

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ahmed Draia Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et d'Informatique



MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par :

DJEDDI Hacene

Thème

Sur la solution numérique d'équations différentielles d'ordre fractionnaire

Soutenu publiquement le 19 / 10 / 2020

devant le jury composé de :

M. CHAHAD Abdelkader	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Président
M. SLAMA Abdeldjalil	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Encadreur
M. BOUDAOU Ahmed	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Examineur

Année Universitaire : 2019-2020

Remerciment

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Mes plus vifs remerciements vont aussi à mon encadreur : **M.SLAMA Abdeldjalil**, pour ses précieux conseils, son aide et son encouragement.

Je remercie vivement **M.CHAHAD Abdelkader** de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

J'adresse mes remerciements à **M.BOUDAOUI Ahmed** qui m'a fait l'honneur de juger ce travail.

Nous adressons également un grand merci à tous les enseignants de département de Mathématiques ainsi que l'administration en général.

Et en fin j'adresse mes sincères remerciements à mes parents, mes frères et soeurs, mes amis et à tous qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à...

A la mémoire de mon Père.

A la mémoire de ma grande mère.

A ma très chère mère.

A mes très chères sœurs et mes frères.

A tous les membres de ma
famille, petits et grands.

A mes chères ami(e)s.

A tous les étudiant(e)s d'université de
Larbi tébessi - Tébessa.

A tous les étudiant(e)s d'université
Ahmed DRAIA - Adrar.

Table des matières

Remerciment	I
Dédicaces	II
Table des matières	III
Table des figures	V
Liste des tableaux	VI
Résumé	VII
Introduction	1
1 Notions générales et définitions	3
1.1 La fonction Gamma	3
1.1.1 Propriétés de base de la fonction Gamma	3
1.2 La fonction Bêta	5
1.3 La fonction d'erreur complémentaire (erfc)	6
1.3.1 Propriétés	6
1.4 Transformations de Laplace	6
1.4.1 Produit de convolution	7
1.4.2 Propriété de la transformé de Laplace	7
1.4.3 Exemples de transformation(inverse) de Laplace	7
1.5 La fonction Mittag-Leffler	8
1.5.1 Propriétés	8
1.6 L'ensemble relativement compact	9
1.7 Théorème de Arzelà-Ascoli	10
1.8 Quelques théorème du point fixe	10

2	Calcul fractionnaire	11
2.1	La Dérivé fractionnaire au sens de Grünwald–Letnikov	11
2.1.1	Dérivée fractionnaire d’une constante $f(t) = c$	13
2.1.2	Composition avec les dérivées d’ordre entier	13
2.1.3	Composition avec les dérivées fractionnaires	14
2.2	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	15
2.2.1	Intégrales d’ordre arbitraire	15
2.2.2	Intégrales fractionnaire de la fonction polynômiale $(t - a)^\beta$	16
2.2.3	Intégrales fractionnaire d’une constante $f(t) = c$	17
2.2.4	Dérivées d’ordre arbitraire	17
2.2.5	Dérivées fractionnaires de la fonctions $(t - a)^\beta$	18
2.2.6	Compositions	19
2.2.7	Transformée de Laplace de l’intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	22
2.3	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	22
2.3.1	La relation de la dérivée fractionnaire de Caputo avec la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	23
2.3.2	Propriétés	24
2.3.3	Dérivées fractionnaires de la fonctions $(t - a)^\beta$	25
2.3.4	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de caputo	25
3	Equations différentielles fractionnaires linéaires	27
3.1	L’existence et l’unicité	28
3.1.1	L’existence	29
3.1.2	L’unicité	31
3.1.3	La solution exacte d’ EDF avec transformée de Laplace	32
3.2	Méthodes numériques pour les équations différentielle fractionnaire	34
3.2.1	Méthodes fractionnaires d’Euler	35
3.2.2	Méthode fractionnaire d’Adams	37
3.2.3	La méthode de différence finie	37
3.2.4	L’Approximation de la dérivée fractionnaire avec MDFF	40
4	Application numérique	43
	Conclusion	53
	Bibliographie	54

Table des figures

4.1	La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec la méthode d'EulerA où $n = 100, 500, 1000$	44
4.2	La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec la méthode d'Adams où $n = 100, 500, 1000$	45
4.3	La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec MDFF où $n = 100, 500, 1000$	46
4.4	La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec les trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) où $n = 1000$ et $\alpha = 0.05$	49
4.5	La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec les trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) où $n = 1000$ et $\alpha = 0.4$	50
4.6	La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec les trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) où $n = 1000$ et $\alpha = 0.8$	52

Liste des tableaux

4.1	Solutions numériques en utilisant la méthode d'EulerA et l'erreurs lorsque $n = 100, 500, 1000$ et $\alpha = \frac{1}{2}$	44
4.2	Solutions numériques en utilisant la méthode d'Adams et l'erreurs lorsque $n = 100, 500, 1000$ et $\alpha = \frac{1}{2}$	45
4.3	Solutions numériques en utilisant la méthode des différences finies et l'erreurs lorsque $n = 100, 500, 1000$ et $\alpha = \frac{1}{2}$	46
4.4	Les erreurs absolues à $t = 1$ par la Méthode d'EulerA	47
4.5	Les erreurs absolues à $t = 1$ par la méthode d'Adams	47
4.6	Les erreurs absolues à $t = 1$ par la méthode de différence finie	47
4.7	La comparaison entre les erreurs absolue des trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) lorsque $n = 1000$ et $\alpha = 0.05$	48
4.8	La comparaison entre les erreurs absolues des trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) lorsque $n = 1000$ et $\alpha = 0.4$	50
4.9	La comparaison entre les erreurs absolues des trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) lorsque $n = 1000$ et $\alpha = 0.8$	51

تعتبر المعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية هي تعميم للمعادلات الكلاسيكية في هذه المذكرة، تطرقنا الى اثبات وجود ووحداية الحل لمسألة القيم الابتدائية. وايضا دراسة الحول التقريبية للمعادلات التفاضلية الكسرية الخطية غير المتجانسة كحالة خاصة، وذلك باستخدام خوارزميات او طرق عديدة تستعمل لحل المعادلات الكلاسيكية، والتي تم تطويرها لحل مثل هذه المعادلات ، حيث استخدمنا المشتقات الكسرية بمعنى كابيتو.

تطرقنا الى العديد من الامثلة بصفة خاصة للمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية الخطية غير المتجانسة، وتقديم حلول تقريبية لاثبات فاعلية كل من الطرق المستعملة، وانهاء ذلك بنتائج عددية.

الكلمات المفتاحية: الاشتقاق الكسري لـ كابيتو، معادلة تفاضلية خطية ذات رتب كسرية، طريقة أولر الكسرية، طريقة أدامس الكسرية، طريقة الفروق المنتهية الكسرية.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires sont considérées comme une généralisation des équations classiques. Dans ce travail, nous avons traité de la preuve de l'existence et de l'unité de la solution au problème à valeur initiale. Etude également des solutions approchées d'équations différentielles linéaires non homogènes linéaires comme cas particulier, en utilisant des algorithmes ou des méthodes numériques (Euler, Adams et MDFF) utilisées pour résoudre les équations classiques qui ont été développées pour résoudre de telles équations, où nous avons utilisé des dérivées fractionnaires au sens Caputo.

Nous avons traité plusieurs exemples, en particulier, d'équations différentielles fractionnaires linéaires non homogènes, et fournissons des solutions approximatives pour prouver l'efficacité de chacune des méthodes utilisées , et terminer par des résultats numériques.

Mots clés : La dérivée fractionnaire au sens de Caputo, Equations différentielles fractionnaires linéaires, Méthode d'Euler fractionnaire, Méthode d'Adams fractionnaire, La méthode de différence finie fractionnaire.

Abstract

Fractional differential equations are considered a generalization classical differential equations. In this work, we study the existence and uniqueness of the solution to the initial value problem, also study solutions approximate of nonhomogeneous linear fractional differential equations as special cases ulier, using algorithms or numerical methods (Euler, Adams and MDFF) used to solve the classical equations which have been developed to solve such equations, where we used fractional derivatives in the Caputo sense. We treated several examples, in particular, nonhomogeneous linear fractional differential equations, and provide approximate solutions to prove the effectiveness of each of the methods used, and finish with numerical results.

Key words : The fractional derivative in the sense of Caputo, Linear fractional differential equations, Fractional Euler method, Fractional Adams method, The fractional finite difference method.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation du concept de la dérivation ordinaire et de l'intégrale dans un ordre fractionnaire. Cela remonte à l'époque où Leibniz et Newton ont inventé le calcul.

Le 30 septembre 1695 [1], Hopital a écrit une lettre à Leibniz, contenant comment justifier ?

$\frac{d^n y}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$.

Leibniz a écrit dans la réponse $\ll d^{\frac{1}{2}} x = x \sqrt{\frac{dx}{x}} \gg$, et a déclaré : \ll C'est un paradoxe clair que quelque chose de bon sera un jour produit. \gg [2].

- En 1819, Lacroix est montré dans son livre lorsqu'il en discute pour la dérivée d'ordre fractionnaire que si $y = x^\alpha$ alors $\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})} x^{\alpha-\frac{1}{2}}$.

En particulier, nous obtenons :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

- En 1823, Abel a introduit la première application de calcul fractionnaire dans les problèmes physiques.
- En 1884, Laurent a présenté une théorie des opérateurs généralisés D^α où $\alpha \in \mathbb{R}$ et il a été confronté à la différenciation et à l'intégration de l'ordre arbitraire [3].
- En 1892, Heaviside applique des dérivées d'ordre fractionnaire dans la théorie des lignes de transmission.
- En 1936, Gemant utilise les dérivés fractionnaires en élasticité [4].
- En 1974, Ross a tenu une conférence internationale sur le calcul partiel et ses applications.

- En 1993, Kenneth Miller et Ross ont publié le livre : "une introduction au calcul fractionnaire et aux équations différentielles fractionnaires" [5].

En raison de l'importance des dérivés fractionnaires et des intégrales et de leur multiplicité d'applications, ces dernières années de nombreux articles et livres ont été écrits sur ce sujet et ont été publiés dans [6, 7].

Ce mémoire se compose de quatre chapitres partagés de la manière suivante :

Premier chapitre : Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions de base utiles tout au long de ce mémoire à savoir (la fonction Gamma, la fonction Bêta, la fonction d'erreur complémentaire (erfc) et la fonction Mittag-Leffler), nous introduisant aussi la transformée de Laplace et leurs propriétés, finalement en donnant quelques théorèmes du point fixe.

Le deuxième chapitre : Dans ce chapitre, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo et leurs propriétés.

Troisième chapitre : Dans ce chapitre, la partie un étudie l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire de type Caputo, et on donne la solution exacte avec la méthode de transformée de Laplace, et dans la partie deux on définit quelques méthodes numériques pour EDOF de (Euler, Adams et différence finie) et finalement l'approximation de la dérivée fractionnaire avec la méthode de différence finie.

Quatrième chapitre : Dans ce chapitre, nous donnons des exemples numériques d'équations différentielles fractionnaires où nous comparons la solution exacte avec la solution approchée avec (EulerA, Adams et MDFF) et nous représentons cette comparaison à l'aide de la courbe, et après nous comparons les trois méthodes en utilisant les tables d'erreur absolue, et nous donnons quelques exemples.

Notions générales et définitions

1.1 La fonction Gamma :

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler. Cette fonction généralise la factorielle $n!$, et permet à n , de prendre non entier valeurs.

Définition 1.1.1. La fonction Gamma sous forme intégrale est :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.1)$$

Converge dans la moitié droite du plan complexe $\Re(z) > 0$. Considérant z comme un nombre réel, l'énoncé ci-dessus implique que la fonction Gamma est définie en continu pour les valeurs réelles positives de z .

1.1.1 Propriétés de base de la fonction Gamma :

1/ De toute évidence $\Gamma(1) = 1$.

2/

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (1.2)$$

3/ $\Gamma(z + 1) = z!$, pour $z = 1, 2, 3, \dots$

4/ Une autre propriété importante de la fonction Gamma est qu'elle a des pôles simples aux points $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

5/ L'équation fonctionnelle (1.2) entraîne pour les entiers relatifs positifs n (voir [8]) :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}. \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right). \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9\dots(4n-3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).\end{aligned}$$

Et pour les valeurs négatives :

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5\dots(2n-1)} \sqrt{\pi}.$$

6/ La fonction Gamma peut également être représentée par la limite (voir [9] p.4-6) :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Où nous supposons initialement $\Re(z) > 0$.

Démonstration

$$2/ \Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(z+1)-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

3/ nous obtenons des valeurs pour $z = 1, 2, 3, \dots$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z(z-1)! = z!.$$

4/ (voir [9]).

