\mathbf{\Pi}_v$.

Notre objectif maintenant est de trouver les conditions sur les données qui garantissent que la fonction v, obtenu par la résolution de problème $\mathbf{\Pi}_v$, est aussi la solution de problème $\mathbf{P}_v$. □

Dans le reste du chapitre, nous considérons le problème $\mathbf{\Pi}_v$ et montrons comment la solution est liée à l'existence d'un champ de vitesse du problème non perturbé dans S_H.

Pour commencer, il faut noter que la solution du problème $\mathbf{\Pi}_v$ dépend de la fonction particulière v_0 sur le côté droit de (4.2) ; le choix de v_0 est donné dans le résultat suivant :

Proposition 4.3. *Soit $v = v_0 + v_1$, où $v_0 \in H^1(S_H)$ satisfait $v_0/_I = \mathcal{F}$ et $v_1 \in V_*$ est la solution de problème $\mathbf{\Pi}_v$. Alors, on peut choisir v_0 tels que v est harmonique pour $x \neq \pm x_0$ et satisfait aux condition (3.2)-(3.4).*

Preuve Soit $\widetilde{\mathcal{F}} \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, telle que $\widetilde{\mathcal{F}}/_I = \mathcal{F}$. Alors, il existe une fonction $\widetilde{V} \in H^1(S_H)$ telle que $\widetilde{V}/_{\{y=0\}} = \widetilde{\mathcal{F}}$ et $\widetilde{V}/_B = 0$; on considère une fonction régulière ψ_0 de support compact dans $]-H, 0[$ et telle que :

$$\int_{-H}^{0} \psi_0(y) sinh[\nu_0(y+H)]dy = 1.$$

Maintenant on définit :

$$v_0(x,y) = \widetilde{V}(x,y) - \left(\int_{-H}^{0} \widetilde{V}(x,s) sinh[\nu_0(s+H)]ds \right) \psi_0(y).$$

Il est claire que la fonction v_0 appartient à $H^1(S_H)$ et satisfait aux conditions (3.2) et (3.4) ; de plus, on a :

$$\int_{-H}^{0} v_0(x,y) sinh[\nu_0(y+H)]dy = 0. \tag{4.3}$$

pour chaque $x \in \mathbb{R}$. Alors, la fonction $v = v_0 + v_1$ satisfait les conditions (3.2) et (3.4), et la condition (4.3) pour $|x| \geq x_0$. D'autre part on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-H}^{0} v_x(x,y) sinh[\nu_0(y+H)]dy \right) \varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-H}^{0} v(x,y) sinh[\nu_0(y+H)]dy \right) \varphi'(x)dx$$

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$, donc la dérivée faible v_x satisfait la condition (4.3) pour $|x| \geq x_0$.

Soit une fonction test $\varphi \in D(S_H)$ telle que :

$$\int_{-H}^{0} \varphi(\pm x_0, y) sinh[\nu_0(y+H)]dy = 0. \tag{4.4}$$

On définit $w(x,y) = \varphi(x,y)$ pour $|x| < x_0$ et

$$w(x,y) = \varphi(x,y) - K(\nu_0) \left(\int_{-H}^{0} \varphi(x,s) sinh[\nu_0(s+H)]ds \right) sinh[\nu_0(y+H)], \quad \text{pour} \quad |x| \geq x_0$$

où $K(\nu_0) = \frac{2}{H}\left(\frac{sinh(2\nu_0 H)}{2\nu_0 H} - 1\right)^{-1}$.

D'après la condition (4.4), la fonction w est continue ; de plus $w \in V_*$, car :

$$\int_{-H}^{0} sinh^2[\nu_0(y+H)]dy = \frac{H}{2}\left(\frac{sinh(2\nu_0 H)}{2\nu_0 H} - 1\right).$$

D'après (4.2) on a :

$$\int_{S_H} \nabla v \nabla w dxdy = \nu \int_F vwdx,$$

et comme $\varphi = 0$ sur F on a :

$$\nu \int_F vwdx = -\nu K(\nu_0) sinh(\nu_0 H) \int_F v(x,0)\left(\int_{-H}^{0} \varphi(x,s) sinh[\nu_0(s+H)]ds\right)dx. \quad (4.5)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\int_{S_H} \nabla v \nabla w dxdy &= \int_{S_H} \nabla v \nabla \varphi dxdy - K(\nu_0) \\ &\times \int_{S_H \cap \{|x| \geq x_0\}} \nabla v(x,y) \nabla \left\{\left(\int_{-H}^{0} \varphi(x,s) sinh[\nu_0(s+H)]ds\right) sinh[\nu_0(y+H)]\right\} dxdy,\end{aligned}$$

et comme v_x satisfait la condition (4.3) :

$$\begin{aligned}\int_{S_H} \nabla v \nabla w dxdy &= \int_{S_H} \nabla v \nabla \varphi dxdy - K(\nu_0) \\ &\times \int_F \left(\int_{-H}^{0} \varphi(x,s) sinh[\nu_0(s+H)]ds\right) \int_{-H}^{0} v_y(x,y)\nu_0 cosh[\nu_0(y+H)]dydx.\end{aligned}$$

On intègre par parties

$$\begin{aligned}\int_{S_H} \nabla v \nabla w dxdy &= \int_{S_H} \nabla v \nabla \varphi dxdy - K(\nu_0)\nu_0 cosh(\nu_0 H) \\ &\times \int_F \left(\int_{-H}^{0} \varphi(x,s) sinh[\nu_0(s+H)]ds\right) v(x,0)dx. \quad (4.6)\end{aligned}$$

En comparant (4.5) et (4.6) et en rappelant (3.15) , on obtient :

$$\int_{S_H} \nabla v \nabla \varphi dxdy = 0, \quad (4.7)$$

pour chaque fonction test φ satisfaisant (4.4). En particulier, cela est vrai pour toutes les fonctions φ à support qui ne coupent pas les segments $x = \pm x_0$ dans S_H.

Donc v est harmonique dans la région $S_H \cap \{x \neq \pm x_0\}$.

Nous avons encore à vérifier la condition (3.3). On construit maintenant la fonction $\psi \in D(\mathbb{R}^2)$ à support contenu dans la région $\{|x| > x_0\} \cap \{y > -H\}$ et $supp\psi \cap F \neq \emptyset$.

Il existe une fonction $\widetilde{\psi} \in D(\mathbb{R}^2)$ telle que $\widetilde{\psi}/_F \neq 0$, $\quad \widetilde{\psi}/_{\{|x| \leq x_0\}} = 0$ et $\widetilde{\psi}/_B = 0$; on considère la fonction régulière $\widehat{\psi}_0$ de support compact dans $]-H, +\infty[$ et telle que :

$$\int_{-H}^{0} \widehat{\psi}_0(y) sinh[\nu_0(y+H)]dy = 1.$$

Maintenant on définit :

$$\psi(x,y) = \widetilde{\psi}(x,y) - \left(\int_{-H}^{0} \widetilde{\psi}(x,s) sinh[\nu_0(s+H)]ds \right) \widehat{\psi}_0(y),$$

de (4.2) on a :

$$\int_{S_H} \nabla v \nabla \psi dxdy = \nu \int_F v\psi dx,$$

en utilisant la formule de Green :

$$\int_F \frac{\partial v}{\partial y} \psi dx - \int_{\{|x|>x_0\} \cap S_H} (\Delta v)\psi dxdy = \nu \int_F v\psi dx,$$

comme la fonction v est harmonique dans la région $S_H \cap \{|x| > x_0\}$, on a (3.3). □

Remarque 4.1. La fonction v définie dans la proposition précédente ne dépend pas du choix particulier de la fonction v_0, elle satisfait (4.3) et les conditions de frontière (3.2) et (3.4) ; pour prendre $\widetilde{v}_0$ satisfaisant les mêmes conditions, en plaçant $\widetilde{v}_1$ pour la solution correspondante de (4.2), on défini $\widetilde{v} = \widetilde{v}_0 + \widetilde{v}_1$. Alors $v - \widetilde{v} \in V_*$ et

$$\int_{S_H} \nabla(v - \widetilde{v}) \nabla w dxdy = \nu \int_F (v - \widetilde{v}) w dx = 0 \tag{4.8}$$

pour chaque $w \in V_*$. Particulièrement, si $w = v - \widetilde{v}$ et comme $A(.,.)$ est coercive, on a $v = \widetilde{v}$.

On peut aussi obtenir des informations plus détaillées sur la fonction v.

Théorème 4.4. *Soit v donnée par la proposition 4.3 ; alors, il existe des constantes réelles λ_+ et λ_-, telles que*

$$\Delta v = [\lambda_+ \delta(x - x_0) + \lambda_- \delta(x + x_0)] sinh[\nu_0(y+H)]. \tag{4.9}$$

De plus, v est déterminée de manière unique par les conditions (3.2)-(3.4) et (4.9), et les relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2} sin(\nu_0 x_0) = C(\nu_0) \int_{-x_0}^{x_0} [v_y(x,0) - \nu \mathcal{F}(x)] sin(\nu_0 x) dx, \tag{4.10}$$

et

$$\frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} cos(\nu_0 x_0) = C(\nu_0) \int_{-x_0}^{x_0} [v_y(x,0) - \nu \mathcal{F}(x)] cos(\nu_0 x) dx, \tag{4.11}$$

où

$$C(\nu_0) = \frac{\nu_0 sinh(\nu_0 H)}{sinh(\nu_0 H) cosh(\nu_0 H) - \nu_0 H}$$

Preuve On montre d'abord que

$$\int_{S_H} \nabla v \nabla \varphi dx dy = -\lambda_+ \int_{-H}^{0} sinh[\nu_0(y+H)] \varphi(x_0, y) dy, \tag{4.12}$$

pour chaque $\varphi \in D(S_H)$ de support contenu dans la demi-bande $S_H \cap \{x > -x_0\}$; il est clair qu'on a une relation analogue dans la demi-bande $S_H \cap \{x > -x_0\}$.

On considère une fonction régulière η_0 de support dans $S_H \cap \{x > -x_0\}$ et telle que :

$$\int_{-H}^{0} sinh[\nu_0(y+H)] \eta_0(x_0, y) dy = 1.$$

Alors pour chaque $\varphi \in D(S_H)$, la fonction

$$\varphi_0(x,y) = \varphi(x,y) - \eta_0(x,y) \int_{-H}^{0} sinh[\nu_0(s+H)] \varphi(x_0, s) ds$$

appartient à $D(S_H)$ et satisfait la condition (4.4). Donc, comme dans la preuve de la proposition 4.3 on a :

$$\int_{S_H} \nabla v \nabla \varphi_0 dx dy = 0;$$

d'où

$$\int_{S_H} \nabla v \nabla \varphi dx dy = \left(\int_{S_H} \nabla v \nabla \eta_0 dx dy \right) \int_{-H}^{0} sinh[\nu_0(s+H)] \varphi(x_0, s) ds.$$

Maintenant, d'après l'équation (4.12) on pose $\lambda_+ = -\int_{S_H} \nabla v \nabla \eta_0 dx dy$. De (4.9) on a v continue aux points $(\pm x_0, y)$ et

$$\lim_{\epsilon \to 0} [v_x(\pm x_0 + \epsilon, y) - v_x(\pm x_0 - \epsilon, y)] = \lambda_\pm sinh[\nu_0(y+H)]. \tag{4.13}$$

On note par Q_0 le domaine $]-x_0, x_0[\times]-H, 0[$ et on considère les fonctions harmoniques :

$$v_1(x,y) = sin(\nu_0 x) sinh[\nu_0(y+H)], \quad v_2(x,y) = cos(\nu_0 x) sinh[\nu_0(y+H)].$$

Donc, on a

$$\int_{Q_0} (v\Delta v_i - v_i\Delta v)dxdy = 0, \quad i = 1, 2,$$

et d'après la formule de Green on a

$$\int_{\partial Q_0} \left(v\frac{\partial v_i}{\partial n} - v_i\frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma = 0, \quad i = 1, 2, \tag{4.14}$$

où n est la normale externe à Q_0. et $d\sigma$ est la mesure de la longueur.

On utilise (3.2) et (3.4) :

$$\begin{aligned} \int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\mathcal{F} - v_i\frac{\partial v}{\partial y} \right)(x,0)dx \quad &+ \quad \int_{-H}^{0} \left(v\frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial v}{\partial x} \right)(x_0,y)dy \\ &= \quad \int_{-H}^{0} \left(v\frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial v}{\partial x} \right)(-x_0,y)dy, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Pour $i = 1$,

de (4.15) on a

$$\int_{-x_0}^{x_0} \left(\nu_0 cosh(\nu_0 H)\mathcal{F}(x) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,0)sinh(\nu_0 H) \right) sin(\nu_0 x)dx$$

- $\int_{-H}^{0} \left(v(x_0,y)\nu_0 cos(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)] - sin(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y) \right) dy$
+ $\int_{-H}^{0} \left(v(-x_0,y)\nu_0 cos(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)] - sin(-\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]\frac{\partial v}{\partial x}(-x_0,y) \right) dy$
$= 0.$

De (4.3) on a

$$\int_{-x_0}^{x_0} \left(\nu_0 cosh(\nu_0 H)\mathcal{F}(x) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,0)sinh(\nu_0 H) \right) sin(\nu_0 x)dx$$

- $\int_{-H}^{0} \left(sin(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y) \right) dy$
+ $\int_{-H}^{0} \left(sin(-\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]\frac{\partial v}{\partial x}(-x_0,y) \right) dy$
$= 0\,;$

on peut écrire l'équation ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&\int_{-x_0}^{x_0}\left(\nu_0 cosh(\nu_0 H)\mathcal{F}(x)-\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)sinh(\nu_0 H)\right)sin(\nu_0 x)dx\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-H}^{0}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0-\epsilon,y)sin[\nu_0(x_0-\epsilon)]sinh[\nu_0(y+H)]\right)dy\\
&-\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-H}^{0}\left(\frac{\partial v}{\partial x}(-x_0+\epsilon,y)sin[\nu_0(-x_0+\epsilon)]sinh[\nu_0(y+H)]\right)dy.
\end{aligned}$$

De (4.13) on a

$$\begin{aligned}
&\int_{-x_0}^{x_0}\left(\nu_0 cosh(\nu_0 H)\mathcal{F}(x)-\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)sinh(\nu_0 H)\right)sin(\nu_0 x)dx\\
&\qquad=(\lambda_- - \lambda_+)sin(\nu_0 x_0)\int_{-H}^{0}sinh^2[\nu_0(y+H)]dy,
\end{aligned}$$

et de (3.15) on obtient

$$sinh(\nu_0 H)\int_{-x_0}^{x_0}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)-\nu\mathcal{F}(x)\right)sin(\nu_0 x)dx \quad = \quad (\lambda_+ - \lambda_-)sin(\nu_0 x_0)\int_{-H}^{0}sinh^2[\nu_0(y+H)]dy;$$

et comme

$$\int_{-H}^{0}sinh^2[\nu_0(y+H)]dy=\frac{1}{2\nu_0}(sinh(\nu_0 H)cosh(\nu_0 H)-\nu_0 H),$$

on a

$$\frac{(\lambda_+ - \lambda_-)}{2}sin(\nu_0 x_0)=\left(\frac{\nu_0 sinh(\nu_0 H)}{sinh(\nu_0 H)cosh(\nu_0 H)-\nu_0 H)}\right)\int_{-x_0}^{x_0}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)-\nu\mathcal{F}(x)\right)sin(\nu_0 x)dx.$$

Pour $i=2$,

de (4.15) on a

$$\begin{aligned}
&\int_{-x_0}^{x_0}\left(\nu_0 cosh(\nu_0 H)\mathcal{F}(x)-\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)sinh(\nu_0 H)\right)cos(\nu_0 x)dx\\
&+\int_{-H}^{0}\left(-v(x_0,y)\nu_0 sin(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]-cos(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y)\right)dy\\
&+\int_{-H}^{0}\left(v(-x_0,y)\nu_0 sin(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]-cos(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]\frac{\partial v}{\partial x}(-x_0,y)\right)dy=0
\end{aligned}$$

De (4.3) on a

$$\begin{aligned}0 = \int_{-x_0}^{x_0} \left(\nu_0 cosh(\nu_0 H)\mathcal{F}(x) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,0)sinh(\nu_0 H)\right)cos(\nu_0 x)dx \\ - \int_{-H}^{0} \left(cos(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y)\right)dy \\ - \int_{-H}^{0} \left(cos(\nu_0 x_0)sinh[\nu_0(y+H)]\frac{\partial v}{\partial x}(-x_0,y)\right)dy;\end{aligned}$$

on peut écrire l'équation ci-dessous :

$$\begin{aligned}&\int_{-x_0}^{x_0} \left(\nu_0 cosh(\nu_0 H)\mathcal{F}(x) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,0)sinh(\nu_0 H)\right)cos(\nu_0 x)dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-H}^{0} \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0-\epsilon,y)cos[\nu_0(x_0-\epsilon)]sinh[\nu_0(y+H)]\right)dy \\ &+ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-H}^{0} \left(\frac{\partial v}{\partial x}(-x_0+\epsilon,y)cos[\nu_0(-x_0+\epsilon)]sinh[\nu_0(y+H)]\right)dy.\end{aligned}$$

De (4.13) on a

$$\begin{aligned}&\int_{-x_0}^{x_0} \left(\nu_0 cosh(\nu_0 H)\mathcal{F}(x) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,0)sinh(\nu_0 H)\right)cos(\nu_0 x)dx \\ &= -(\lambda_- + \lambda_+)cos(\nu_0 x_0)\int_{-H}^{0} sinh^2[\nu_0(y+H)]dy,\end{aligned}$$

et de (3.15) on obtient

$$sinh(\nu_0 H)\int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,0) - \nu\mathcal{F}(x)\right)cos(\nu_0 x)dx \quad = \quad (\lambda_- + \lambda_+)cos(\nu_0 x_0)\int_{-H}^{0} sinh^2[\nu_0(y+H)]dy,$$

et comme

$$\int_{-H}^{0} sinh^2[\nu_0(y+H)]dy = \frac{1}{2\nu_0}(sinh(\nu_0 H)cosh(\nu_0 H) - \nu_0 H),$$

on a

$$\frac{(\lambda_- + \lambda_+)}{2}cos(\nu_0 x_0) = \left(\frac{\nu_0 sinh(\nu_0 H)}{sinh(\nu_0 H)cosh(\nu_0 H) - \nu_0 H)}\right)\int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,0) - \nu\mathcal{F}(x)\right)cos(\nu_0 x)dx.$$

Finalement, pour n'importe quelle fonction v satisfait (4.9) et on a

$$\int_{S_H} w\Delta v dxdy = \lambda_+ \int sinh[\nu_0(y+H)w(x_0,y)dy + \lambda_- \int sinh[\nu_0(y+H)]w(-x_0,y)dy = 0$$

pour chaque $w \in V_*$.

Unicité.

Soit $\widetilde{v}$ satisfaisant (3.2)-(3.4) et

$$\Delta\widetilde{v} = \left[\widetilde{\lambda}_+\delta(x-x_0) + \widetilde{\lambda}_-\delta(x+x_0)\right] sinh[\nu_0(y+H)],$$

($\widetilde{\lambda}_\pm$ sont constantes réelles).

La différence $v - \widetilde{v}$ satisfait (4.8) et comme $A(.,.)$ est coercive, on a $v = \widetilde{v}$. □

Remarque 4.2. On peut facilement vérifier pour, la fonction :

$$\begin{aligned} w(x,y) &= v(x,y) - \frac{\lambda_+}{\nu_0}\theta(x-x_0)sin[\nu_0(x-x_0)]sinh[\nu_0(y+H)] \\ &+ \frac{\lambda_-}{\nu_0}\theta(-(x+x_0))sin[\nu_0(x+x_0)]sinh[\nu_0(y+H)], \end{aligned} \tag{4.16}$$

avec θ la fonction caractéristique de $]0,+\infty[$, est localement dans H^1, et résoudre le problème (3.1)-(3.4). Par conséquent, la fonction harmonique w satisfait, dans le voisinage de I, les mêmes propriétés de régularité indiquées dans la proposition 3.1 pour la solution dans H^1 (en général, il est clair que w ne disparaît pas à l'infini). Par ces propriétés et par (4.16), on conclut que pour $\mathcal{F} \in H^{3/2}(I)$ dans (3.2), la trace sur la coque de la dérivée v_y est une fonction bien définie et intégrable. On remarque que, en général, $v_y/_I$ n'est pas de carrée intégrable, à couse des singularités aux points finaux de la coque (voir la formule (3.23)).