Exemple 1.1.1. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$?

De la définition (1.1), nous avons :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

Si nous posons $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, et nous obtenons maintenant :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy \quad (1.3)$$

De façon analogue, on peut écrire :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (1.4)$$

L'équation (1.4) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir :

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \pi. \quad (1.5)$$

Donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1.2 La fonction Bêta :

Définition 1.2.1. La fonction Bêta est définie par l'intégrale :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0). \quad (1.6)$$

De plus, $B(z, w)$ est parfois utilisé par commodité pour remplacer une combinaison de fonctions Gamma. Cette relation entre la fonction Gamma et Beta ([10] p.950) :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (1.7)$$

Est utilisé plus tard.

L'équation (1.7) fournit la continuation analytique de la fonction Bêta à l'ensemble plan complexe via la continuation analytique de la fonction Gamma.

Il convient également de mentionner que la fonction Bêta est symétrique, i. e. :

$$B(z, w) = B(w, z). \quad (1.8)$$

1.3 La fonction d'erreur complémentaire (erfc) :

Définition 1.3.1. La fonction d'erreur complémentaire (voir [11]) est une fonction entière, définie comme :

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt, \quad (1.9)$$

Avec

$$\operatorname{erfc}(-\infty) = 2,$$

$$\operatorname{erfc}(0) = 1,$$

$$\operatorname{erfc}(+\infty) = 0.$$

1.3.1 Propriétés : [11]

Les relations suivantes sont intéressantes à mentionner :

- $\operatorname{erfc}(-x) = 2 - \operatorname{erfc}(x)$.
- $\int_0^{\infty} \operatorname{erfc}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.
- $\int_0^{\infty} \operatorname{erfc}^2(t) dt = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$.

1.4 Transformations de Laplace :

Définition 1.4.1. ([9] p.103) La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t), s\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad t > 0. \quad (1.10)$$

Définition 1.4.2. ([12] p.14) La transformée de Laplace inverse d'une fonction $F(s)$ est définie par :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s), t\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \Re(s) > c_0.$$

Tel que c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (1.10).

1.4.1 Produit de convolution :

Définition 1.4.3. Le produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est défini par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx$$

1.4.2 Propriété de la transformé de Laplace :

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors on a les propriétés suivant ([13] p.231) :

1/ $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$.

2/ $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$.

3/ Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} [f^{(k)}(t)]_{t=0}. \quad (1.11)$$

1.4.3 Exemples de transformation(inverse) de Laplace :

Les transformées de Laplace de certaines fonctions importantes :

On a $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

La fonction $F(s)$ est appelée la transformée de Laplace de $f(t)$.

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, s > 0.$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad |s| > |a|.$$

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}, \quad s^\alpha > |a|. \quad (1.12)$$

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta} k!}{(s^\alpha - a)^{k+1}}, \quad s^\alpha > |a|$$

Les transformées de Laplace inverses de certaines fonctions importantes :

La fonction $f(t)$ est appelée la transformée de Laplace inverse de $F(s)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\right\} &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0. \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)^\alpha}\right\} &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-at}, \quad \alpha > 0. \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha - a}\right\} &= t^{\alpha-1}E_\alpha(at^\alpha), \quad \alpha > 0. \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right\} &= \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}), \quad a \neq b.\end{aligned}$$

1.5 La fonction Mittag-Leffler :

Alors que la fonction Gamma est une généralisation de la fonction factorielle, la fonction Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle, ce qui est d'une grande importance pour le calcul fractionnaire.

Définition 1.5.1 (Fonction à un paramètre). ([9] p.16) La fonction Mittag-Leffler introduite pour la première fois comme un paramètre fonction par la série :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}. \quad (1.13)$$

Définition 1.5.2 (Fonction à deux paramètres). ([9] p.17) La généralisation à deux paramètres est introduite par Agarwal :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}. \quad (1.14)$$

Il est appelé fonction à deux paramètres de type Mittag-Leffler.

1.5.1 Propriétés :

Certaines de ses propriétés intéressantes sont ([9] p.17-18) :

- $E_{1,1}(z) = e^z$.
- $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$.

- $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}$.
- $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$.
- $E_{\frac{1}{2},1}(z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z)$.

Où $\operatorname{erfc}(z)$ est la fonction d'erreur complémentaire (1.9).

Théorème 1.5.1. ([14] p.42) *La fonction Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :*

1. Pour $|z| < 1$ la fonction Mittag-Leffler généralisée satisfait :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha} z) dt = \frac{1}{z-1}.$$

2. Pour $|z| < 1$, la transformée de Laplace de la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha}(z^{\alpha})$ est donnée par :

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} E_{\alpha}(z^{\alpha}) dt = \frac{1}{z-z^{1-\alpha}}.$$

3. La fonction Mittag-Leffler (1.13) converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

La n -ème dérivée de la fonction de Mittag-Leffler est donnée à partir de la relation suivante :

$$\frac{d^n}{dx^n} [x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})] = x^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(x^{\alpha}), \beta - n > 0, n = 0, 1, \dots \quad (1.15)$$

L'intégration de la fonction de Mittag-Leffler est donnée à partir de la relation suivante :

$$\int_0^x E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) t^{\beta-1} dt = x^{\beta} E_{\alpha,\beta+1}(\lambda x^{\alpha}). \quad (1.16)$$

La relation (1.16) est un cas particulier de la relation plus générale suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) t^{\beta-1} dt = x^{\beta+v-1} E_{\alpha,\beta+v}(\lambda x^{\alpha}), v > 0. \quad (1.17)$$

1.6 L'ensemble relativement compact :

Définition 1.6.1. ([14] p.26) Soit (E, d) un espace métrique et $F \subseteq E$. L'ensemble F est appelé relativement compact dans E si la fermeture de F est un sous-ensemble compact de E .

1.7 Théorème de Arzelà-Ascoli

Théorème 1.7.1 (Arzelà-Ascoli). ([14] p.26) Soit $F \subseteq C[a, b]$ pour certains $a < b$, et supposons que les ensembles muni de la norme Chebyshev. Alors, F est relativement compact dans $C[a, b]$ si et seulement si F est équicontinu (c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $f \in F$ et tout $x, x^* \in [a, b]$ avec $|x - x^*| < \delta$ on a $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$) et uniformément borné (c'est à dire il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq C$ pour tout $f \in F$).

1.8 Quelques théorème du point fixe :

Théorème 1.8.1 (Le théorème du point fixe de Schauder). ([14] p.26) Soit (E, d) un espace métrique complet, soit U un sous-ensemble convexe fermé de E , et soit $A : U \rightarrow U$ une application telle que l'ensemble $\{Au : u \in U\}$ est relativement compact dans E . Alors A admet au moins un point fixe.

Théorème 1.8.2 (Théorème du point fixe de Weissinger). ([14] p.25) Soit (E, d) un espace métrique complet non-vide, et soit $\alpha_j \geq 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et tel que $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ converge.

De plus, soit l'application $A : U \rightarrow U$ satisfaire l'inégalité :

$$d(A^j u, A^j v) \leq \alpha_j,$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $u, v \in U$. Alors, A admet un unique point fixe u^* .

De plus, pour tout $u_0 \in U$, la suite $(A^j u_0)_{j=1}^{\infty}$ converge vers ce point fixe u^* .

Chapitre 2

Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous fournissons des définitions de certains opérateurs de dérivations, d'intégrales fractionnaires et des propriétés, ainsi que quelques exemples pour certaines fonctions bien connues.

Intégration et différenciation fractionnaires :

2.1 La Dérivé fractionnaire de Grünwald–Letnikov : [15]

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres arbitraires.

La dérivée de premier ordre. de la fonction $f(t)$ est défini par :

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \quad (2.1)$$

L'application de cette définition deux fois donne la dérivée de second ordre :

$$f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}, \quad (2.2)$$

En utilisant (2.1) et (2.2) nous obtenons :

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}, \quad (2.3)$$

Par dérivation successive, on obtient :

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh), \quad (2.4)$$

Où

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}. \quad (2.5)$$

La formule (2.4) représente la dérivée d'ordre entier n si n est positif, et l'intégrale répétée n fois si n est négatif.

Grâce à la propriété fondamentale $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, on peut arriver à une expression plus générale dans le cas où n est négatif ou nul :

$$(-1)^r \binom{n}{r} = \frac{-n(1-n)(2-n)\dots(r-n-1)}{r!} = \frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-n)}.$$

Donc on a :

Définition 2.1.1. [9] On définit respectivement les dérivées fractionnaires d'ordre α (non entier) et d'ordre $(-\alpha)$ au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f , tel que $f \in C[a, t]$:

$${}_a^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Et

$${}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Définition 2.1.2. Si f est de classe C^m , des intégrations par parties de (2.6) et (2.7) nous permet d'écrire :

$${}_a^G D_t^\alpha f(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Et

$${}_a^G D_t^{-\alpha} f(t) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m+\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m+\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (2.9)$$

La formule (2.8) est obtenue sous l'hypothèse que les dérivées $f^{(r)}(t)$, ($r = 1, 2, \dots, m$) sont continues sur l'intervalle fermé $[a, t]$ et que m est un entier vérifiant la condition $m > \alpha$. La plus petite valeur possible de m est déterminée par l'inégalité suivante :

$$m - 1 < \alpha < m.$$

2.1.1 Dérivée fractionnaire d'une constante $f(t) = c$:

Si α non entier, on a $f^{(r)}(t) = 0$ pour $r = 1, 2, \dots, m$ donc :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha f(t) &= \sum_{r=0}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} + \underbrace{\sum_{r=1}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)}}_0 \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau}_0, \\ &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

2.1.2 Composition avec les dérivées d'ordre entier :

Proposition 2.1.1. ([9] p.57-58) Soient m un entier strictement positif et α non entier.

Alors :

$$\frac{d^m}{dt^m} ({}_a^G D_t^\alpha f(t)) = {}_a^G D_t^{m+\alpha} f(t). \quad (2.10)$$

Et

$${}_a^G D_t^\alpha \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = {}_a^G D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha-m}}{\Gamma(r-\alpha-m+1)}. \quad (2.11)$$

Démonstration Pour $n - 1 < \alpha < n$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} ({}_a^G D_t^\alpha f(t)) &= \sum_{r=0}^{n+m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-(\alpha+m)}}{\Gamma(r-(\alpha+m)+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(\alpha+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(\alpha+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\frac{d^m}{dt^m} ({}_a^G D_t^\alpha f(t)) = {}_a^G D_t^{m+\alpha} f(t).$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^\alpha \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(m+r)}(a)(t-a)^{r-\alpha}}{\Gamma(r-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau, \\ &= \sum_{r=0}^{n+m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-(\alpha+m)}}{\Gamma(r-(\alpha+m)+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(n+m-(\alpha+m))} \int_a^t (t-\tau)^{n+m-(\alpha+m)-1} f^{(n+m)}(\tau) d\tau \\ &- \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha-m}}{\Gamma(r-\alpha-m+1)}. \end{aligned}$$

Alors :

$${}_a^G D_t^\alpha \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t) \right) = {}_a^G D_t^{m+\alpha} f(t) - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{f^{(r)}(a)(t-a)^{r-\alpha-m}}{\Gamma(r-\alpha-m+1)}.$$

Ce qui veut dire que, la dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle ne commutent que si $f^{(r)}(a) = 0$ pour tout $r = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

2.1.3 Composition avec les dérivées fractionnaires :

Proposition 2.1.2. ([9]) *Trois cas sont à distinguer :*

1. Pour $\beta < 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$${}_a^G D_t^\alpha \left({}_a^G D_t^\beta (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^{\alpha+\beta} f(t).$$

2. Si $0 \leq m < \beta < m+1$, $\alpha < 0$ et $f^{(r)}(t) = 0$ pour $r = 0, 1, \dots, m-1$,

Alors

$${}_a^G D_t^\alpha \left({}_a^G D_t^\beta (f(t)) \right) = {}_a^G D_t^{\alpha+\beta} f(t).$$

3. Si $0 \leq m < \beta < m + 1, 0 \leq n < \alpha < n + 1$ et $f^{(r)}(t) = 0$ pour $r = 0, 1, \dots, k - 1$

Où $k = \max(m, n)$,

$${}^G D_t^\alpha ({}^G D_t^\beta (f(t))) = {}^G D_t^\beta ({}^G D_t^\alpha (f(t))) = {}^G D_t^{\alpha+\beta} f(t).$$

Démonstration (Voir[9] p.59-62).

2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville : [15]

Dans cette section, nous citons quelques définitions et résultats du calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nous allons commencer par la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville.