De (4.10) et (4.11) on a une condition suffisante pour l'existence d'une solution du problème $(\mathbf{P}_v)$, c'est que $\nu_0 x_0$ soit différent de $n\pi$ et $(n+\frac{1}{2})\pi$ (n nombre entier) sinon les intégrales des côtés droits de ces équations disparaissent. On remarque que ces deux conditions se réduisent à une àsi on suppose que $\mathcal{F}$ est une fonction symétrique ou anti-symétrique.

Dans ces cas $\lambda_+ = \lambda_-$ ou $\lambda_+ = -\lambda_-$ et l'intégrale du côté droit de (4.10) ou (4.11) disparaît.

On présente les fonctions v_s et v_c de la façon suivante :

v_s satisfait les conditions aux limites (3.2)-(3.4) avec $\mathcal{F}(x) = sin(\nu_0 x)$, et l'équation (4.9) avec $\lambda_+ = -\lambda_- = \lambda_s$ (λ_s une constante réelle). De même, v_c satisfait les conditions aux limites (3.2)-(3.4) avec $\mathcal{F}(x) = cos(\nu_0 x)$, et l'équation (4.9) avec $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda_c$ (λ_c

une constante réelle). On note que, pour x_0 fixe et H fixe, λ_s et λ_c dépendent seulement de ν_0. Alors, on a :

Théorème 4.5. *Soit $\nu > 1/H$. ν_0 la solution de l'équation (3.19) est différente de $n\pi/x_0$ et $(n+\frac{1}{2})\pi/x_0$ (n nombre entier positif). Alors, le problème ($\mathbf{P}_v$) a une solution unique dans $H^1(S_H)$ si et seulement si $\mathcal{F}$ satisfait les relations suivantes :*

$$\int_{-x_0}^{x_0}[\partial_y v_s(x,0) - \nu sin(\nu_0 x)]\mathcal{F}(x)dx = 0, \tag{4.17}$$

$$\int_{-x_0}^{x_0}[\partial_y v_c(x,0) - \nu cos(\nu_0 x)]\mathcal{F}(x)dx = 0. \tag{4.18}$$

Preuve On prend v satisfaisant (3.2)-(3.4) et (4.9) ; en rappelant que v, v_s et v_c sont continus dans S et satisfont la condition (4.5).

Donc

$$\int_{S_H} v\Delta v_s = \int_{S_H}[\lambda_s v(x_0,y) - \lambda_s v(-x_0,y)]sinh[\nu_0(y+H)] = 0,$$

et aussi

$$\int_{S_H} v_s\Delta v = \int_{S_H} v\Delta v_c = \int_{S_H} v_c\Delta v = 0,$$

d'où

$$\int_{S_H}(v\Delta v_s - v_s\Delta v)dxdy = \int_{S_H}(v\Delta v_c - v_c\Delta v)dxdy = 0.$$

On applique la formule de Green sur le domaine $Q_R =]-R,R[\times]-H,0[(R > x_0)$ et on obtient :

$$\int_{\partial Q_R}\left(v\frac{\partial v_s}{\partial n} - v_s\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma = \int_{\partial Q_R}\left(v\frac{\partial v_c}{\partial n} - v_c\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma = 0,$$

où n est la normale externe à Q_R et $d\sigma$ est la mesure de la longueur.

Lorsque $R \longrightarrow +\infty$, on a :

$$\int_{\{y=0\}}\left(v\frac{\partial v_s}{\partial y} - v_s\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx = \int_{\{y=0\}}\left(v\frac{\partial v_c}{\partial y} - v_c\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx = 0,$$

d'où

$$\int_{-x_0}^{x_0}(\mathcal{F}(x)\partial_y v_s(x,0) - sin(\nu_0 x)v_y(x,0))dx = 0, \tag{4.19}$$

et

$$\int_{-x_0}^{x_0} (\mathcal{F}(x)\partial_y v_c(x,0) - cos(\nu_0 x) v_y(x,0))dx = 0. \tag{4.20}$$

En utilisant (4.19) et (4.20) dans (4.10) et (4.11) respectivement on obtient :

$$\frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2} sin(\nu_0 x_0) = C(\nu_0) \int_{-x_0}^{x_0} [\partial_y v_s(x,0) - \nu sin(\nu_0 x)]\mathcal{F}(x)dx, \tag{4.21}$$

et

$$\frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} cos(\nu_0 x_0) = C(\nu_0) \int_{-x_0}^{x_0} [\partial_y v_c(x,0) - \nu cos(\nu_0 x)]\mathcal{F}(x)dx. \tag{4.22}$$

Maintenant, nous avons $\lambda_+ = \lambda_- = 0$ si et seulement si (4.17) et (4.18) se vérifient, dans ce cas, v est harmonique dans S_H et résout le problème $\mathbf{P}_v$. □

D'après le théorème 4.5, l'équation (3.19) et la relation $\nu = g/C^2$, on a l'existence et l'unicité du problème $\mathbf{P}_v$ pour toutes les valeurs de la vitesse sous-critique C, sauf pour les valeurs

$$C_n = \left(\frac{2gx_0}{n\pi} th\left(\frac{n\pi H}{2x_0}\right)\right)^{1/2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.23}$$

En particulier, on veut déterminer la classe des f (cylindre) corespondant aux données $\mathcal{F}$.

C'est une tâche difficile, puisque les expressions explicites de v_c et de v_s ne sont pas connues pour les valeurs de ν_0. Mais on peut connaître explicitement la fonction v_s si et seulement si $\nu_0 = n\pi/x_0, \quad n = 1, 2, \ldots$; la même chose est vraie pour v_c si $\nu_0 = (n - 1/2)\pi/x_0, \quad n = 1, 2, \ldots$.

En fait, on a le résultat suivant :

Proposition 4.6. *Si $\nu_0 = n\pi/x_0, \quad n = 1, 2, \ldots$; alors :*

$$v_s(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{sh(\nu_0 H)} sin(\nu_0 x) sinh[\nu_0(y+H)] & \text{, si} \quad |x| \leq x_0 \\ 0 & \text{si } |x| > x_0. \end{cases} \tag{4.24}$$

si $\nu_0 = (n - 1/2)\pi/x_0, \quad n = 1, 2, \ldots$; alors :

$$v_c(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{sinh(\nu_0 H)} cos(\nu_0 x) sinh[\nu_0(y+H)] & \text{, si} \quad |x| \leq x_0 \\ 0 & \text{si } |x| > x_0. \end{cases} \tag{4.25}$$

On a :

$$\lambda_s = \lambda_s(n) = (-1)^{n+1}\frac{n\pi/x_0}{sinh(n\pi H/x_0)}, \tag{4.26}$$

$$\lambda_c = \lambda_c(n) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1/2)\pi/x_0}{sinh((n-1/2)\pi H/x_0)}. \tag{4.27}$$

Preuve On voit que les deux fonctions (4.24) et (4.25) sont harmonique, continues et appartient à $H^1(S_H)$; de plus elles satisfont les conditions aux limites et la condition (3.14). La proposition se vérifie par la propriété d'unicitéé du théorème 4.4. □

Chapitre 5

Résolution numérique par la méthode d' éléments finis en dimension deux

Dans ce chapitre, nous présentons le principe de la méthode des éléments finis : chercher la solution d'un problème variationnel approché résolu dans un espace de dimension finie. Puis, nous décrivons la méthode en dimension deux ; ces éléments sont ici supposés de forme rectangulaire.

5.1 Introduction

5.1.1 Principe de la méthode

La stratégie utilisée

Reprenons le problème variationnel général suivant : trouver $v_1 \in V$ tel que pour tout $w \in V$ on ait :

$$A(v_1, w) = L(w), \tag{5.1}$$

où V est un espace de Hilbert, L une forme linéaire continue sur V et A une forme bilinéaire, continue et V-elliptique, de sorte que, d'après le théorème de Lax-Milgram, nous savons que ce problème admet une unique solution, notée v_1, dans l'espace V. L'idée de base consiste à résoudre ce problème variationnel, non pas dans l'espace V tout entier (ce qui n'est pas abordable en général), mais dans un sous-espace de dimension finie, noté

V_h, de V (h est un paramètre strictement positif destiné à tendre vers 0) $\ll$ *approchant* $\gg$ l'espace V en un sens à définir : c'est le principe de la " méthode de Galerkin ". Pourquoi V_h de dimension finie ? Pour n'avoir qu'un nombre fini d'inconnues (ou " degrés de liberté ") à évaluer (qui seront les composantes de la solution approchée dans une base de l'espace V_h) et qu'on pourra calculer facilement en résolvant un système linéaire.

D'un point de vue théorique, il est nécessaire que ce nombre de degrés de liberté puisse être aussi grand que possible, de manière à approcher la solution exacte de manière la plus précise possible. Autrement dit, on souhaite que la dimension, notée N_T de l'espace V_h tende vers $+\infty$ quand h tend vers 0 (par exemple, N_T est inversement proportionnel à h). Plus précisément, nous ferons les hypothèses sur les espaces V_h :

Définition 5.1. On dit que les espaces V_h, $h > 0$, forment une approximation interne ou d'approximation conforme de V si :

1. pour tout $h > 0, V_h \subset V$
2. pour tout $w \in V$, il existe $w^{(h)} \in V_h$ tel que

$$\|w - w^{(h)}\|_V \to 0, quand \quad h \to 0.$$

D'un point de vue pratique, il est également souhaitable que cet espace V_h soit facile à construire : on pourra choisir un espace formé de fonctions propres de l'opérateur associé à la forme A (dans ce cas, le système linéaire est particulièrement simple à résoudre car la matrice est diagonale), ou de polynômes, ou de fonctions polynomiales par morceaux, etc. Un autre souci important dans le choix de cet espace est celui du stockage sur ordinateur de la matrice du système linéaire : plus la matrice est "creuse" (i.e. comporte beaucoup d'éléments nuls), moins elle occupe de place mémoire.

Résolution du problème variationnel approché

Le choix de ces espaces V_h étant fait, on se propose de résoudre le problème variationnel approché suivant : trouver $v_1^{(h)} \in V_h$ tel que pour tout $w^{(h)} \in V_h$ on ait :

$$A(v_1^{(h)}, w^{(h)}) = L(w^{(h)}). \tag{5.2}$$

Introduisons l'espace variationnel discret V_h défini par :

$$V_h = \{w^{(h)} \in \overline{V}_h, \quad w^{(h)} = 0 \quad \text{sur} \quad I \cup B\}, \tag{5.3}$$

où

$$\overline{V}_h = \{w^{(h)} \in C^0(\overline{S}_{H,M}), \quad \text{tel que pour tout} \quad k \in \{1, \ldots, T\} \quad \text{on ait :} \quad w^{(h)}_{/R_k} \in Q^1\}. \tag{5.4}$$

Proposition 5.1. *Soit V un espace de Hilbert et V_h un sous-espace de dimension finie de V. On suppose la forme linéaire L continue sur V, la forme bilinéaire A continue et V-elliptique, de sorte que le problème variationnel 5.1 admette une unique solution $v_1 \in V$. Le problème variationnel approché 5.2 admet aussi une unique solution $v_1^{(h)}$ dans V_h et on a par ailleurs une première estimation de l'erreur entre v_1 et $v_1^{(h)}$ sous la forme :*

$$\|v_1 - v_1^{(h)}\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{w^{(h)} \in V_h} \|v_1 - w^{(h)}\|_V \tag{5.5}$$

Preuve [2]

Remarque 5.1. L'estimation 5.5 ne répond que partiellement à la quation. En fait, ne connaissant pas v_1, il paraît a priori dificile d'évaluer la distance de v_1 à V_h (ce qui correspond, à un coefficient multiplicatif près au membre de droite de 5.5). En fait, il suffit de savoir évaluer une quantité du type $\|v_1 - w^{(h)}\|_V$ pour un choix particulier d'élément $w^{(h)}$, pour avoir une estimation de l'erreur $\|v_1 - v_1^{(h)}\|_V$: en pratique, cet élément sera un "interpolé" de v_1 (en un sens que nous préciserons plus loin), et on montrera que cette erreur est d'ordre h^k, où k est un entier directement lié au choix d'espace d'approximation.

Calcul effectif de la solution approchée

Précisons maintenant la calcul effectif de cette solution approchée $v_1^{(h)}$. L'espace V_h étant de dimension finie N_T dépend de h, il admet une base, notée $(X_1, \ldots, X_{N_T})$. On cherche alors $v_1^{(h)}$ sous forme d'une combinaison linéaire des éléments de cette base, i.e. sous la forme :

$$v_1^{(h)} = \sum_{i=1}^{N_T} v_1^{(i)} X_i. \tag{5.6}$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 5.2. *La fonction* $v_1^{(h)} = \sum_{i=1}^{N_T} v_1^{(i)} X_i$ *de* V_h *est solution du problème variationnel approchée* 5.2 *si et seulement le vecteur* $X \in \mathbb{R}^{N_T}$ *de composantes* $(v_1^{(i)})_{1 \leq i \leq N_T}$ *est solution du système linéaire suivant :*

$$AX = B, \tag{5.7}$$

où A *est la matrice de taille* $N_T \times N_T$*, d'éléments*

$$A_{i,j} = A(X_j, X_i), \quad (i,j) \in [1, N_T] \times [1, N_T], \tag{5.8}$$

et où B *est le vecteur de dimension* N_T *de composantes :*

$$B_j = L(X_j). \tag{5.9}$$

Par ailleurs, la matrice A *est définie positive et le système linéaire* 5.7 *admet une unique solution.*

Preuve [2] □

5.1.2 Notation

L'idée consiste à recouvrir le domaine $S_{H,M}$ par des éléments $T_k, \quad k \in \{1, \ldots, N_T\}$ de petite taille (destinée à tendre vers 0) et de forme simple : ce seront essentiellement des rectangles. On note : $\mathcal{T}_h$ l'ensemble de tous les éléments $T_k, \quad k \in \{1, \ldots, N_T\}$, ainsi formés ; h est défini par exemple par :

$$h = \max_{k \in \{1, \ldots, N_T\}} h(T_k),$$

où $h(T_k)$ désigne la diamètre de T_k (i.e. la distance maximale entre deux points quelconques de T_k) ; $\mathcal{T}_h$ s'appelle une " triangulation ". On considère une famille de triangulations indexée par h et notée $(\mathcal{T}_h)_h$. La condition $h \longrightarrow 0$ signifie que tous les éléments T_k ont un diamètre qui tend vers 0.

On note par :$S_{H,M}$ la bande $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -H \leq y \leq 0 \quad \text{et} - M \leq x \leq M\}$, avec M un élément assez grand à x_0.($[-x_0, x_0] \subset [-M, M]$).

Et on écrit d'autre part, $H_*^1(S_{H,M}) = \{w \in H^1(S_{H,M}) / \quad w = 0 \quad \text{sur} \quad I \cup B\}$ avec $B = \mathbb{R} \times \{-H\}$ et $I =]-x_0, x_0[\times \{0\}$.

Ces éléments doivent satisfaire un certain nombre de contraintes énoncées ci-dessous.

Définition 5.2. Nous dirons que la triangulation est admissible si :

1. L'intersection entre deux éléments quelconques T_k et $T_{k'}$ est soit vide, soit réduite à un point, soit un côté tout entier (de T_k et de $T_{k'}$) ;
2. Tous les $\ll$ *coins* $\gg$ de $I \cup B$ sont des sommets d'éléments de $\mathcal{T}_h$;
3. Inverssement, soit $S_{H,M} = \cup_{k=1}^{N_T} T_k$; tous les coins de $S_{H,M}$ sont des points de $I \cup B$;
4. Les éléments ne sont pas dégénérés, i.e. ils sont d'aire non nulle.

Pour simplifier, nous supposerons que $\overline{S}_{H,M} = S_{H,M}$; cette condition signifie en particulier que $S_{H,M}$ est un domaine de frontière polygonale.

Pour la convergence de la méthode, nous supposons également que :

$$\exists C > 0, \forall h > 0, \sup_{T_k \in \mathcal{T}_h} \frac{h(T_k)}{\rho(T_k)} \leq C,$$

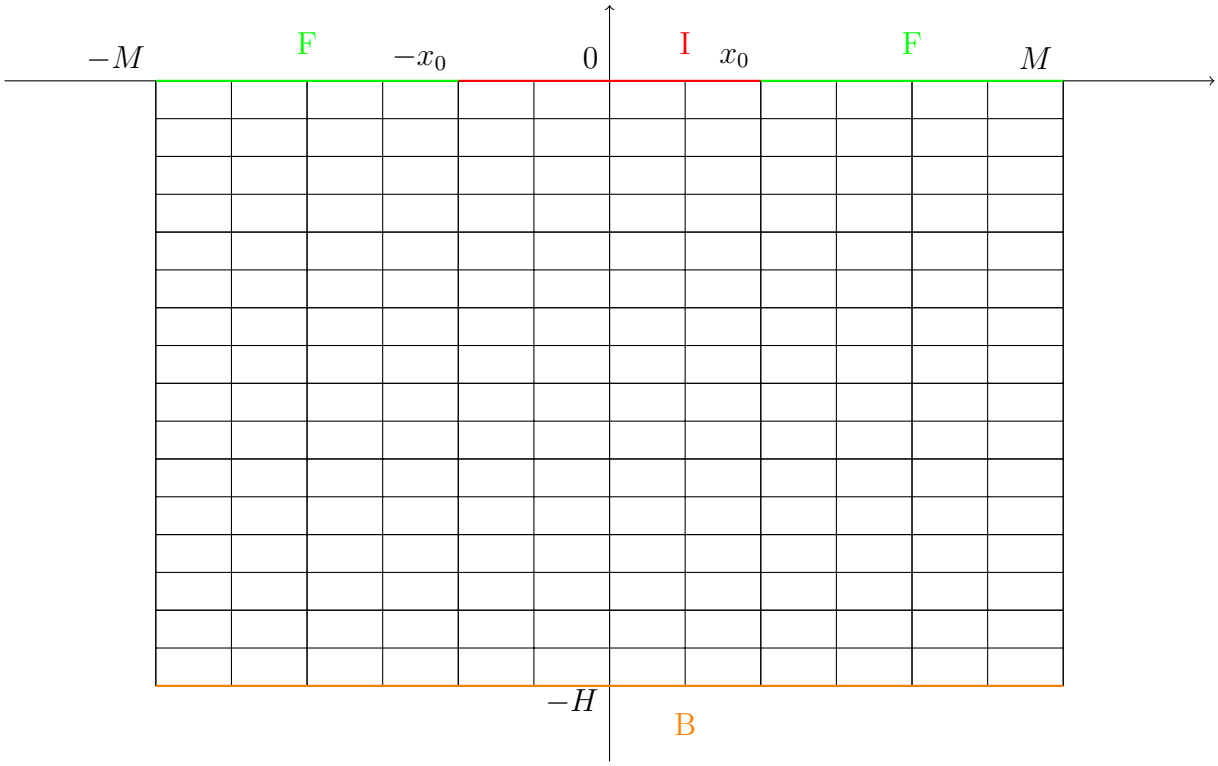
où $\rho(T_k)$ désigne le diamètre du (plus grand) cercle inscrit dans l'élément T_k.