2.2.1 Intégrales d'ordre arbitraire :

Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue. b pouvant être fini ou infini. Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau,$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(\tau) d\tau \right) ds,$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire :

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

En itérant, on arrive à :

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

Définition 2.2.1. ([9] p.65) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale définie par la formule suivante :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

Où α est un nombre réel ou complexe.

Remarque 2.1. La formule (2.12) est une généralisation de la n -ième primitive avec un ordre de primitivation α non entier.

2.2.2 Intégrales fractionnaire de la fonction polynômiale $(t-a)^\beta$:

Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$,

D'après (2.12) on obtient :

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau,$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables $\tau = a + (t-a)s$:

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds, \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1), \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Exemple 2.2.1. En particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$:

On posons dans (2.13) $a = 0$ et $\beta = 0, 1, 2$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}. \\ {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}. \\ {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}. \end{aligned}$$

2.2.3 Intégrales fractionnaire d'une constante $f(t) = c$:

La relation (2.13) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$${}^R D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1 + \alpha)} (t - a)^\alpha.$$

Proposition 2.2.1. Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a, b])$:

1. $I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f$, $(\operatorname{Re}(\alpha) > 0, \operatorname{Re}(\beta) > 0)$.
2. $\frac{d}{dt}(I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t)$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$.
3. $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t)$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$.

Démonstration

- 1/ (voir [9] p.67).
- 2/ (voir [9] p.71).
- 3/ (voir [9] p.65).

2.2.4 Dérivées d'ordre arbitraire :

Définition 2.2.2. Soit $m - 1 < \alpha < m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^m [(I_a^{m-\alpha} f)(t)], \\ &= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.2.5 Dérivées fractionnaires de la fonctions $(t - a)^\beta$:

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$.

Par la formule (2.13) on peut écrire :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} (t - a)^{\beta + m - \alpha} \right], \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m (t - a)^{\beta + m - \alpha}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

On sait que :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m (t - a)^{\beta + m - \alpha} = (\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1) (t - a)^{\beta - \alpha}. \quad (2.16)$$

Par substitution de (2.16) dans (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^R D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + m - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)(\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1)}{(\beta + m - \alpha)(\beta + m - \alpha - 1) \dots (\beta - \alpha + 1) \Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Remarque 2.2.

1. Pour $\alpha = 1$, la formule de dérivation (2.17) se réduit à :

$${}_a^R D_t^1 (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)} (t - a)^{\beta - 1} = \beta (t - a)^{\beta - 1} = \frac{d}{dt} (t - a)^\beta.$$

2. Pour $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$${}_a^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}.$$

C'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constante ! mais on a :

$${}_a^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha}.$$

Définition 2.2.3 (Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche). ([9] p.181)

$$\forall t > a, \quad {}^R D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 2.2.4 (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche). ([9] p.89)

$$\forall t > a, \quad {}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Les deux définitions précédentes utilisent le passé de f , c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $a < \tau < t$. Nous pouvons définir des opérateurs similaires, qui utilisent le futur de f , c'est-à-dire les valeurs de $f(\tau)$ pour $t < \tau < b$. On définit ensuite les deux opérateurs suivants :

Définition 2.2.5 (Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite). ([9] p.181)

$$\forall t < b, \quad {}^R D_t^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^b (\tau - t)^{\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Définition 2.2.6 (Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite). ([9] p.89)

$$\forall t < b, \quad {}^R D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^m \int_t^b (\tau - t)^{m-\beta-1} f(\tau) d\tau.$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}^R D_t^\alpha f(t)$ et ${}^R D_t^\beta f(t)$ sont définies.

2.2.6 Compositions :

Proposition 2.2.2 (Composition avec les intégrales fractionnaires).

Pour $\alpha > 0$ et $t > 0$

$${}^R D_t^\alpha ({}^R D_t^{-\alpha} f(t)) = {}^R D_t^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t). \quad (2.18)$$

(Pour la preuve voir [9] p.69).

Qui signifie que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville est inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du même ordre.

Proposition 2.2.3. Si la dérivée fractionnaire ${}^R D_t^\alpha f(t)$, ($m - 1 \leq \alpha < m$), d'une fonction $f(t)$ est intégrable, alors :

$${}^R D_t^{-\alpha} ({}^R D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{i=1}^m [{}^R D_t^{\alpha-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}. \quad (2.19)$$

(Pour la preuve voir [9] p.70).

Proposition 2.2.4. Si $0 \leq m - 1 \leq \beta < m$, on a :

$${}^R D_t^{-\alpha} ({}^R D_t^\beta f(t)) = {}^R D_t^{\beta-\alpha} f(t) - \sum_{i=1}^m [{}^R D_t^{\beta-i} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(1+\alpha-i)}. \quad (2.20)$$

(Pour la preuve voir [9] p.72).

Comme la dérivation et l'intégration d'ordre entier, la dérivation et l'intégration fractionnaires ne commutent pas en général.

Proposition 2.2.5 (Composition avec les dérivées d'ordre entier). ([9] p.73)

La composition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec des dérivées d'ordre entier apparaît dans plusieurs problèmes appliqués.

En utilisant la définition (2.14) de la dérivée de Riemann-Liouville, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} ({}^R D_t^\alpha f(t)) &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma((n+m)-(n+\alpha))} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \\ &= {}^R D_t^{n+\alpha} f(t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Maintenant, nous considérons l'ordre inverse des opérateurs. En tenant compte du fait que :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^{-n} f^{(n)}(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \\ &= f(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Et que

$${}^R D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^{\alpha+n} ({}^R D_t^{-n} f(t)). \quad (2.23)$$

Une combinaison de (2.22), (2.23) et (2.17) nous donne :

$$\begin{aligned}
 {}^R D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) &= {}^R D_t^{\alpha+n} \left({}^R D_t^{-n} f^{(n)}(t) \right), \\
 &= {}^R D_t^{\alpha+n} \left\{ f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^i}{\Gamma(i+1)} \right\}, \\
 &= {}^R D_t^{\alpha+n} f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha-n}}{\Gamma(i+1-\alpha-n)}.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

On déduit alors que la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivation d'ordre entier ne commutent que si $f^{(i)}(a) = 0$, pour tout $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Proposition 2.2.6 (Composition avec les dérivées fractionnaires). ([9] p.74)

Soient $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$. En utilisant la définition (2.14) de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, les formules (2.19) et (2.21), on aura :

$$\begin{aligned}
 {}^R D_t^\alpha \left({}^R D_t^\beta f(t) \right) &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}^R D_t^{-(m-\alpha)} \left({}^R D_t^\beta f(t) \right) \right\}, \\
 &= \frac{d^m}{dt^m} \left\{ {}^R D_t^{\alpha+\beta-m} f(t) - \sum_{i=1}^n \left[{}^R D_t^{\beta-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{m-\alpha-i}}{\Gamma(1+m-\alpha-i)} \right\}, \\
 &= {}^R D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{i=1}^n \left[{}^R D_t^{\beta-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-i}}{\Gamma(1-\alpha-i)}.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

En permutant α et β , la relation (2.25) donne :

$${}^R D_t^\beta \left({}^R D_t^\alpha f(t) \right) = {}^R D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{i=1}^m \left[{}^R D_t^{\alpha-i} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-i}}{\Gamma(1-\beta-i)}. \tag{2.26}$$

Une comparaison des relations (2.25) et (2.26), montre que les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ${}^R D_t^\alpha$ et ${}^R D_t^\beta$ ne commutent que si $\alpha = \beta$ ou si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément :

$$\left[{}^R D_t^{\alpha-i} f(t) \right]_{t=a} = 0 \text{ pour tout } i = 0, 1, 2, \dots, m. \tag{2.27}$$

Et

$$\left[{}^R D_t^{\beta-i} f(t) \right]_{t=a} = 0 \text{ pour tout } i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{2.28}$$

Remarque 2.3. Si f est de classe C^m , alors en faisant des intégrations par parties et des dérivation répétées on obtient :

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau = {}^R D_t^\alpha f(t).$$

Dans ce cas l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

2.2.7 Transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

Lemme 2.2.7. [16] La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est :

$$\mathcal{L} \{ {}^R D_t^{-\alpha} f(t) \} = \frac{F(s)}{s^\alpha},$$

Où

$$F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \}.$$

2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo : [15]

En 1967, un article [17] de M. Caputo a été publié, dans lequel une nouvelle définition d'un dérivé fractionnaire a été utilisée.

Dans cette section, nous exposons la définition et certaines propriétés de ce nouvel opérateur, aujourd'hui appelé dérivée fractionnaire de Caputo et surtout montrons sa connexion aux opérateurs fractionnaires intégraux et différentiels de Riemann-Liouville. Nous commençons par une définition :

Définition 2.3.1. ([18], [19]) La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction $f(t)$ donnée sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par la relation suivante :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \quad (2.29)$$

Avec $m \in \mathbb{N}$ et $m = [\alpha] + 1$, où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

Remarque 2.4. L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.

Définition 2.3.2 (Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche). ([12] p.2)

$$\forall t > a, \quad {}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

Définition 2.3.3 (Dérivée fractionnaire de Caputo à droite). ([12] p.2)

$$\forall t < b, \quad {}_a^C D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} (-1)^m \int_t^b (\tau-t)^{m-\beta-1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

Notons bien que f est une fonction telle que ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}_t^C D_b^\beta f(t)$ sont définies.

Les opérateurs dont l'intégrale porte sur $[a, t]$ (respectivement $[t, b]$) seront qualifiés d'opérateurs passés (respectivement opérateurs futurs).

2.3.1 La relation de la dérivée fractionnaire de Caputo avec la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville :

1. ([20] p.91) Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $m = [\alpha] + 1$. Si ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ et ${}_a^R D_t^\alpha f(t)$ existent, alors :

(a)

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)}. \quad (2.30)$$

On déduit que si $f^{(i)}(a) = 0$ pour tout $i = 0, 1, \dots, m-1$, on aura ${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha f(t)$.

(b)

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^R D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i \right). \quad (2.31)$$

2. ([20] p.92) Si $0 < \alpha < 1$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et celle de

Caputo sont définies respectivement par :

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} \left({}^R D_t^{-(1-\alpha)} f(t) \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau. \quad (2.32)$$

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^{-(1-\alpha)} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau. \quad (2.33)$$

2.3.2 Propriétés :

On a les propriétés suivantes :

1. ([20] p.73)

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \right), \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + {}^C D_t^\alpha f(t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

2. ([20] p.91)

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^R D_t^\alpha (f(t) - f(a)). \quad (2.35)$$

3. ([20] p.95) Si f est continue sur $[a, b]$, alors :

$${}^C D_t^\alpha I_a^\alpha = f(t). \quad (2.36)$$

4. ([20] p.96) Si $f \in C^m [a, b]$, alors :

$$I_{aa}^{\alpha C} D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (t-a)^i. \quad (2.37)$$

Alors, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville du même ordre, mais il n'est pas un inverse droit.

2.3.3 Dérivées fractionnaires de la fonctions $(t - a)^\beta$:

Soient la fonction $f(t) = (t - a)^\beta$, m un entier et p un réel tels que $0 \leq m - 1 < \alpha < m$ avec $\beta > m - 1$.

On a :

$$f^{(m)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - m + 1)} (\tau - a)^{\beta - m}.$$

Donc :

$${}_a^C D_t^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - m} d\tau.$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t - a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha (t - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{m - \alpha - 1} (\tau - a)^{\beta - m} d\tau, \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha} \int_0^1 (1 - s)^{m - \alpha - 1} s^{\beta - \alpha} ds, \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)B(m - \alpha, \beta - m + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)}{\Gamma(m - \alpha)\Gamma(\beta - m + 1)\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (t - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Remarque 2.5. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit : ${}_a^C D_t^\alpha C = 0$.

2.3.4 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens caputo :

Lemme 2.3.1. [16] La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de caputo d'ordre α tel que $n - 1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}\{ {}_a^C D^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha - k - 1} f^{(k)}(0).$$

Démonstration En utilisant le lemme 2.2.7 puis en utilisant (1.11) on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{ {}^C D^\alpha f(t) \} &= \mathcal{L}\{ D^{-(n-\alpha)} [D^n f(t)] \}, \\
 &= \frac{\mathcal{L}\{ D^n f(t) \}}{s^{n-\alpha}}, \\
 &= \frac{s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)}{s^{n-\alpha}}, \\
 &= s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).
 \end{aligned}$$

Equations différentielles fractionnaires linéaires

De nombreux problèmes dans de nombreuses applications sont modélisés mathématiquement par équations différentielles telles que l'équation d'oscillation fractionnaire composite et dynamique équations fractionnaires.