5.2 Éléments finis rectangulaires

5.2.1 Le maillage

Soit $\Omega =]-M, M[\times]-H, 0[$, avec $]-x_0, x_0[\subset]-M, M[$. On choisé h de tel sorte posons $x_{-i_0} = -x_0$ et $x_{i_0} = x_0$ sont des sommets de la subdivision.On souhaite résoudre de manière approchée notre problème qui écrit sous la forme variationnelle (3.7) (le chapitre3). Désignant par (x_i, y_j) les coordonnées dans le plan telsque : $x_i = ih_1 \in]-M, M[$ et $y_j = jh_2 \in]-H, 0[$ avec ($i = \overline{-N_1, N_1}$ et $j = \overline{0, N_2}$, on not : $N_1 = \frac{M}{h_1} + 1$ et $N_2 = \frac{H}{h_2} + 1$ et $y_0 = -H$, on commence par recouverir $\overline{\Omega}$ par $N_T = 2N_1N_2$) petits rectangles R_k ($k = 1, \ldots, N_T$) de taille h_1 est un subdivision sur l'axe absice x et h_2 est un subdivision sur y ; pour simplifier,on note $h = max(h_1, h_2)$. Remarquons que ces rectangles sont de côtés parallèles aux axes de coordonnées. On note $q^{(i)}, \quad i \in \{1, \ldots, (2N_1+2)(N_2+2)\}$ les points du maillage ainsi défini, i.e. les sommets de tous les rectangles de la triangulation.

On désigne par $N_s = (2N_1 + 2)(N_2 + 2)$ le nombre total de ces sommets et par N_f le nombre de sommets de la frontières $I \cup B$. Par analogie, on notera $N_i = N_s - N_f$ le nombre de sommets interne : ce sont ceux qui ne sont pas situés sur la frontière $\Gamma = I \cup B$.



5.2.2 L'espace variationnel discret

On note Q^1 l'espace vectoriel des polynômes qui sont de degré inférieur ou égal à un par rapport à chacune des deux variables x et y ; cet espace admet pour base les polynômes $1, x, y, xy$. Remarquons qu'il est engendré par les produits tensoriels de fonctions affines en x par des fonctions affines en y (i.e. $Q^1 = Vect(P^1 \otimes P^1)$). Ce qui cénifie que : il existe des scalaires a, b, c, d , tels que pour tout $x = (x, y) \in R_k$, on ait :

$$\begin{cases} ax + b = 0, \\ cy + d = 0, \\ ax + by + cxy + d = 0. \end{cases}$$

Appliquation à notre problème

On va appliqué la méthode à notre problème, pour calculer la solution approchée.

Le problème variationnelle est de la forme :

$$A(v_1, w) = \int_\Omega \nabla v_1 \nabla w dxdy - \nu \int_F v_1 w dx,$$

et

$$L(w) = -\int_\Omega \nabla v_0 \nabla w dxdy + \nu \int_F v_0 w dx.$$

L'espace $V_h \subset V$ étant de dimension finie N_T, il admet une base, notée $\{X_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N_T} = (X_1, \ldots, X_{N_T})$. On cherche alors $v_1^{(h)}$ sous la forme d'une combinaison linéaire des éléments de cette base ($v_1^{(i)}$ et $w^{(i)}$ sont des scalaires), i.e. sous la forme :

$$v_1^{(h)} = \sum_{i=1}^{N_T} v_1^{(i)} X_i$$

D'autre part, pour tout $w^{(h)} \in V_h$:

$$w^{(h)} = \sum_{i=1}^{N_T} w^{(i)} X_i$$

En effet, on a :

$$A(v_1, w) = L(w)$$

Ainsi de suite, on va remplacer les scalaires dans A et L,

$$A(\sum_{i=1}^{N_T} v_1^{(i)} X_i, \sum_{j=1}^{N_T} w^{(j)} X_j) = L(\sum_{j=1}^{N_T} w^{(j)} X_j)$$

$$\sum_{j=1}^{N_T} w^{(j)} A(\sum_{i=1}^{N_T} v_1^{(i)} X_i, X_j) = \sum_{j=1}^{N_T} w^{(j)} L(X_j)$$

$$A(\sum_{i=1}^{N_T} v_1^{(i)} X_i, X_j) = L(X_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant N_T$$

$$\sum_{i=1}^{N_T} v_1^{(i)} A(X_i, X_j) = L(X_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant N_T$$

Avec

$$A_{ij} = A(X_i, X_j), \quad et \quad B_j = L(X_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant N_T$$

en remplaçon par les fonctions de base, on trouve :

$$\begin{aligned} A(X_j, X_i) &= \int_\Omega \nabla X_j(x) \nabla X_i(x) dxdy - \nu \int_F X_j(x) X_i(x) dx, \\ L(X_j) &= -\int_\Omega \nabla v_0 \nabla X_j(x) dxdy + \nu \int_F v_0 X_j(x) dx. \end{aligned}$$

5.2.3 Calcul de la solution discrète

Ce paragraphe précise le calcul effectif de la solution $v_1^{(h)}$ du problème variationnel discret 5.2. où V_h est l'espace décrit dans le corollaire (on en connaît donc précisément la dimension ainsi qu'une base). Par commodité d'écriture, nous supposerons que les indices des sommets internes du maillage sont les premiers indices, i.e. ceux de 1 à N_i. On cherche $v_1^{(h)}$ sous la forme $v_1^{(h)} = \sum_{j=1}^{N_i} v_1^{(j)} X_j$; les composantes $v_1^{(1)}, \ldots, v_1^{(N_i)}$ de $v_1^{(h)}$ sont alors solutions du système linéaire (5.7.) – (5.9.), avec ici : $N_T = N_i$, système qui est inversible puisque la matrice A est déféinie positive. Pour connaître $v_1^{(h)}$, il suffit donc de calculer la matrice A et le second membre B de ce système. On a : soit $x = (x, y)$

$$A_{i,j} = \int_\Omega \nabla X_j . \nabla X_i dxdy - \nu \int_F [X_i X_j](x) dx = \sum_{k=1}^{N_T} A_{i,j}(R_k),$$

avec

$$A_{i,j}(R_k) = \int_{R_k} \nabla X_j(x) . \nabla X_i(x) dxdy - \nu \int_F [X_i X_j](x) dx \tag{5.10}$$

$$B_j = -\int_\Omega \nabla v_0 \nabla X_j(x) dxdy + \nu \int_F v_0 X_j(x) dx = \sum_{k=1}^{N_T} B_j(R_k),$$

avec

$$B_j(R_k) = -\int_{R_k} \nabla v_0 \nabla X_j(x) dxdy + \nu \int_F v_0 X_j(x) dx \tag{5.11}$$

Cette écriteure montre que le calcul des coefficients de la matrice et du second membre se ramène à une somme de contributions élémentaires ($A_{i,j}(R_k)$ et $B_j(R_k)$) sur chacun des rectangles formant la triangulation. On remarque par ailleurs que le support de la fonction X_i est inclus dans la réunion des quatre rectangles entourant le sommet $q^{(i)}$.En conséquence, pour un rectangle R_k donné, n'interviennent dans le calcul effectif de $A_{i,j}(R_k)$ que les indices i et j associés à des sommets $q^{(i)}$ et $q^{(j)}$ du rectangle R_k (la contribution sur R_k étant nulle dans le cas contraire, i.e. si l'un au moins des points $q^{(i)}$ ou $q^{(j)}$ n'est pas sommet du rectangle R_k considéré). Cette constatation vaut aussi pour le calcul du

second membre. On est donc ramené à un calcul local, i.e. sur chacun des rectangles de la triangulation ; c'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant. Ce calcul étant fait, il suffit ensuite de sommer les contributions élémentaires sur chacun des rectangles pour en déduire l'expression de la matrice A (et du second membre B) ; cette dernière étape s'appelle usuellement étape d'assemblage. Précisons maintenant le calcul sur un rectangle élémentaire et pour cela explicitons le calcul des fonctions de base sur un rectangle R_k.

Pour calculer les $A_{i,j}$ et B_j on a besoin de définie une base X_i, X_j

Le but de la proposition qui suit est de définir une base de l'espace $\overline{V}_h$ et de donnner les degrée de liberté des fonctions de cet espace.

Proposition 5.3. *1. Les fonctions de $\overline{V}_h$ sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_s sommets $q^{(i)}$ du maillage.*

2. La dimension de l'espace $\overline{V}_h$ est $N_s = (2N_1 + 2)(N_2 + 2)$ et une base est formée des N_s fonctions X_i suivantes :

$$X_i \in \overline{V}_h, \quad X_i(q^{(j)}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(5.12)

Ces fonctions sont appelées $\ll$ fonctions chapeaux $\gg$ (en raison de leur graphe ; cf.figure1), et on a :

$$\forall w^{(h)} \in \overline{V}_h, \quad w^{(h)} = \sum_{i=1}^{N_s} w^{(h)}(q^{(i)}) X_i. \tag{5.13}$$

Les scalaires $w^{(h)}(q^{(i)})$ $(i \in \{1, \ldots, N_s\})$ sont les degrés de liberté de la fonction $w^{(h)} \in \overline{V}_h$.

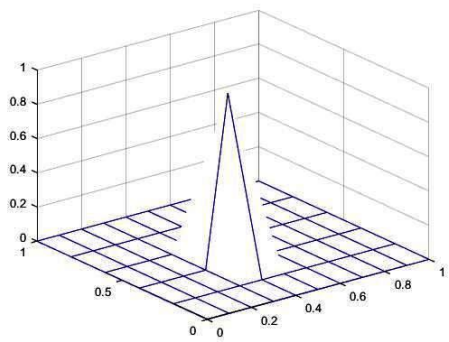


figure1 : Support de la fonction chapeau associée au sommet d'indice i ;

3. *$\overline{V}_h \subset H^1(\Omega)$ et pour toute fonction $w^{(h)} \in \overline{V}_h$, on a au sens des distributions :*

$$\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{N_T} \chi_{R_k^\circ} \frac{\partial}{\partial x_i}(w^{(h)}/_{R_k^\circ}), \tag{5.14}$$

où $\chi_{R_k^\circ}$ désigne la fonction indicatrice de l'intérieur, noté R_k°, du rectangle R_k (i.e. la fonction vaut 1 sur R_k° et 0 ailleurs).