Nous prouvons ici l'existence de la solution et son unicité pour EDOF et présentons la méthode de Laplace pour obtenir la solution exacte de l'équation différentielle fractionnaire, et au cas où la solution exacte ne serait pas obtenue, nous suggérons les méthodes numériques de la solution et nous étudions ici la méthode d'Euler, la méthode d'Adams puis la méthode des différences finies.

Définition 3.1. Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ alors :

$${}^C D^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad (3.1)$$

Est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo et dans ce cas on utilise comme conditions initiales :

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (3.2)$$

3.1 L'existence et l'unicité : [21]

Théorème 3.1.1. ([14] p.66) Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. De plus, soit $k > 0$, $h^* > 0$ et $b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$. On définit $G = [0, h^*] \times [b_0 - k, b_0 + k]$ et soit la fonction continue $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel $h > 0$ et une fonction $y \in C[0, h]$ solution de l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo (3.1) muni des conditions initiales (3.2).

Pour le cas $\alpha \in (0, 1)$ le paramètre h est donné par :

$$h = \min\left\{h^*, \left(\frac{k\Gamma(\alpha+1)}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\} \text{ avec } M = \sup_{(x,z) \in G} |f(x,z)|.$$

Si de plus f vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la seconde variable (i.e) :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Avec $L > 0$ une constante indépendante de x , y_1 et y_2 , alors la fonction $y \in C[0, h]$ est unique.

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème aux conditions initiales de type Caputo (3.1)-(3.2). D'abord énonçons le lemme suivant :

(pour la démonstration voir [14] p.68).

Lemme 3.1.2. ([14] p.67) Sous les hypothèses du théorème 3.1.1 la fonction $y \in C[0, h]$ est une solution de l'EDF de type Caputo (3.1) avec les conditions initiales (3.2) si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale de Volterra du second type :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt.$$

En utilisant ce résultat nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.1.1.

Lemme 3.1.3. ([14] p.71) Sous les hypothèses du théorème 3.1.1, l'équation de Volterra :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (3.3)$$

Possède une unique solution $y \in C[0, h]$.

(Pour la preuve voir la même page).

Démonstration La preuve est divisée en deux parties. On va d'abord considérer le cas $\alpha > 1$ ensuite le cas $\alpha \in (0, 1)$. Ceci est lié au fait que l'équation de Volterra (3.3) possède un noyau singulier $(x - t)^{\alpha-1}$ dans le cas $\alpha \in (0, 1)$, alors que dans l'autre cas ce noyau est continu.

- Le cas $\alpha > 1$:

L'équation (3.3) possède un noyau continu et la fonction à l'extérieur du signe intégrale est continue. Alors l'existence de la solution découle directement de l'utilisation des méthodes standards de la théorie des équations de Volterra [22]. De même pour l'unicité, en utilisant la condition de Lipschitz.

- Le cas $\alpha \in (0, 1)$:

3.1.1 L'existence :

Ici, l'équation de Volterra (3.3) sera réduite à :

$$y(x) = b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (3.4)$$

Pour démontrer l'existence de la solution on introduit l'ensemble :

$$U = \{y \in C[0, h] : \|y - b_0\|_\infty \leq k\}.$$

Il est clair que c'est une partie fermée et convexe de l'espace de Banach de toutes les fonctions continues sur $[0, h]$ muni de la norme de Chebychev ($\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq h} |f(x)|$). Aussi, U n'est pas vide car la fonction constante $y = b_0 \in U$. On définit sur U l'opérateur A .

$$(Ay)(x) = b_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt. \quad (3.5)$$

Alors notre équation est réduite à :

$$y = Ay.$$

Et pour arriver à notre résultat d'existence, on doit montrer que A possède un point fixe. Regardons de plus près les propriétés de l'opérateur A .

1- A applique U dans U :

Pour $y \in U$ et $x \in [0, h]$, on a :

$$\begin{aligned} |(Ay)(x) - y_0^{(0)}| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right|, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty x^\alpha, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty h^\alpha, \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty \frac{k\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_\infty} = k. \end{aligned}$$

Donc $Ay \in U$ si $y \in U$, i.e A applique U dans U.

2- La Continuité :

D'abord notons que, pour $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$:

$$\begin{aligned} |(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} (x_1-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt - \int_0^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \right|, \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} ((x_1-t)^{\alpha-1} - (x_2-t)^{\alpha-1}) dt + \int_{x_1}^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} dt \right|, \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (2(x_2-x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donc Ay est une fonction continue.

3- A(U) est un ensemble relativement compact :

On a $A(U) = \{Au : u \in U\}$.

a) La bornitude :

Pour $z \in A(U)$ on trouve que, pour tout $x \in [0, h]$:

$$\begin{aligned} |z(x)| = |(Ay)(x)| &\leq |b_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, y(t))| dt, \\ &\leq |b_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_\infty h^\alpha. \end{aligned}$$

Donc AU est borné.

b) L'équicontinuité :

Pour $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq h$, et d'après (3.6) on a :

$$\begin{aligned} |(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (2(x_2 - x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha), \\ &\leq 2 \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} (x_2 - x_1)^\alpha. \end{aligned}$$

Donc, si $|x_2 - x_1| < \delta$, alors

$$|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)| \leq 2 \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \delta^\alpha \text{ est indépendant de } y.$$

Donc l'ensemble $A(U)$ est equicontinu.

Alors, d'après le théorème d'Arzelà- Ascoli 1.7.1. AU est relativement compacte.

Le théorème du point fixe de Schauder 1.8.1 nous assure que A possède un point fixe, c'est-à-dire que notre problème aux valeurs initiales possède une solution.

3.1.2 L'unicité :

Pour l'unicité de la solution on va utiliser encore une fois l'opérateur A , tout en rappelant qu'il applique l'ensemble non vide, convexe et fermé $U = \{y \in C[0, h] : \|y - b_0\|_\infty \leq k\}$ dans lui même. Nous allons maintenant montrer que A possède un unique point fixe. Pour cela on va d'abord prouver que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, h]$, on a :

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]} \leq \frac{(Lx^\alpha)^j}{\Gamma(1 + \alpha j)} \|y - \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]}. \quad (3.7)$$

Ceci peut être démontré par récurrence :

Pour $j = 0$, l'inégalité est triviale.

Pour l'étape $j - 1 \mapsto j$, on écrit :

$$\begin{aligned} \|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]} &= \|A(A^{j-1}y) - A(A^{j-1}\tilde{y})\|_{L_\infty[0, x]}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq w \leq x} \left| \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} [f(t, A^{j-1}y(t)) - f(t, A^{j-1}\tilde{y}(t))] dt \right|. \end{aligned}$$

Dans l'étape suivante on utilisera la condition de Lipschitz sur f ainsi que l'hypothèse de récurrence, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]} &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq w \leq x} \int_0^w (w-t)^{\alpha-1} |A^{j-1} y(t) - A^{j-1} \tilde{y}(t)| dt, \\
 &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sup_{0 \leq w \leq t} |A^{j-1} y(w) - A^{j-1} \tilde{y}(w)| dt, \\
 &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} \sup_{0 \leq w \leq t} |y(w) - \tilde{y}(w)| dt, \\
 &\leq \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \sup_{0 \leq w \leq x} |y(w) - \tilde{y}(w)| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\alpha(j-1)} dt, \\
 &= \frac{L^j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))} \|y - \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha(j-1))}{\Gamma(1+\alpha j)} x^{\alpha j}.
 \end{aligned}$$

Qui est l'inégalité (3.7). Comme conséquence, on trouve, en prenant la norme de Chebyshev sur l'intervalle $[0, h]$:

$$\|A^j y - A^j \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]} \leq \frac{(Lx^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha j)} \|y - \tilde{y}\|_{L_\infty[0, x]}.$$

Nous avons maintenant montré que l'opérateur A vérifie les hypothèses du Théorème 1.8.2 avec $\alpha_j = \frac{(Lx^\alpha)^j}{\Gamma(1+\alpha j)}$.

Pour appliquer ce théorème, il suffit de vérifier que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ converge. Ceci découle immédiatement de la propriété 3 du Théorème 1.5.1. Par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème de point fixe de Weissinger 1.8.2 et en déduire l'unicité de la solution de notre équation différentielle.

3.1.3 La solution exacte d' EDF avec transformée de Laplace :

Dans cette section, nous présentons les solutions exactes de certaines équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaires au sens de Caputo en utilisant la méthode de transformation de Laplace.

Théorème 3.1.4. ([20] p.323) *Considérons l'équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaires non homogène suivant :*

$${}^C D^\alpha y(x) - ay(x) = h(x), \quad n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \quad (3.8)$$

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

La solution exacte de (3.8) est donnée par :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k E_{\alpha, k+1}(ax^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(a(x-t)^\alpha) h(t) dt. \quad (3.9)$$

Démonstration En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de (3.8), nous avons :

$$\begin{aligned} s^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0) - aY(s) &= H(s), \\ Y(s)(s^\alpha - a) &= H(s) + \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} b_k, \\ Y(s) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{s^{\alpha-k-1}}{(s^\alpha - a)} + \frac{H(s)}{(s^\alpha - a)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse à (3.10) et en utilisant (1.12), on obtient la solution exacte comme dans (3.9).

Exemple 3.1.1. Considérons l'équation différentielle fractionnaire non homogène suivante :

$$D^{\frac{1}{2}} y(x) - 2y(x) = x^2, \quad 0 < \alpha < 1, y(0) = 1.$$

La solution exacte en utilisant le Théorème 3.1.4 est donnée par :

$$y(x) = E_{\frac{1}{2}, 1}(2x^{\frac{1}{2}}) + \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(2(x-t)^{\frac{1}{2}}) t^2 dt.$$

Soit $s = x - t$ alors :

$$y(x) = E_{\frac{1}{2}, 1}(2x^{\frac{1}{2}}) + \int_0^x s^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(2s^{\frac{1}{2}}) (x-s)^2 ds.$$

En utilisant (1.17), nous obtenons :

$$y(x) = E_{\frac{1}{2}, 1}(2x^{\frac{1}{2}}) + \Gamma(3) x^{\frac{5}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{7}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}).$$

3.2 Méthodes numériques pour les équations différentielle fractionnaire :

Dans cette section, nous présentons brièvement les méthodes fractionnaires d'Euler et Adams et différences finies qui ont été utilisés pour la résolution d'équations différentielle fractionnaires dans le temps.

Notons $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, où $h = \frac{T}{N}$ est la taille du pas, et $N > 0$ est un entier et $T > 0$. Soit u_n la solution approchée de $u(t_n)$ à $t = t_n$.

Dans ce qui suit, nous introduisons les méthodes numériques pour la résolution du problème (3.1-3.2).

Formule rectangulaire fractionnaire :

1) Formule rectangulaire fractionnaire à gauche :

À chaque sous-intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ tel que $k = 0, 1, \dots, n - 1$ la fonction $f(t)$ est approximé par la valeur $f(t_k)$ i.e $f(t)|_{[t_k, t_{k+1})} = f(t_k)$:

$$\begin{aligned} {}^R D^{-\alpha} f(t_n) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} f(s) ds, \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} f(t_k) ds, \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} f(t_k). \end{aligned}$$

Où

$$b_k = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} [(k + 1)^\alpha - k^\alpha].$$

Donc

$${}^R D^{-\alpha} f(t_n) \approx \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} f(t_k), \quad b_k = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} [(k + 1)^\alpha - k^\alpha]. \quad (3.11)$$

2) Formule rectangulaire fractionnaire à droit :

À chaque sous-intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ tel que $k = 0, 1, \dots, n - 1$ la fonction $f(t)$ est

approximé par la valeur $f(t_k)$ i.e $f(t)|_{(t_k, t_{k+1}]} = f(t_{k+1})$.

De la même manière on obtient :

$${}^R D^{-\alpha} f(t_n) \approx \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} f(t_{k+1}), \quad (3.12)$$

Où

$$b_k = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} [(k + 1)^\alpha - k^\alpha]. \quad (3.13)$$

Maintenant, nous entrons L'opérateur de la dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville des deux côtés de (3.1) on obtient :

$${}^R D_0^{-\alpha C} D_0^\alpha u(t) = {}^R D_0^{-\alpha} f(t, u(t)).$$

D'après (2.37) et (2.12) on a :

$$u(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} u_0^{(j)} = {}^R D_0^{-\alpha} f(t, u(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds.$$

Donc

$$u(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} u_0^{(j)} + {}^R D_0^{-\alpha} f(t, u(t)). \quad (3.14)$$

3.2.1 Méthodes fractionnaires d'Euler (voir [12]) :

1) Méthode d'Euler fractionnaire vers l'avant (EulerA) :

On a :

$[{}^R D^{-\alpha} f(t, u(t))]_{t=t_n}$ est approximé par la formule rectangulaire fractionnaire gauche (3.11) :

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + h^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j, n+1} f(t_j, u_j), \quad (3.15)$$

Où

$$b_{j, n+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} [(n - j + 1)^\alpha - (n - j)^\alpha]. \quad (3.16)$$

2) Méthode d'Euler fractionnaire en arrière :

On a :

$[{}^R D^{-\alpha} f(t, u(t))]_{t=t_{n+1}}$ est approximé par la formule rectangulaire fractionnaire droit (3.12-3.13) :

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + h^\alpha \sum_{j=0}^n b_{j, n+1} f(t_{j+1}, u_{j+1}),$$

Où

$$b_{j, n+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} [(n - j + 1)^\alpha - (n - j)^\alpha].$$

Formule trapezoidal fractionnaire :

À chaque sous-intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ tel que $k = 0, 1, \dots, n - 1$, la fonction $f(t)$ est approximé par le polynôme par morceaux suivant de degré d'ordre un $f(t)|_{[t_k, t_{k+1}]}$ i.e :

$$f(t)|_{[t_k, t_{k+1}]} = \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} f(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} f(t_{k+1}). \quad (3.17)$$

On a

$$\begin{aligned} {}^R D^{-\alpha} f(t_n) &\approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} \left(\frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} f(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} f(t_{k+1}) \right) dt, \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k, n} f(t_k). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Où

$$a_{k, n} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} dt, & k = 0. \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} dt, & 1 \leq k \leq n - 1. \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} dt, & k = n. \end{cases} \quad (3.19)$$

Et on a $t_k = k \times h$.

Donc d'après simplification on obtient :

$$a_{k, n} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \begin{cases} (n - 1)^{\alpha+1} - (n - 1 - \alpha)n^\alpha, & k = 0. \\ (n - k + 1)^{\alpha+1} + (n - 1 - k)^{\alpha+1} - 2(n - k)^{\alpha+1}, & 1 \leq k \leq n - 1. \\ 1, & k = n. \end{cases} \quad (3.20)$$

3.2.2 Méthode fractionnaire d'Adams :

D'après (3.14) et (3.18) on obtient

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + \sum_{j=0}^n a_{j, n+1} f(t_j, u_j), \quad (3.21)$$

Où

$$a_{k, n+1} = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n - \alpha)(n + 1)^\alpha, & j = 0. \\ (n - j + 2)^{\alpha+1} + (n - j)^{\alpha+1} - 2(n - j + 1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n. \\ 1, & j = n + 1. \end{cases} \quad (3.22)$$

En utilisant la méthode d'approximation prédicteur-correcteur pour obtenir u_{n+1} .

D'abord, nous utilisons (3.15) pour obtenir u_{n+1}^p (prédicteur), puis on utilise (3.21) pour obtenir u_{n+1} (correcteur). En remplaçant u_{n+1} avec u_{n+1}^p sur le côté droit de (3.21) ce qui conduit à la méthode fractionnaire d'Adams [23, 24, 25, 26, 27] :

$$\begin{cases} u_{n+1}^p = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + \sum_{j=0}^n b_{j, n+1} f(t_j, u_j), \\ u_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^{(j)} + \sum_{j=0}^n a_{j, n+1} f(t_j, u_j) + a_{n+1, n+1} f(t_{n+1}, u_{n+1}^p). \end{cases} \quad (3.23)$$

Où $b_{j, n+1}$ est défini en (3.16).

3.2.3 La méthode de différence finie (voir [28]) :

La formule de différence finie en utilisant le développement de Taylor :

La formule de Taylor :

Soit g est une fonction $n + 1$ fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$ contenant x_0 .

Pour tout $x_0 \in [a, b]$ il existe ξ entre x et x_0 tel que :

$$g(x) = g(x_0) + \frac{dg}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{d^2g}{dx^2}(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{d^3g}{dx^3}(x_0) \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots + \frac{d^n g}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + R(\xi), \quad R(\xi) = \frac{d^{n+1}g}{dx^{n+1}}(\xi) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}. \quad (3.24)$$

L'Approximation des dérivées première de g par la différence finie en avant avec trois points :

On pose $x_j = x_0 + jh$ dans (3.24) .

Si $x = x_{j+1}$ et $x_0 = x_j$:

Donc

$$\begin{aligned} g(x_{j+1}) &= g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + g''(x_j) \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_1) \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3!}, \\ &= g(x_j) + hg'(x_j) + \frac{h^2}{2!}g''(x_j) + \frac{h^3}{3!}g'''(\xi_1). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si $x = x_{j+2}$ et $x_0 = x_j$:

Donc

$$\begin{aligned} g(x_{j+2}) &= g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+2} - x_j) + g''(x_j) \frac{(x_{j+2} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_2) \frac{(x_{j+2} - x_j)^3}{3!}, \\ &= g(x_j) + 2hg'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2!}g''(x_j) + \frac{(2h)^3}{3!}g'''(\xi_2). \end{aligned} \quad (3.26)$$

On multiplie (3.25) par (-4) et somment avec (3.26) on obtient :

$$g'(x_j) = \frac{-3g(x_j) + 4g(x_{j+1}) - g(x_{j+2})}{2h} - \frac{2h^2}{3!}g''(\xi_1) + \frac{4h^2}{3!}g''(\xi_2), \quad (3.27)$$

Et

$$\text{erreur} = -\frac{2h^2}{3!}g''(\xi_1) + \frac{4h^2}{3!}g''(\xi_2) = O(h^2).$$

L'Approximation de la dérivées deuxième de g par la différence finie en avant avec trois points :

Si $x = x_{j+1}$ et $x_0 = x_j$:

Donc

$$\begin{aligned} g(x_{j+1}) &= g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + g''(x_j) \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_1) \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3!}, \\ &= g(x_j) + hg'(x_j) + \frac{h^2}{2!}g''(x_j) + \frac{h^3}{3!}g'''(\xi_1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Si $x = x_{j+2}$ et $x_0 = x_j$:

On a d'après (3.24) :

$$\begin{aligned} g(x_{j+2}) &= g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+2} - x_j) + g''(x_j) \frac{(x_{j+2} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_2) \frac{(x_{j+2} - x_j)^3}{3!}, \\ &= g(x_j) + 2hg'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2!}g''(x_j) + \frac{(2h)^3}{3!}g'''(\xi_2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

On multiplie (3.28) par (-2) et somment avec (3.29) on obtient :

$$g''(x_j) = \frac{g(x_j) - 2g(x_{j+1}) + g(x_{j+2})}{h^2} - \frac{8h}{3!}g'''(\xi_2) + \frac{2h}{3!}g'''(\xi_1),$$

Et

$$\text{erreur} = -\frac{8h}{3!}g'''(\xi_2) + \frac{2h}{3!}g'''(\xi_1) = O(h).$$

L'Approximation de la dérivées deuxième de g par la différence finie en arrière avec trois points :

Si $x = x_{j-1}$ et $x_0 = x_j$:

Donc

$$\begin{aligned} g(x_{j-1}) &= g(x_j) + g'(x_j)(x_{j-1} - x_j) + g''(x_j) \frac{(x_{j-1} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_1) \frac{(x_{j-1} - x_j)^3}{3!}, \\ &= g(x_j) - hg'(x_j) + \frac{h^2}{2!}g''(x_j) - \frac{h^3}{3!}g'''(\xi_1). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Si $x = x_{j-2}$ et $x_0 = x_j$:

On a d'après (3.24) :

$$\begin{aligned} g(x_{j-2}) &= g(x_j) + g'(x_j)(x_{j-2} - x_j) + g''(x_j) \frac{(x_{j-2} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi_2) \frac{(x_{j-2} - x_j)^3}{3!}, \\ &= g(x_j) - 2hg'(x_j) + \frac{(2h)^2}{2!}g''(x_j) - \frac{(2h)^3}{3!}g'''(\xi_2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

On multiplie (3.30) par (-2) et somment avec (3.31) on obtient :

$$g''(x_j) = \frac{g(x_{j-2}) - 2g(x_{j-1}) + g(x_j)}{h^2} + \frac{8h}{3!}g'''(\xi_2) - \frac{2h}{3!}g'''(\xi_1), \quad (3.32)$$

Et

$$erreur = \frac{8h}{3!}g'''(\xi_2) - \frac{2h}{3!}g'''(\xi_1) = O(h).$$

L'Approximation de la dérivées deuxième de g par la différence finie en centre avec trois points :

Si $x = x_{j+1}$ et $x_0 = x_j$:

On a d'après (3.24) :

$$\begin{aligned} g(x_{j+1}) &= g(x_j) + g'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2!} + g'''(x_j)\frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3!} + g''''(\xi_1)\frac{(x_{j+1} - x_j)^4}{4!}, \\ &= g(x_j) + hg'(x_j) + \frac{h^2}{2!}g''(x_j) + \frac{h^3}{3!}g'''(x_j) + \frac{h^4}{4!}g''''(\xi_1). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Si $x = x_{j-1}$ et $x_0 = x_j$:

Donc

$$\begin{aligned} g(x_{j-1}) &= g(x_j) + g'(x_j)(x_{j-1} - x_j) + g''(x_j)\frac{(x_{j-1} - x_j)^2}{2!} + g'''(\xi)\frac{(x_{j-1} - x_j)^3}{3!} + g''''(\xi_2)\frac{(x_{j-1} - x_j)^4}{4!}, \\ &= g(x_j) - hg'(x_j) + \frac{h^2}{2!}g''(x_j) - \frac{h^3}{3!}g'''(\xi) + \frac{h^4}{4!}g''''(\xi_2). \end{aligned} \quad (3.34)$$

On somment (3.33) avec (3.34) on obtient :

$$g''(x_j) = \frac{g(x_{j-1}) - 2g(x_j) + g(x_{j+1}))}{h^2} - \frac{h^4}{4!}g''''(\xi_1) - \frac{h^4}{4!}g''''(\xi_2), \quad (3.35)$$

Et

$$erreur = -\frac{h^4}{4!}g''''(\xi_1) - \frac{h^4}{4!}g''''(\xi_2) = O(h^2).$$

3.2.4 L'Approximation de la dérivée fractionnaire avec MDFF :

Théorème 3.2.1. [29] Supposons que l'intervalle $[a, b]$ est subdivisé en n sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ de largeur $h = \frac{b-a}{n}$ en utilisant les nœuds également espacés $x_k = a + kh$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

La règle trapézoïdale composite pour n sous-intervalles peut être exprimée comme :

$$T(f, h) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)]. \quad (3.36)$$

Ceci est une approximation de l'intégrale de $f(x)$ sur $[a, b]$ puisque :

$$\int_a^b f(x)dx \approx T(f, h). \quad (3.37)$$

Maintenant, on a :

$${}^C D^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{y'(x)}{(t-x)^\alpha} dx,$$

Pour

$$0 < \alpha < 1, t \geq 0.$$

En appliquant la formule de l'intégration par parties on en déduit que :

$${}^C D^\alpha y(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left(y'(0)t^{1-\alpha} + \int_0^t (t-x)^{1-\alpha} y''(x) dx \right).$$

On utilisant la règle trapézoïdale composite (3.36 - 3.37) pour estimer l'intégrale :

On pose $f(x) = (t-x)^{1-\alpha} y''(x) dx$.

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-x)^{1-\alpha} y''(x) dx &\approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n [(t-x_{j-1})^{1-\alpha} y''(x_{j-1}) + (t-x_j)^{1-\alpha} y''(x_j)], \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n (t-x_{j-1})^{1-\alpha} y''(x_{j-1}) + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^n (t-x_j)^{1-\alpha} y''(x_j), \\ &\approx \frac{h}{2} \left[(t-x_0)^{1-\alpha} y''(0) + (t-x_n)^{1-\alpha} y''(x_n) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{1-\alpha} y''(x_j) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Donc

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha y(t) &= \frac{h \left[(t-x_0)^{1-\alpha} y''(0) + (t-x_n)^{1-\alpha} y''(x_n) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{1-\alpha} y''(x_j) \right]}{2(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \\ &\quad + \frac{y'(0)(t-x_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

On pose $y(x_j) = y_j$ d'après (3.27) , (3.32) et (3.35) on obtient :

$$\begin{aligned} y'_j &\approx \frac{-3y_j + 4y_{j+1} - y_{j+2}}{2h}. \\ y''_j &\approx \frac{y_{j-2} - 2y_{j-1} + y_j}{h^2}. \\ y''_j &\approx \frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Donc

$$\begin{aligned} y'_0 &\approx \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}. \\ y''_0 &\approx \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2}. \\ y''_n &\approx \frac{y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n}{h^2}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Alors

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha y(t) &= \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h} (t-x_0)^{1-\alpha} + \frac{y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n}{2h} (t-x_n)^{1-\alpha} \right] \\ &+ \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h} (t-x_j)^{1-\alpha} \right] \\ &+ \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} (t-x_0)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Donc

$${}^c D^\alpha y(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left(M_1 + \frac{h}{2} [M_2 + 2M_3 + M_4] \right),$$

Où

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} (t-x_0)^{1-\alpha}. \\ M_2 &= \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} (t-x_0)^{1-\alpha}. \\ M_3 &= \sum_{j=1}^{n-1} \left[\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} (t-x_j)^{1-\alpha} \right]. \\ M_4 &= \frac{y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n}{h^2} (t-x_n)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Chapitre 4

Application numérique

Dans ce chapitre, nous donnons des exemples avec la solution exacte d'une équation différentielle fractionnaire et nous recherchons la solution approchée en utilisant les méthodes (EulerA, Adams et différences finies), puis comparons la solution exacte avec la solution approximative à différentes étapes.