Preuve Montrons le premier point. Soit $w^{(h)} \in \overline{V}_h$ et R_k un rectangle quelconque de sommets $A^{(1)}A^{(2)}A^{(3)}A^{(4)}$ de la triangulation. Montrons que la restriction de $w^{(h)}$ à ce rectangle est entièrement déterminée par les valeurs que prend $w^{(h)}$ aux quatre sommets $A^{(i)}$, $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Notons $(x^{(i)}, y^{(i)})$ les coordonnées de $A^{(i)}$. Par définition de l'espace $\overline{V}_h$, il existe quatre scalaires α, β, γ et δ tels que, pour tout point $x = (x, y) \in R_k$, on ait :

$$w^{(h)}(x) = \alpha + \beta(x - x^{(1)}) + \gamma(y - y^{(1)}) + \delta(x - x^{(1)})(y - y^{(1)}).$$

Le problème revient donc à identifier les quatres coefficients α, β, γ et δ en fonction des valeurs prises par $w^{(h)}$ aux quatre sommets du rectangle, soit à résoudre le système linéaire suivant (puisque $h_1 = x^{(2)} - x^{(1)} = x^{(3)} - x^{(1)}$, $h_2 = y^{(3)} - y^{(1)} = y^{(4)} - y^{(1)}, cf. Figure 2$) :

$$\begin{aligned}
\alpha &= w^{(h)}(A^{(1)}), \\
\alpha + \beta h_1 &= w^{(h)}(A^{(2)}), \\
\alpha \quad + \gamma h_2 &= w^{(h)}(A^{(4)}), \\
\alpha + \beta h_1 + \gamma h_2 + \delta h_1 h_2 &= w^{(h)}(A^{(3)}).
\end{aligned}$$

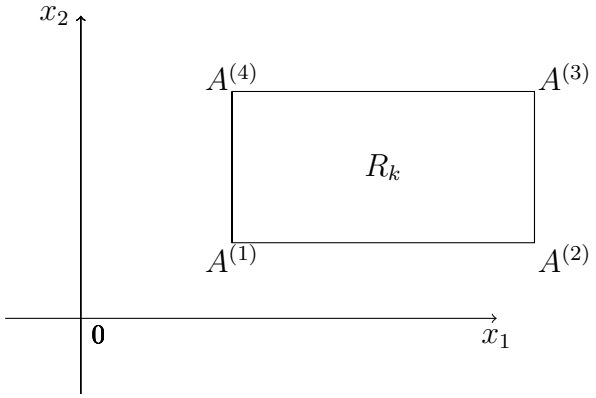


Figure2 :Un rectangle quelconque du maillage

Or il s'agit l'un système triangulaire dont le déterminant vaut : $(h_1h_2)^2 \neq 0$. Ce système est donc inversible, ce qui termine le premier point.

D'après ce qui précède, le nombre de degré de liberté des fonctions de l'espace $\overline{V}_h$ est égal au nombre de sommets du maillage, ce qui donne : $dim(\overline{V}_h) \leq N_s$. Pour montrer que $dim(\overline{V}_h) = N_s$, il suffit de montrer qu'inversement, les fonctions Q^1 par morceaux ainsi construites, sur chaque petit rectangle (en se donnant les valeurs aux quatre sommets) sont continues sur $\overline{\Omega}$. Comme ces fonctions sont par contruction continues à l'intérieur de chacun des rectangles, il suffit de montrer que le raccord à l'interface entre deux rectangles R_k et $R_{k'}$ est continue. Rappelons que ces rectangles sont de côtés parallèles aux axes de coordonnées. Pour fixer les idées, donnons le raisonnement dans le cas où l'interface $[A, B]$ entre les deux rectangles est parallèle à l'axe des ordonnées.

On note pour simplifier $w = w^{(h)}_{/R_k}$ et $w' = w_{/R_k}$. Par construction, on a : $(w-w')(A) = 0$ et $(w-w')(B) = 0$ et la question est de savoir si $w-w'$ est identiquement nulle sur tout le segment $[A, B]$. Or la restriction de $w-w'$ à ce segment étant un polynôme qui ne dépend que d'une seule variable y, c'est une fonction affine de y et cette fonction s'annule en deux points distincts : c'est donc le polynôme nul, de sorte que la fonction $w^{(h)}$ se raccorde de manière continue à l'interface entre les deux rectangles. On a donc : $dim(\overline{V}_h) = N_s$.

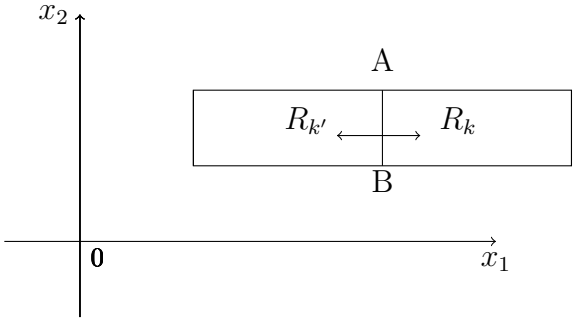


Figure3 : Recollement à l'interface entre deux rectangles

Montrons que les fonctions chapeaux X_i, $i \in \{1, \ldots, N_s\}$ forment une famille libre. Pour cela, supposons qu'il existe N_s scalaire $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_s}$ tels que la fonction $w^{(h)} = \sum_{j=1}^{N_s} \lambda_j X_j$ soit nulle. On en déduit a fortiori qu'elle est nulle en chacun des N_s points $q^{(i)}$, i.e. que, pour tout $i \in \{1, \ldots, N_s\}$ on a :

$$0 = w^{(h)}(q^{(i)}) = \sum_{j=1}^{N_s} \lambda_j X_j(q^{(i)}) = \lambda_i.$$

Chacun des coefficients λ_i est donc nul, et la famille est libre. Comme elle comporte N_s éléments, c'est une base de $\overline{V}_h$ et tout élément $w^{(h)}$ de cet espace peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de cette base, i.e. est de la forme : $w^{(h)} = \sum_{j=1}^{N_s} \lambda_j X_j$.

Mais pour chaque indice i, on a : $w^{(h)}(q^{(i)}) = \sum_{j=1}^{N_s} \lambda_j X_j(q^{(i)}) = \lambda_i$, ce qui donne l'écriture (5.13).

Montrons maintenant le troisième point. On a tout d'abord clairement $\overline{V}_h \subset L^2(\Omega)$ (car $\overline{V}_h \subset L^\infty(\Omega)$ et Ω est borné). Soit $w^{(h)} \in \overline{V}_h$; il suffit donc de montrer que chacune des dérivées (au sens des distributions) $\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_i}$ de $w^{(h)}$ est de carré intégrable sur Ω. Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$; nous avons :

$$\begin{aligned} < \frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_i}, \varphi > &= - < w^{(h)}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \\ &= - \int_\Omega w^{(h)}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \sum_{k=1}^{N_T} \int_{R_k} w^{(h)}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{N_T} \int_{R_k} \frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx - S, \end{aligned}$$

où

$$S = \sum_{k=1}^{N_T} \int_{\partial R_k} [w^{(h)} \varphi \nu_{i,k}](x) d\gamma(x),$$

$\nu_{i,k}$ désignant la composante d'indice i de la normale ν_k à ∂R_k orientée vers l'extérieur de R_k. Dans cette expression, S se décompose en somme d'intégrales sur des arêtes de rectangles. En fait on a : $S = 0$, car de deux choses l'une : soit l'arête considérée est située sur le bord Γ de Ω, auquel cas φ étant nulle sur Γ, l'intégrale sur cette arête est nulle, soit cette arête est intérieure (i.e. non située sur Γ) ; dans ce dernier cas, l'arête, notée $[AB]$, est commune à deux rectangles R_k et $R_{k'}$ pour lesquels les normales ν_k et $\nu_{k'}$ sont opposées (cf.Figure3) et la fonction à intégrer étant continue à l'interface entre les deux rectangles (c'est ce que nous venons de démontrer plus haut), on a alors :

$$\int_{[AB]} [w^{(h)} \varphi \nu_{i,k}](x) d\gamma(x) + \int_{[AB]} [w^{(h)} \varphi \nu_{i,k'}](x) d\gamma(x) = 0.$$

On en déduit que pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ on a : $S = 0$ de sorte que

$$< \frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_i}, \varphi >= \sum_{k=1}^{N_T} \int_{R_k} \frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx,$$

ce qui donne (5.14)et montre que la distribution $\frac{\partial w^{(h)}}{\partial x_i}$ est de carré intégrable sur Ω.$\square$

Remarque 5.2. Notons l'importance dans le raisonnement précédent de l'hypothèse selon laquelle les rectangles de la triangulation ont leurs côtés parallèles aux axes de coordonnées. A la fois pour identifier la dimension de l'espace discret, mais surtout pour montrer que ce dernier définit une approximation conforme de l'espace $H^1(\Omega)$.

On en déduit alors le corollaire suivant concernant l'espace V_h :

Corollaire 5.4. *1. Les fonctions de $w^{(h)}$ sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_i sommets du maillage.*

2. La dimension de l'espace V_h est N_i ; une base est formée des fonctions chapeaux X_i associées aux sommets internes et on a :

$$\forall \quad w^{(h)} \in V_h, \quad w^{(h)} = \sum_{i/q^i \notin \Gamma} w^{(h)}(q^{(i)}) X_i. \tag{5.15}$$

Les scalaires $w^{(h)}(q^{(i)})$ (pour les indices i tels que $q^i \notin \Gamma$) sont les degrés de liberté de la fonction $w^{(h)} \in V_h$.

Preuve [2] □

5.2.4 Construction des fonctions de base sur un rectangle R_k

Considérons un rectangle quelconque R_k de la triangulation et désignons par $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ et $A^{(4)}$ ses sommet ; notons $(x^{(i)}, y^{(i)})$ les coordonnées de $A^{(i)}$. On se propose de trouver quatre polynômes $p^{(i)} \in Q^1, p^{(i)}(A^{(j)}) = \delta_{ij}(= 1, si \quad i = j, 0 \quad sinon)$.