Enfin, nous comparons les trois méthodes numériques étudiées à travers des tableaux d'erreur absolue pour chaque méthode, et nous donnons des exemples.

Exemple 4.1. Considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$${}^C D_0^\alpha u(t) = -u(t) + \frac{t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1, u(0) = 0, t > 0. \quad (4.1)$$

La solution exacte est :

$$u(t) = t^4 E_{\alpha,5}(-t^\alpha)$$

Où $E_{\alpha,5}(-t^\alpha)$ est la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres(1.14).

Nous créons un tableau pour comparer la solution exacte avec la solution approximative de l'équation (4.1) à différentes valeurs pour l'étape $h = \frac{1}{n}$ tel que $n = 100, 500, 1000$ afin d'illustrer l'importance de la longueur du pas dans l'approche de la solution exacte de l'équation différentielle.

TABLE 4.1 – Solutions numériques en utilisant la méthode d'EulerA et l'erreurs lorsque $n = 100, 500, 1000$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

t	S.EXACT	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
		S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur
0.1	3.6361E-06	2.9206E-06	7.1552E-07	3.5010E-06	1.3508E-07	3.5701E-06	6.5964E-08
0.2	5.5242E-05	5.0236E-05	5.0062E-06	5.4302E-05	9.4020E-07	5.4781E-05	4.6113E-07
0.3	2.6920E-04	2.5393E-04	1.5269E-05	2.6632E-04	2.8798E-06	2.6779E-04	1.4162E-06
0.4	8.2475E-04	7.9138E-04	3.3371E-05	8.1843E-04	6.3208E-06	8.2164E-04	3.1141E-06
0.5	1.9605E-03	1.8997E-03	6.0865E-05	1.9490E-03	1.1571E-05	1.9548E-03	5.7085E-06
0.6	3.9707E-03	3.8716E-03	9.9095E-05	3.9518E-03	1.8898E-05	3.9614E-03	9.3325E-06
0.7	7.2018E-03	7.0526E-03	1.4924E-04	7.1733E-03	2.8536E-05	7.1877E-03	1.4104E-05
0.8	1.2050E-02	1.1838E-02	2.1236E-04	1.2010E-02	4.0697E-05	1.2030E-02	2.0128E-05
0.9	1.8960E-02	1.8671E-02	2.8941E-04	1.8905E-02	5.5571E-05	1.8933E-02	2.7500E-05
1	2.8422E-02	2.8040E-02	3.8126E-04	2.8348E-02	7.3334E-05	2.8385E-02	3.6308E-05

Nous représentons cette comparaison à l'aide de la courbe suivante :

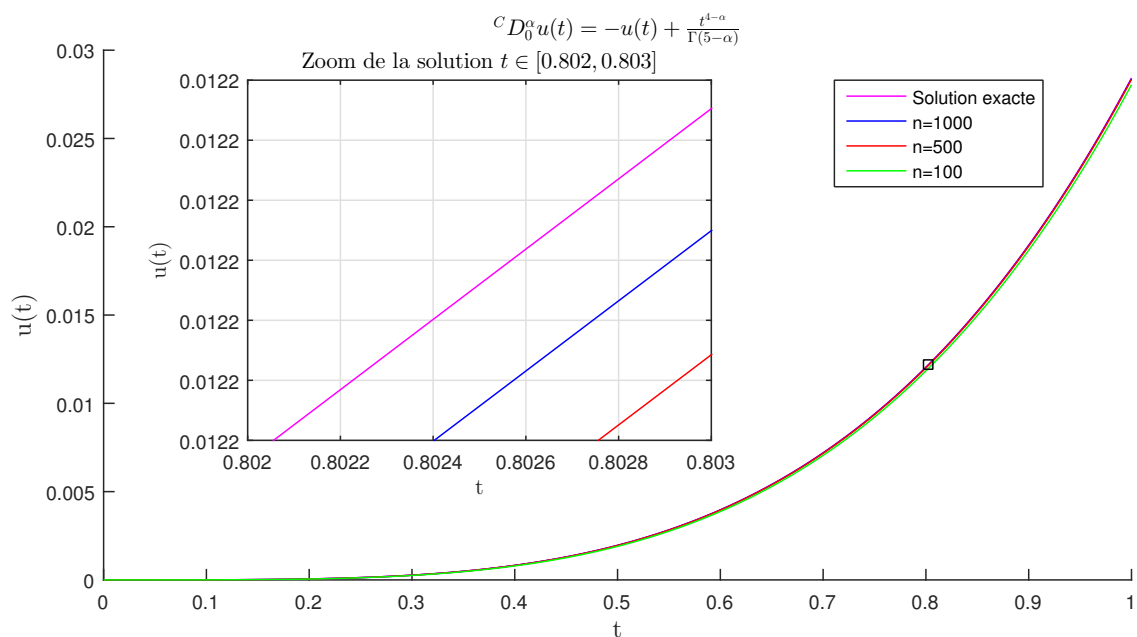


FIGURE 4.1 – La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec la méthode d'EulerA où $n = 100, 500, 1000$.

TABLE 4.2 – Solutions numériques en utilisant la méthode d'Adams et l'erreurs lorsque $n = 100, 500, 1000$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

t	S.EXACT	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
		S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur
0.1	3.6361E-06	3.7206E-06	8.4527E-08	3.6419E-06	5.8291E-09	3.6380E-06	1.8925E-09
0.2	5.5242E-05	5.5743E-05	5.0164E-07	5.5278E-05	3.6711E-08	5.5254E-05	1.2241E-08
0.3	2.6920E-04	2.7064E-04	1.4360E-06	2.6931E-04	1.0840E-07	2.6924E-04	3.6563E-08
0.4	8.2475E-04	8.2778E-04	3.0336E-06	8.2498E-04	2.3343E-07	8.2483E-04	7.9257E-08
0.5	1.9605E-03	1.9660E-03	5.4170E-06	1.9610E-03	4.2237E-07	1.9607E-03	1.4403E-07
0.6	3.9707E-03	3.9794E-03	8.6925E-06	3.9714E-03	6.8439E-07	3.9709E-03	2.3409E-07
0.7	7.2018E-03	7.2148E-03	1.2954E-05	7.2029E-03	1.0276E-06	7.2022E-03	3.5230E-07
0.8	1.2050E-02	1.2069E-02	1.8286E-05	1.2052E-02	1.4593E-06	1.2051E-02	5.0119E-07
0.9	1.8960E-02	1.8985E-02	2.4764E-05	1.8962E-02	1.9860E-06	1.8961E-02	6.8308E-07
1	2.8422E-02	2.8454E-02	3.2459E-05	2.8424E-02	2.6138E-06	2.8423E-02	9.0010E-07

Nous représentons cette comparaison à l'aide de la courbe suivante :

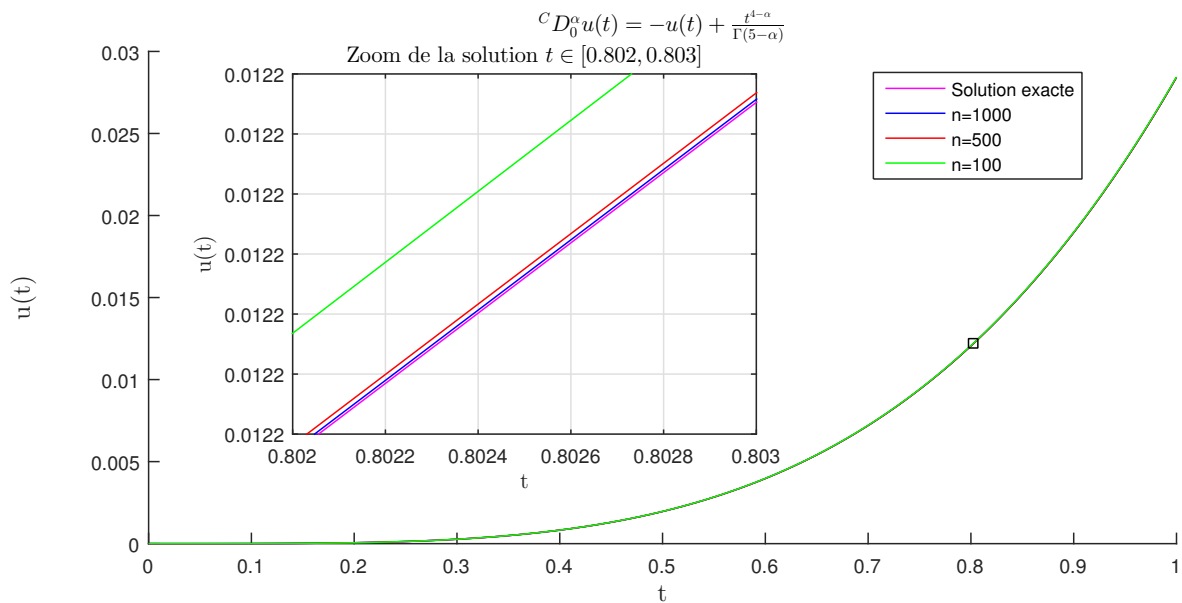


FIGURE 4.2 – La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec la méthode d'Adams où $n = 100, 500, 1000$.

TABLE 4.3 – Solutions numériques en utilisant la méthode des différences finies et l'erreurs lorsque $n = 100, 500, 1000$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

t	S.EXACT	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
		S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur
0.1	3.6361E-06	3.7656E-06	1.2946E-07	3.6493E-06	1.3156E-08	3.6409E-06	4.7822E-09
0.2	5.5242E-05	5.5936E-05	6.9445E-07	5.5309E-05	6.7650E-08	5.5266E-05	2.4370E-08
0.3	2.6920E-04	2.7100E-04	1.8011E-06	2.6937E-04	1.7233E-07	2.6926E-04	6.1841E-08
0.4	8.2475E-04	8.2824E-04	3.4946E-06	8.2508E-04	3.3091E-07	8.2487E-04	1.1848E-07
0.5	1.9605E-03	1.9663E-03	5.7985E-06	1.9611E-03	5.4528E-07	1.9607E-03	1.9495E-07
0.6	3.9707E-03	3.9794E-03	8.7255E-06	3.9715E-03	8.1642E-07	3.9710E-03	2.9158E-07
0.7	7.2018E-03	7.2141E-03	1.2282E-05	7.2030E-03	1.1448E-06	7.2022E-03	4.0851E-07
0.8	1.2050E-02	1.2067E-02	1.6470E-05	1.2052E-02	1.5305E-06	1.2051E-02	5.4580E-07
0.9	1.8960E-02	1.8982E-02	2.1291E-05	1.8962E-02	1.9736E-06	1.8961E-02	7.0341E-07
1	2.8422E-02	2.8448E-02	2.6743E-05	2.8424E-02	2.4737E-06	2.8423E-02	8.8126E-07

Nous représentons cette comparaison à l'aide de la courbe suivante :

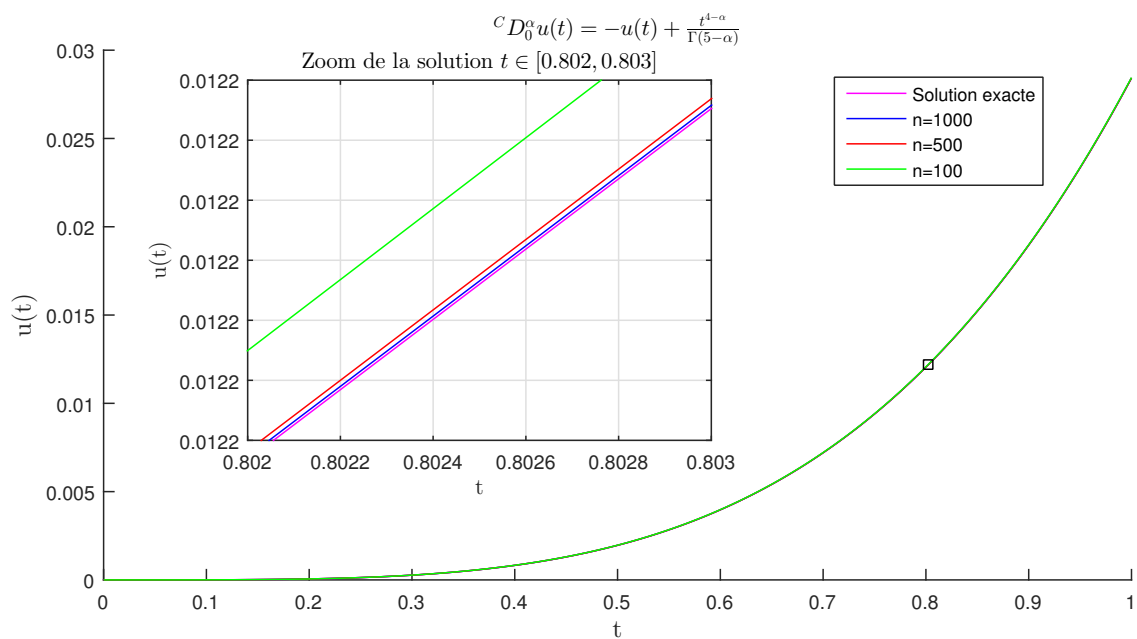


FIGURE 4.3 – La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec MDFF où $n = 100, 500, 1000$.

Nous remarquons à partir du graphique que chaque fois que $n = \frac{1}{h}$ est plus grande, la solution approchée se rapproche de la solution exacte.

Dans ce qui suit, nous comparons les trois méthodes précédentes en calculant l'erreur relative à la valeur approximative de la solution au temps $t = 1$, c'est-à-dire :

L'erreur absolue de l'approximation de $u(1)$ avec différentes longueurs $h = \frac{1}{n}$ tel que $n = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640$, et ordre $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ en utilisant la méthode fractionnaire d'Euler table 4.4, la méthode fractionnaire d'Adams table 4.5 et la méthode de différence finie fractionnaire dans le table 4.6.

TABLE 4.4 – Les erreurs absolues à $t = 1$ par la Méthode d'EulerA.

n	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$
10	4.1205E-03	4.1397E-03	4.2821E-03	4.5571E-03	4.9388E-03
20	2.0192E-03	1.9788E-03	2.0515E-03	2.2207E-03	2.4550E-03
40	9.8557E-04	9.4634E-04	9.8894E-04	1.0892E-03	1.2222E-03
80	4.8052E-04	4.5427E-04	4.8032E-04	5.3731E-04	6.0937E-04
160	2.3428E-04	2.1912E-04	2.3490E-04	2.6625E-04	3.0416E-04
320	1.1429E-04	1.0623E-04	1.1553E-04	1.3235E-04	1.5192E-04
640	5.5794E-05	5.1741E-05	5.7071E-05	6.5923E-05	7.5914E-05

TABLE 4.5 – Les erreurs absolues à $t = 1$ par la méthode d'Adams .

n	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$
10	8.3901E-03	2.8610E-03	1.4115E-03	8.3648E-04	5.6869E-04
20	4.0702E-03	1.0375E-03	4.4345E-04	2.3463E-04	1.4543E-04
40	1.7756E-03	3.7406E-04	1.4182E-04	6.7031E-05	3.7535E-05
80	7.4735E-04	1.3656E-04	4.6334E-05	1.9468E-05	9.7498E-06
160	3.1280E-04	5.0689E-05	1.5430E-05	5.7295E-06	2.5432E-06
320	1.3159E-04	1.9114E-05	5.2187E-06	1.7035E-06	6.6531E-07
640	5.5820E-05	7.3069E-06	1.7863E-06	5.1041E-07	1.7440E-07

TABLE 4.6 – Les erreurs absolues à $t = 1$ par la méthode de différence finie.

n	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$
10	5.0475E-05	2.5714E-04	7.2589E-04	1.7072E-03	3.6433E-03
20	1.5697E-05	8.7708E-05	2.7507E-04	7.2350E-04	1.7257E-03
40	4.7353E-06	2.9073E-05	1.0178E-04	3.0166E-04	8.1253E-04
80	1.3991E-06	9.4560E-06	3.7095E-05	1.2450E-04	3.8116E-04
160	4.0716E-07	3.0353E-06	1.3387E-05	5.1060E-05	1.7839E-04
320	1.1713E-07	9.6509E-07	4.7996E-06	2.0860E-05	8.3376E-05
640	3.3386E-08	3.0470E-07	1.7134E-06	8.5024E-06	3.8937E-05

Les résultats des tableaux table 4.4, table 4.5 et table 4.6 montrent une compatibilité

acceptable des solutions approchées avec les solutions exactes des trois méthodes.

Maintenant, nous comparons les trois méthodes en donnant différents exemples où $\alpha = 0.05, 0.4, 0.8$ avec $n = 1000$.

Exemple 4.2. si $\alpha = 0.05$:

L'équation 4.1 devient :

$${}^C D_0^{0.05} u(t) = -u(t) + \frac{t^{3.95}}{\Gamma(4.95)}, u(0) = 0, t > 0.$$

La solution exacte est donnée comme suit :

$$u(t) = t^4 E_{0.05, 5}(-t^{0.05}).$$

Nous donnons le tableau suivant :

TABLE 4.7 – La comparaison entre les erreurs absolue des trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) lorsque $n = 1000$ et $\alpha = 0.05$.

t	S.EXACT	EulerA		Adams		MDFF	
		S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur
0.1	2.2811E-06	2.2370E-06	4.4164E-08	2.3770E-06	9.5817E-08	2.2812E-06	4.2970E-11
0.2	3.5925E-05	3.5587E-05	3.3744E-07	3.6671E-05	7.4598E-07	3.5925E-05	1.8904E-10
0.3	1.8017E-04	1.7906E-04	1.1082E-06	1.8263E-04	2.4653E-06	1.8017E-04	4.4723E-10
0.4	5.6560E-04	5.6302E-04	2.5760E-06	5.7135E-04	5.7487E-06	5.6560E-04	8.2214E-10
0.5	1.3736E-03	1.3687E-03	4.9552E-06	1.3847E-03	1.1079E-05	1.3736E-03	1.3169E-09
0.6	2.8360E-03	2.8276E-03	8.4565E-06	2.8550E-03	1.8932E-05	2.8360E-03	1.9339E-09
0.7	5.2349E-03	5.2216E-03	1.3287E-05	5.2647E-03	2.9774E-05	5.2349E-03	2.6751E-09
0.8	8.9021E-03	8.8824E-03	1.9653E-05	8.9461E-03	4.4067E-05	8.9021E-03	3.5421E-09
0.9	1.4219E-02	1.4191E-02	2.7757E-05	1.4281E-02	6.2270E-05	1.4219E-02	4.5362E-09
1	2.1618E-02	2.1580E-02	3.7800E-05	2.1702E-02	8.4837E-05	2.1618E-02	5.6586E-09

Nous utilisons la courbe suivante pour la comparaison :

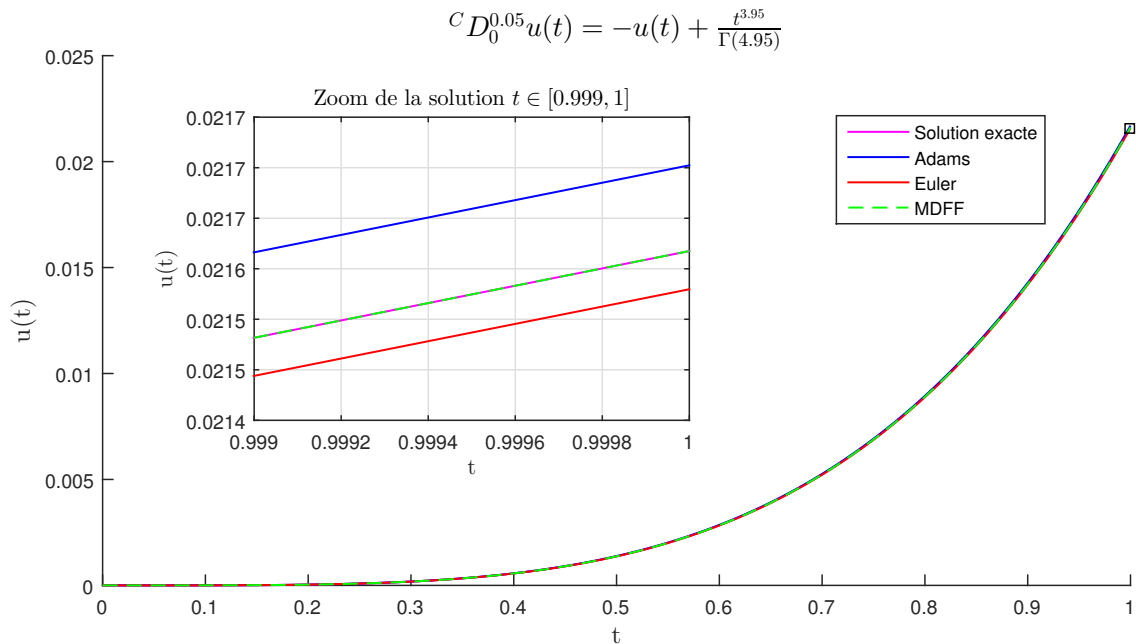


FIGURE 4.4 – La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec les trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) où $n = 1000$ et $\alpha = 0.05$.

À travers les résultats présentés dans le tableau 4.7, nous notons que dans cet exemple, la méthode des différences finies est plus précise que la méthode d'Euler, et la méthode d'Euler est plus précise que la méthode d'Adams. Comme le montre la courbe de la figure 4.4.

Exemple 4.3. si $\alpha = 0.4$:

L'équation 4.1 devient :

$${}^C D_0^{0.4} u(t) = -u(t) + \frac{t^{3.6}}{\Gamma(4.6)}, u(0) = 0, t > 0.$$

La solution exacte est donnée comme suit :

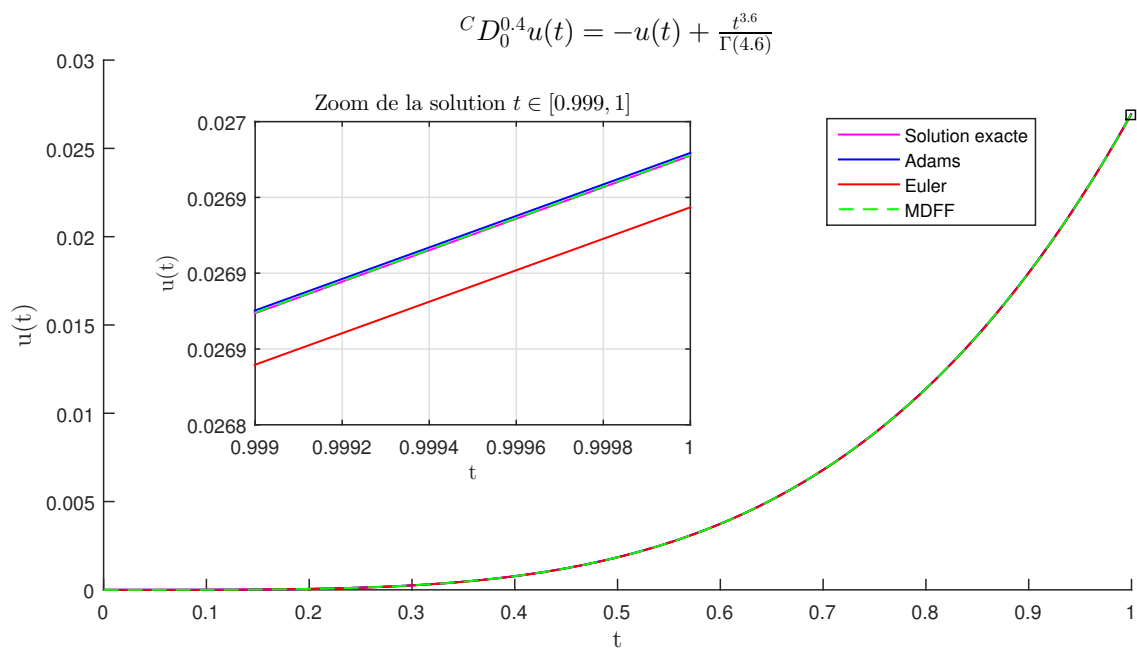
$$u(t) = t^4 E_{0.4, 5}(-t^{0.4}).$$

Nous donnons le tableau suivant :

TABLE 4.8 – La comparaison entre les erreurs absolues des trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) lorsque $n = 1000$ et $\alpha = 0.4$.

t	S.EXACT	EulerA		Adams		MDFF	
		S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur
0.1	3.4280E-06	3.3665E-06	6.1510E-08	3.4315E-06	3.5319E-09	3.4304E-06	2.3557E-09
0.2	5.1891E-05	5.1466E-05	4.2454E-07	5.1914E-05	2.3568E-08	5.1902E-05	1.1243E-08
0.3	2.5277E-04	2.5147E-04	1.2999E-06	2.5284E-04	7.1309E-08	2.5279E-04	2.7565E-08
0.4	7.7497E-04	7.7211E-04	2.8598E-06	7.7513E-04	1.5593E-07	7.7503E-04	5.1667E-08
0.5	1.8446E-03	1.8393E-03	5.2537E-06	1.8449E-03	2.8539E-07	1.8447E-03	8.3714E-08
0.6	3.7418E-03	3.7331E-03	8.6154E-06	3.7422E-03	4.6685E-07	3.7419E-03	1.2379E-07
0.7	6.7983E-03	6.7852E-03	1.3067E-05	6.7990E-03	7.0678E-07	6.7984E-03	1.7194E-07
0.8	1.1396E-02	1.1377E-02	1.8720E-05	1.1397E-02	1.0112E-06	1.1396E-02	2.2817E-07
0.9	1.7963E-02	1.7938E-02	2.5679E-05	1.7965E-02	1.3857E-06	1.7964E-02	2.9248E-07
1	2.6978E-02	2.6943E-02	3.4043E-05	2.6979E-02	1.8354E-06	2.6978E-02	3.6484E-07

Nous utilisons la courbe suivante pour la comparaison :

FIGURE 4.5 – La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec les trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) où $n = 1000$ et $\alpha = 0.4$.