On trouve aisément $(x = (x, y))$:

$$\begin{aligned} p^{(1)}(x,y) &= \frac{1}{h_1 h_2}(x - x^{(2)})(y - y^{(4)}), \\ p^{(2)}(x,y) &= -\frac{1}{h_1 h_2}(x - x^{(1)})(y - y^{(4)}), \\ p^{(3)}(x,y) &= \frac{1}{h_1 h_2}(x - x^{(1)})(y - y^{(1)}), \\ p^{(4)}(x,y) &= -\frac{1}{h_1 h_2}(x - x^{(2)})(y - y^{(1)}). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Quel est le lien entre cette construction locale des fonctions de base et la fonction chapeau X_i associée au point $q^{(i)}$ du maillage ? Cela permet de calculer la restriction de X_i à chacun des rectangles élémentaires R_k. En effet, de deux chose l'une :

1. Soit $q^{(i)} \notin R_k$ et $X_{i\backslash R_k} = 0$,
2. Soit $q^{(i)} \in R_k$; pour fixer les idées supposons par exemple que $q^{(i)}$ coïncide avec le point, $A^{(3)}$ sur R_k, alors : $X_{i\backslash R_k}$ est le polynôme $p^{(3)}$) défini par (5.16), i.e. sur le rectangle R_k, on a :

$$X_i(x) = \frac{1}{h_1 h_2}(x - x^{(1)}(R_k))(y - y^{(1)}(R_k)),$$

où, par souci de clarté, nous avons noté $(x^{(i)}(R_k), y^{(i)}(R_k))$ les coordonnées du sommet d'indice i de R_k.

Ayant ainsi l'expression analytique des fonctions de base sur R_k, on peut alors calculer les contributions élémentaires $A_{i,j}(R_k)$ et $B_j(R_k)$ définies par (5.10) − (5.11). Ce calcul peut aussi se faire à partir de l'expression des fonctions de base sur un élément dit "de référence", ici le carré unité $[0,1] \times [0,1]$: c'est ce que nous allons préciser maintenant.

5.2.5 Utilisation des fonctions de base sur l'élément de référence

Il peut paraître parfois plus simple (surtout si on est amené à considérer des polynômes de degrés plus élevés) de faire le calcul des fonctions de base une fois pour toutes sur l'élément de référence $[0,1] \times [0,1]$, puis de transposer les calculs par homothétie et translation à tous les rectangles de la triangulation. De quelle manière ? Soit C le carré unité de sommets $A^{(1)}A^{(2)}A^{(3)}A^{(4)}$ et R_k un rectangle élémentaire quelconque de sommets notés $A^{(1)}(R_k), A^{(2)}(R_k), A^{(3)}(R_k)$ et$A^{(4)}(R_k)$. Il existe une transformation affine F telle que pour chaque indice i, on ait : $F(A^{(i)}) = A^{(i)}(R_k)$; cette transformation est définie en chaque point x du plan de coordonnées (x, y) par :

$$F(x) = A^{(1)}(R_k) + x\overrightarrow{A^{(1)}(R_k)A^{(2)}(R_k)} + y\overrightarrow{A^{(1)}(R_k)A^{(4)}(R_k)},$$

et l'image par cette application du carré C est le rectangle (R_k) (cf.Figure4).

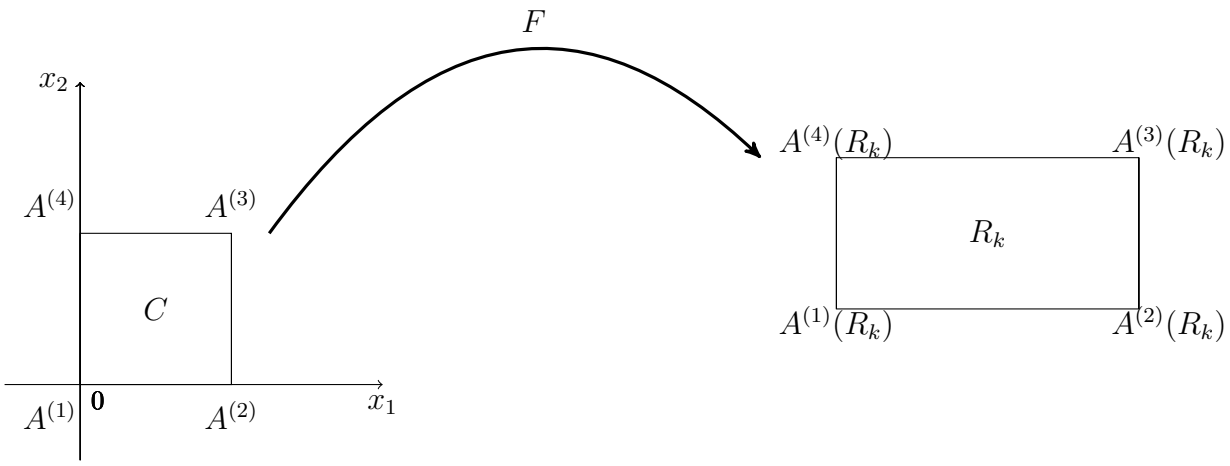


Figure4 : Correspondance avec l'élément de référence C

Par ailleurs, un calcul simple montre que sur le carré C les fonctions de base de l'approximation par éléments finis Q^1 associées aux degrés de liberté $p(A^{(1)})$, $p(A^{(2)})$, $p(A^{(3)})$ et $p(A^{(4)})$ sont données par :

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (1-x)(1-y), \\ p_2(x) &= x(1-y), \\ p_3(x) &= xy, \\ p_4(x) &= (1-x)y. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Pour chaque indice $i \in \{1, \ldots, 4\}$, on a alors : $p^{(i)}(F(x)) = p_i(x)$ (en effet le polynôme $p^{(i)}$ ainsi défini est dans l'espace Q^1, il vaut 1 au point $A^{(i)}(R_k)$ et 0 aux trois autres sommets), ce qui donne en définitive :

$$p^{(i)}(x) = p_i\left(\frac{x - x^{(1)}(R_k)}{x^{(2)}(R_k) - x^{(1)}(R_k)}, \frac{y - y^{(1)}(R_k)}{y^{(4)}(R_k) - y^{(1)}(R_k)}\right),$$

où nous avons noté $(x^{(i)}(R_k), y^{(i)}(R_k))$ les coordonnées du sommet $A^{(i)}(R_k)$. Injectant ensuite (5.17) dans l'expression ci-dessus, on retrouve bien évidemment (5.16). Notons que ce changement de variables peut être directement utilisé pour les calculs d'intégrales figurant dans $A_{i,j}(R_k)$ et $B_j(R_k)$, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 5.1. Donnons un exemple (très simple) d'utilisation de cet élément de référence. Nous nous proposons de calculer l'élément diagonal $A_{i,i}$ de la matrice A dans le cas

où c est une fonction constante, notée ν. Sur un rectangle R_k donné, nous avons :

$$A_{i,i}(R_k) = \int_{R_k} |\nabla X_i(x)|^2 dxdy - \nu \int_F [X_i(x)]^2 dx.$$

Supposons dans un premier temps (pour fixer les idées) que sur R_k, le point $q^{(i)}$ coïncide avec le sommet $A^{(3)}(R_k)$. Alors, en utilisant les notations précédentes, nous avons : pour tout point x de R_k, $X_i(x) = p^{(3)}(x) = p_3(y) = y_1 y_2$, avec :

$$y = F^{-1}(x) = (\frac{x - x^{(1)}(R_k)}{h_1}, \frac{y - y^{(1)}(R_k)}{h_2}) \in C,$$

de sorte que le gradient de la fonction X_i sur R_k vaut :

$$x \in R_k, \nabla X_i(x) = (\frac{y_2}{h_1}, \frac{y_1}{h_2}).$$

Par intégration, nous obtenons :

$$\int_{R_k} |\nabla X_i(x)|^2 dx = \frac{h_1 h_2}{3}[(\frac{1}{h_1})^2 + (\frac{1}{h_2})^2].$$

Nous avons de même pour le deuxième terme de $A_{i,i}(R_k)$:

$$\begin{aligned} \int_{R_k} [X_i(x)]^2 dx &= \int_{R_k} [p^{(3)}(x)]^2 dx = h_1 h_2 \int_C [p_3(y)]^2 dy \\ &= h_1 h_2 \int_0^1 \int_0^1 y_1^2 y_2^2 dy_1 dy_2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$A_{i,i}(R_k) = \frac{h_1 h_2}{3}[(\frac{1}{h_1})^2 + (\frac{1}{h_2})^2].$$

Nous remarquons en particulier que le résultat est indépendant de k. Pour calculer $A_{i,i}$, il suffit de reproduire ce type de calculs dans chacun des quatre rectangles $R_1^{(i)}$, $R_2^{(i)}$, $R_3^{(i)}$ et $R_4^{(i)}$ composant le support de la fonction X_i (cf. Figure5). Le point $q^{(i)}$ représente successivement le point d'indice local 3 dans le rectangle $R_1^{(i)}$ (i.e. le point noté usuellement $A^{(3)}(R_1^{(i)})$), d'indice local 4 dans $R_2^{(i)}$, d'indice local 1 dans $R_3^{(i)}$ et d'indice local 2 dans $R_4^{(i)}$. Sur le rectangle $R_2^{(i)}$, la fonction X_i coïncide donc (à une translation près) avec la fonction $p^{(4)}$, sur $R_3^{(i)}$ avec $p^{(1)}$ et enfin sur $R_4^{(i)}$ avec $p^{(2)}$. On remarque alors aisément que le calcul de la contribution élémentaire sur chacun de ces quatre rectangles est le même, ce qui donne en définitive :

$$A_{i,i}(R_k) = \frac{4 h_1 h_2}{3}[(\frac{1}{h_1})^2 + (\frac{1}{h_2})^2].$$

5.2.6 Lien avec l'approximation par éléments finis $P^{(1)}$ en dimension un

On remarque que les fonctions de base $p_i (i \in \{1, \ldots, 4\})$ définies par (5.17) sont exactement les produits tensoriels des fonctions de base ω_0 et ω_1 de l'approximation par éléments finis $P^{(1)}$ en dimension un sur le segment unité $[0, 1]$. On a en effet :

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \omega_0(x)\omega_0(y), \quad p_2(x) = \omega_1(x)\omega_0(y), \\ p_3(x) &= \omega_1(x)\omega_1(y), \quad p_4(x) = \omega_0(x)\omega_1(y). \end{aligned}$$