À travers les résultats présentés dans le tableau 4.8, nous notons que dans cet exemple, la méthode des différences finies est plus précise que la méthode d'Adams, et la méthode

d'Adams est plus précise que la méthode d'Euler. Comme le montre la courbe de la figure 4.5.

Exemple 4.4. si $\alpha = 0.8$:

L'équation 4.1 devient :

$${}^C D_0^{0.8} u(t) = -u(t) + \frac{t^{3.2}}{\Gamma(4.2)}, u(0) = 0, t > 0.$$

La solution exacte est donnée comme suit :

$$u(t) = t^4 E_{0.8, 5}(-t^{0.8}).$$

Nous donnons le tableau suivant :

TABLE 4.9 – La comparaison entre les erreurs absolues des trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) lorsque $n = 1000$ et $\alpha = 0.8$.

t	S.EXACT	EulerA		Adams		MDFF	
		S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur	S.Appr.	erreur
0.1	3.9886E-06	3.9130E-06	7.5558E-08	3.9891E-06	5.4448E-10	4.0172E-06	2.8588E-08
0.2	6.1843E-05	6.1284E-05	5.5925E-07	6.1846E-05	2.6574E-09	6.2028E-05	1.8492E-07
0.3	3.0454E-04	3.0278E-04	1.7639E-06	3.0455E-04	6.9418E-09	3.0508E-04	5.3796E-07
0.4	9.3848E-04	9.3455E-04	3.9311E-06	9.3850E-04	1.3872E-08	9.3961E-04	1.1309E-06
0.5	2.2379E-03	2.2306E-03	7.2496E-06	2.2379E-03	2.3821E-08	2.2399E-03	1.9922E-06
0.6	4.5385E-03	4.5266E-03	1.1868E-05	4.5385E-03	3.7082E-08	4.5416E-03	3.1401E-06
0.7	8.2324E-03	8.2145E-03	1.7903E-05	8.2325E-03	5.3886E-08	8.2370E-03	4.5863E-06
0.8	1.3764E-02	1.3738E-02	2.5445E-05	1.3764E-02	7.4411E-08	1.3770E-02	6.3372E-06
0.9	2.1624E-02	2.1590E-02	3.4566E-05	2.1625E-02	9.8794E-08	2.1633E-02	8.3956E-06
1	3.2351E-02	3.2305E-02	4.5317E-05	3.2351E-02	1.2714E-07	3.2362E-02	1.0762E-05

Nous utilisons la courbe suivante pour la comparaison :

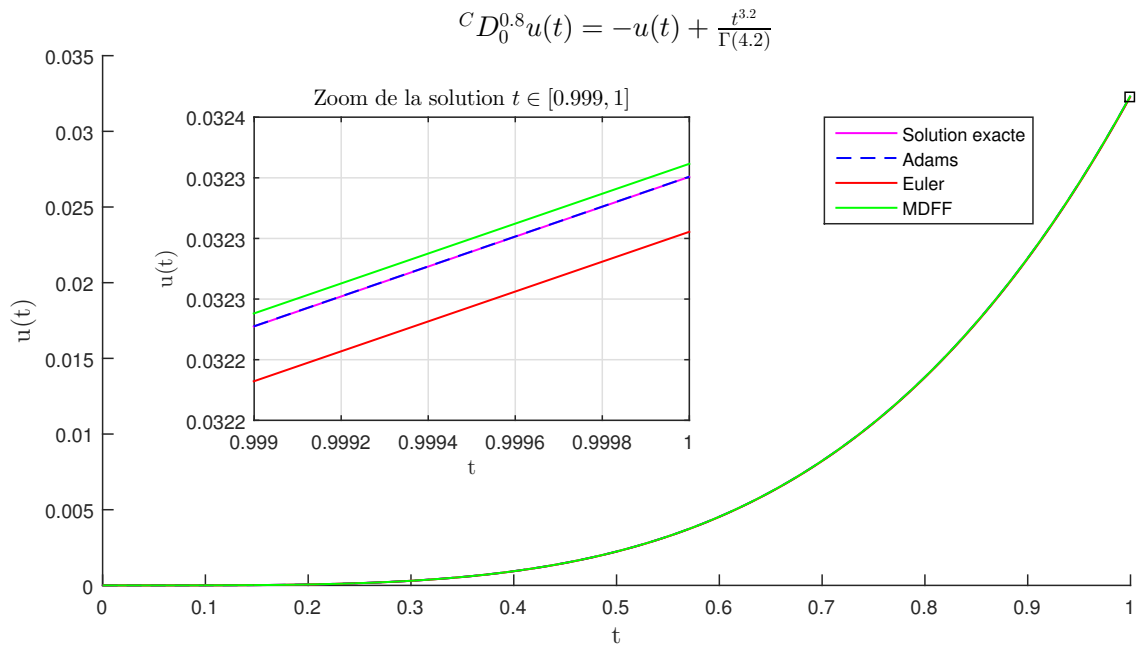


FIGURE 4.6 – La comparaison entre la solution exacte et les solutions approchées avec les trois méthodes (EulerA, Adams et MDFF) où $n = 1000$ et $\alpha = 0.8$.

À travers les résultats présentés dans le tableau 4.9, nous notons que dans cet exemple, la méthode d'Adams est plus précise que la méthode des différences finies, et la méthode des différences finies est plus précise que la méthode d'Euler. Comme le montre la courbe de la figure 4.6.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté certaines méthodes utilisées pour calculer les approximations numériques de solution d'équations différentielles classiques qui ont été développées pour résoudre des équations différentielles fractionnaires linéaires de la forme :

$${}^C D_0^\alpha u(t) - au(t) = g(t), 0 < \alpha < 1, u(0) = 0, t > 0.$$

Nous avons essayé de donner une solution approximative en utilisant les trois méthodes étudiées, pour compléter ce travail avec des résultats numériques qui garantissent l'efficacité de ces méthodes.

Pour les exemples traités, nous avons remarqué que la préférence de la méthode utilisée pour trouver la solution approchée est liée à l'ordre de la dérivée fractionnaire α , puisque dans l'exemple 4.2 où $\alpha = 0.05$ la méthode des différences finies est plus précise que la méthode d'Euler et la méthode d'Euler est plus précise que la méthode d'Adams, et aussi dans l'exemple 4.3 où $\alpha = 0.4$ la méthode des différences finies est la meilleure mais la méthode d'Adams est plus précise que la méthode d'Euler. Dans le dernier exemple 4.4 où $\alpha = 0.8$ la méthode d'Adams est la meilleure et la méthode des différences finies est plus précise que la méthode Euler.

Nous comptons, dans l'avenir appliquer les méthodes cités dans ce mémoire à d'autre équation, et développer d'autre méthodes numériques de résolution des équations différentielles à dérivées fractionnaires, mais coûteuses et plus précises que celle proposées dans ce mémoire.

Bibliographie

- [1] GW Leibniz, Letter from Hanover, and September Germany. 30, 1695 to ga l'hospital". leibnizen mathematische schriften, vol. 2, 1962.
- [2] GW Leibniz. Letter from hanover, germany, to gfa l'hospital, september 30 ; 1695. *Mathematische Schriften*, 2 :301–302, 1849.
- [3] H Laurent. Sur le calcul des dérivées à indices quelconques. *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 3 :240–252, 1884.
- [4] Andrew Gemant. A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies. *Physics*, 7(8) :311–317, 1936.
- [5] Kenneth S Miller and B Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, john-wily and sons. *Inc. New York*, 1993.
- [6] Arvet Pedas and Enn Tamme. Numerical solution of nonlinear fractional differential equations by spline collocation methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 255 :216–230, 2014.
- [7] AYT Leung, Zhongjin Guo, and HX Yang. Fractional derivative and time delay damper characteristics in duffing–van der pol oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(10) :2900–2915, 2013.
- [8] Stegun I.A. Abramowitz M. *Handbook of Mathematical Functions*. 9 edition, 1964.

- [9] Ignor Podlubny and Kenneth V. Thimann (Eds.). *Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Mathematics in science and engineering 198. Academic Press, 1st edition, 1999.
- [10] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik (Auth.). *Table of Integrals, Series, and Products*. Elsevier Inc, Academic Press Inc, 2nd edition, 1980.
- [11] Eric Weisstein. 'Erfc.' *From MathWorld A Wolfram Web Resource*, 2020 (accessed February 3, 2020). <https://mathworld.wolfram.com/Erfc.html>.
- [12] Changpin Li and Fanhai Zeng. *Numerical methods for fractional calculus*, volume 24. CRC Press, 2015.
- [13] Kai Diethelm (auth.). *The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Lecture Notes in Mathematics 2004. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2010.
- [14] Marc Weilbeer. *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background*. Papierflieger, 2005.
- [15] Tellab Brahim. *Résolution des équations différentielles fractionnaires*. Université des Frères Mentouri Constantine -1, faculté des sciences exactes edition, 2018.
- [16] Saeed Kazem. Exact solution of some linear fractional differential equations by laplace transform. *International Journal of Nonlinear Science*, 16(1) :3–11, 2013.
- [17] Michele Caputo. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, 13(5) :529–539, 1967.
- [18] Igor Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation”, *fractional calculus and applied analysis*, vol.5, number 4, 2002.
- [19] H Eduardo Roman and Massimiliano Giona. Fractional diffusion equation on fractals : three-dimensional case and scattering function. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 25(8) :2107, 1992.

- [20] Hari M. Srivastava Anatoly A. Kilbas and Juan J. Trujillo (Eds.). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies 204. Elsevier, 1 edition, 2006.
- [21] HOUMOR Tarek. *Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentielles Fractionnaires*. Université des Frères Mentouri Constantine -1, faculté des sciences exactes edition, 2014.
- [22] Richard K Miller and Richard Kendall Miller. *Nonlinear Volterra integral equations*. Number 48. WA Benjamin, 1971.
- [23] Kai Diethelm and NJ Ford. Predictor-corrector strategies for single and multi-term fractional differential equations. In *HERCMA*, pages 117–122, 2001.
- [24] Kai Diethelm, Neville J Ford, and Alan D Freed. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4) :3–22, 2002.
- [25] Kai Diethelm, Neville J Ford, and Alan D Freed. Detailed error analysis for a fractional adams method. *Numerical algorithms*, 36(1) :31–52, 2004.
- [26] Kai Diethelm and Alan D Freed. On the solution of nonlinear fractional-order differential equations used in the modeling of viscoplasticity. In *Scientific Computing in Chemical Engineering II*, pages 217–224. Springer, 1999.
- [27] Changpin Li and Chunxing Tao. On the fractional adams method. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(8) :1573–1588, 2009.
- [28] Ramzi B Albadarneh, Mohammad Zerqat, and Iqbal M Batiha. Numerical solutions for linear and non-linear fractional differential equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 106(3) :859–871, 2016.
- [29] Ramzi B Albadarneh, Iqbal M Batiha, and Mohammad Zurigatb. Numerical solutions for linear fractional differential equations of order $1 < \alpha < 2$ using finite difference method (ffdm). *Int. J. Math. Comput. Sci*, 16(1) :103–111, 2016.