Cette situation se reproduit également sur chacun des rectangles de la triangulation, de sorte que les fonctions de base X_i sont les produits tensoriels des fonctions "chapeaux" de l'approximation par éléments finis $P^{(1)}$ en dimension un. Plus précisément, l'indice i du sommet $q^{(i)}$ de coordonnées $x^{(i)} = ih_1, y^{(i)} = jh_2$ peut s'écrire sous la forme d'un couple (i, j) et la fonction de base ω_i associée à ce point s'écrit :

$$\omega_i(x) = \omega_i(x)\omega_j(y), x = (x, y).$$

Le support de cette fonction est la réunion des quatre rectangles élémentaires entourant le point $q^{(i)}$. Désignons par $R_1^{(i)}$, $R_2^{(i)}$, $R_3^{(i)}$ et $R_4^{(i)}$ ces rectangles ; on a :

$$\begin{aligned} \omega_i(x) &= \omega_1(\frac{x-(i_1-1)h_1}{h_1})\omega_1(\frac{y-(i_2-1)h_2}{h_2}), six \in R_1^{(i)}, \\ &= \omega_0(\frac{x-i_1h_1}{h_1})\omega_1(\frac{y-(i_2-1)h_2}{h_2}), six \in R_2^{(i)}, \\ &= \omega_0(\frac{x-i_1h_1}{h_1})\omega_0(\frac{y-i_2h_2}{h_2}), six \in R_3^{(i)}, \\ &= \omega_1(\frac{x-(i_1-1)h_1}{h_1})\omega_0(\frac{y-i_2h_2}{h_2}), six \in R_4^{(i)}, \\ &= 0, sinon. \end{aligned} \tag{5.18}$$

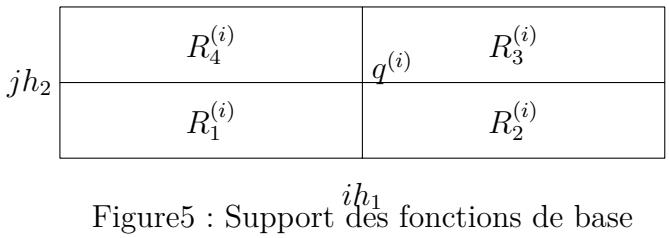


Figure5 : Support des fonctions de base

5.2.7 Structure de la matrice

Nous venons de préciser dans les paragraphes précédents, et ce de différentes façons, comment calculer les fonctions de base ω_i, les éléments de la matrice A et le second membre B du système linéaire à résoudre. Un autre point important au niveau pratique est la structure de la matrice (cela conditionne par exemple le choix de son stockage en mémoire). Celle-ci dépend de la numérotationne des fonctions de base de l'espace V_h.

Pour fixer les idées, numérotons ces N_i fonctions $\omega_i = \omega_i \otimes \omega_j$, où $i \in \{-N_1, \ldots, N_1\}$, $j \in \{0, \ldots, N_2\}$, en "balayant" le maillage ligne par ligne, i.e. de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll}
\omega_{-N_1} \otimes \omega_0, \omega_{-N_1+1} \otimes \omega_0, \ldots, \omega_{-i_0-1} \otimes \omega_0, 0, \ldots, 0, \omega_{i_0+1} \otimes \omega_0, \omega_2 \otimes \omega_0, \ldots, \omega_{N_1} \otimes \omega_0, & & & \\
\omega_{-N_1} \otimes \omega_1, \omega_2 \otimes \omega_1, \ldots, & & & , \ldots \omega_{N_1} \otimes \omega_1, \\
\omega_{-N_1} \otimes \omega_2, \omega_2 \otimes \omega_2, \ldots, \quad , & & & , \ldots, \omega_{N_1} \otimes \omega_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0, \ldots, & , \ldots, & 0, \ldots, & , \ldots, 0,
\end{array}$$

La matrice A a alors une structure N_2^2 blocs, chacun des blocs étant de taille $N_1 \times N_1$ (cette structure est propre à la numérotation choisie ; pour une numérotation des fonctions de base obtenue en balayant le maillage colonne par colonne, on obtient le même type de résultat mais en inversant le rôle de N_1 et de N_2). Par ailleurs, la matrice A est tridiagonale par blocs et chacun des sous blocs (de taille $N_1 \times N_1$) la composant est lui-même tridiagonal : ceci est dû au support des fonctions de base. On a en effet, en notant $A^{(k,l)}$ le $N_1 \times N_1$ bloc d'indice k, l de A et par $(A^{(k,l)})_{i,j}$ l'élément de la i ème ligne et de la j ème colonne de ce bloc :

$$(A^{(k,l)})_{i,j} = \mathcal{A}(\omega_j \otimes \omega_l, \omega_i \otimes \omega_k),$$

de sorte que $(A^{(k,l)})_{i,j} = 0$ pour $\mid k - l \mid \geq 2$ ou $\mid i - j \mid \geq 2$; on en déduit dans le premier cas que A est tridiagonale par blocs et dans le second que chacun des blocs est tridiagonal, ce qui schématiquement s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} A^{(0,0)} & A^{(0,1)} & A^{(0,2)} & 0 & 0 & 0 \\ A^{(1,0)} & A^{(1,1)} & A^{(1,2)} & A^{(1,3)} & 0 & 0 \\ 0 & A^{(2,1)} & A^{(2,2)} & A^{(2,3)} & A^{(2,4)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & A^{(N_2-2,N_2-3)} & A^{(N_2-2,N_2-2)} & A^{(N_2-2,N_2-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^{(N_2-1,N_2-2)} & A^{(N_2-1,N_2-1)} & A^{(N_2-1,N_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec pour chaque indice k, l :

$$A^{(k,l)} = \begin{pmatrix} A^{(k,l)}_{-N_1,-N_1} & A^{(k,l)}_{-N_1,1} & A^{(k,l)}_{-N_1,2} & 0 & 0 & 0 \\ A^{(k,l)}_{-N_1+1,-N_1} & A^{(k,l)}_{-N_1+1,-N_1+1} & A^{(k,l)}_{-N_1+1,1} & A^{(k,l)}_{-N_1+1,2} & A^{(k,l)}_{-N_1+1,3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A^{(k,l)}_{(N_1-1,N_1-2)} & A^{(k,l)}_{(N_1-1,N_1-1)} & A^{(k,l)}_{(N_1-1,N_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^{(k,l)}_{(N_1,N_1-1)} & A^{(k,l)}_{(N_1,N_1)} \end{pmatrix},$$

La matrice B est un bloc des vecteures chaque vecteur s'écrit sous la forme suivant :

$$B_0 = \begin{pmatrix} L(\omega_{-N_1} \otimes \omega_0) \\ L(\omega_{-N_1+1} \otimes \omega_0) \\ \vdots \\ L(\omega_{N_1} \otimes \omega_0) \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} L(\omega_{-N_1} \otimes \omega_1) \\ L(\omega_{-N_1+1} \otimes \omega_1) \\ \vdots \\ L(\omega_{N_1} \otimes \omega_1) \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , B_{N_2} = \begin{pmatrix} L(\omega_{-N_1} \otimes \omega_{N_2}) \\ L(\omega_{-N_1+1} \otimes \omega_{N_2}) \\ \vdots \\ L(\omega_{N_1} \otimes \omega_{N_2}) \end{pmatrix}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{N_2}. \end{pmatrix}$$

Conclusion

Nous avons étudié l'écoulement,dans un fluide lourd de profondeur finie, perturbé par un obstacle mince, se déplaçant avec une vitesse uniforme, sous critique. Nous avons proposé une formulation du problème linéairsé.

Néanmoins, la preuve de la coercivité de la forme bilinéaire qui apparaissent du côté gauche d'équation variationnelle est plus complexe dans le cas sous critique, et sefonde sur le propiété de la solution. En conséquence, nous avons trouvé une classe de solution, qui a une propriété régulière.

La solution la plus régulière, est continue et borné jusqu'à la frontière. On va énoncé une condition nécessaire et suffusante pour leur existence, si la vitesse diffère de vêaleur de la suite C_n. Le condition s'écrive sous la forme de la relation d'orthogonalité pour la dérivée de la fonction représentant le profil du cylindre (voir le théorème 4.5.).

Le champ de vitesse a une énergie finie, mais est en général singulier en deux points sur le dessus de la bande, qui sont les points extrêmes d'un segment (coque) représentant la limite du profil du cylindre. Dans un travail ultérieur à celui-ci, D.Pierotti a montre que, le résultat obtenu dans le cas linéaire reste vrai dans la cas non linéaire (avec un obstacle mince).

Dans le dernier cas, la discontinuité peut être liée à la présence des points de stagnation de l'écoulement correspondant.

L'objectif de l'étude la méthode d'élément fini, consacré en trouvera la solution d'un problème linèaire de dimension fini, et ça par établir la solution approcher.

Bibliographie

[1] B. Méhauté, *"An intoduction to hydrodynamics and water waves", Springer-Verlag, New York,* 1976.

[2] B.L Brigitte. Lacquin. *"Équations aux dérivées partielles et leurs approximations. Maître de conférences à l'Université pierre et marie curie",Paris VI*

[3] C.D Pagani and D.Pierotti, *The Neumann-Kelvin problem for a bean, Anal. Appl.,* 240(1999) ? 60-79.

[4] E. Lifchitz **et** L. Landau ,*"Mécanique des fluides," Mir, Moscou,* 1971.

[5] H.B. Hai m BREZIS *"Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications". Masson Paris NewYork Barcelone Milan SaoPaulo*1987.

[6] J. Nečas, *"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson,*1967.

[7] J.J. Stoker, *"Water Waves," Interscience, New York,* 1957.

[8] L. Schwartz, *"Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques", Paris, Hermann* 1965.

[9] M. Bousseboua. *"Fonctions de la variable complexe," O.P.U* 2000.

[10] N.G. Kuznetsov. *On uniqueness and solvability in the linearized two-dimension of a supercritical stream about a surface-piercing body, Proc. Roy. Soc. Ser. A,* 450(1995),233-253.

[11] P. Grisvard. *" Elliptic problem in nonsmooth domains", Pitman Adv. Publ. Program, London,* 1985 ;

[12] R. Dautray. J.L. Lions. *"Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques. volume3. Espaces de Sobolev", Editions Masson* 1987.