Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Draya Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par :

M^{elle} **BEN SALAH Nessrine**

Thème :

Stabilité des quelques types des semi-groupes

Soutenu publiquement le .. /.. /2020

devant le jury composé de :

M. BALIKI Abdessalam	Maître de conférences B	Université d'Adrar	Président
M. FATMI Larbi	Maître de conférences B	Université d'Adrar	Encadrant
Mme. SOUDDI Nassira	Maître Assistant A	Université d'Adrar	Examinatrice

2019–2020

Ce travail est dédie

à mes chers parents, qui ont toujours été une source inépuisable d'amour et d'encouragements.

à ma sœur et mes fréres.

à mon amie intime.

à tous mes professeurs.

à tous ceux que j'aime.

♦*NESSRINE*♦

Remerciement

Avant tout, mes purs remerciements, je les exprime à ***Allah*** *tout puissant.*

Je vifs remerciement vont également à mon encadreur ***M. FATMI Larbi*** *qui m'a guidé durant ce travail et qui ses conseils et remarque étaient très utile pour réaliser ce mémoire.*

Je remercie encore, ***M. BALIKI Abdessalam*** *et* ***Mme. SOUDDI Nassira*** *pour avoir accepter d'évaluer ce travail et m'avoir faire l'honneur de participer au jury.*

J'exprime aussi ma reconnaissance à toute l'équipe des formateurs du département des Mathématiques et Informatique qui ont assuré une formation solide et écace pour que nous serons à la hauteur.

Merci beaucoup.

Table des matières

Notations générales

$\mathcal{L}(X,Y)$	L'espace des opérateurs linéaires de X dans Y
$\mathcal{L}(X)$	L'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans X
$D(A)$	Domaine de l'opérateur A
$\lvert . \rvert_X$	La norme muni de l'espace de Banach X
$\lVert . \rVert_{\mathcal{L}(X,Y)}$	La norme des opérateurs
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant de A
$\sigma(A)$	Le spectre de A
$R(.,A)$	la résolvante de A
$\omega_0(T)$	La borne de croissence du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$
$r(A)$	Le rayon spectral de A
I	L'opérateur identité de l'espace X
$L^1(0,T;X)$	L'espace (des classes d'équivalence) de fonctions intégrables (au sens de Bochner) sur $[0,T]$ à valeurs dans X. Nous confondons deux fonctions qui coincident presque partout
(PHC)	Problème homogène de Cauchy
$(PNHC)$	Problème non homogène de Cauchy.

Introduction

Donnant un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach X, on dit que l'orbite $T(.)x$ $(x \in X)$ est **stable** si :

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0 \tag{1}$$

si (1) vérifie pour tout $x \in X$, alors on a $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est stable. Pour des opérateurs bornés, $i.e$, pour des semi-groupes discrete dans un espace de Banach X, les notions de stabilité sont semblables.

Le but de cette enquête est de présenter un regard nouveau et unifié sur la théorie de stabilité des semi-groupes. Nous mettons l'accent sur les idées, les méthodes et les outils, tant pour les semi-groupes généraux que pour les semi-groupes concrets. Nous ne donnons ni un aperçu complet des résultats existants, ni un compte rendu histirique de ceux-ci.

Depuis la naissance de la théorie des semi-groupes et de la théorie de l'opérateur général, la théorie de la stabilité des semi-groupes d'opérateurs a attiré beaucoup d'attention pour plusieurs raisons.

Premièrement, la théorie de stabilité est **importante** car les C_0-semi groupes stables correspondent à des problémes de Cauchy linéaires abstraits asymptotiquement stables (au sens de Liaponov) bien posés. Le concept de stabilité asymptotique est fondamental dans la théorie des équations différentielles ordinaires et partielles. Cela place la théorie de stabilité sur le terrain des applications (du monde réel).

La théorie de stabilité est aussi **importante** puisque la stabilité joue un rôle central dans la théorie structurelle des opérateurs, par exemple, nous mentionnons la classification des semi-groupes de contraction, la théorie du sous-espace invariant, les problèmes de similarité et de quasi-similarité, les dilatations et les calculs fonctionnels.

Deuxiémement, la théorie de stabilité est **riche** en méthodes et en idées, et ce sera un point essentiel de cette étude. Les avancées récentes interagissent profondément avec les sujets modernes de la théorie des fonctions complexes, de l'analyse harmonique, de la géométrie des espaces de Banach et de la théorie spectral. Ces interactions conduisent parfois à des sous-produits inattendus : nouveaux théorèmes de structure pour sous-espaces invariants d'un glissement de Bergman, nouveaux principes de maximum pour les fonctions harmoniques ou nouveaux théorèmes taubériens ; ce points montre qu'il mérite l'attention non seulement du point de vue appliqué.

Troisièmement, la théorie de stabilité est **intéressante** car elle a mis en évidence des relations initimes entre des domaines apparement sans rapport entre aux et souligné les liens existants entre fifférentes matières mathématiques.

Enfin, la théorie de stabilité est un défi. Á notre avis, les grandes avancées de la théorie de la stabilité et la compréhension de leur place permi les autre théorie mathématiques (théorie des fonctions complexes, théorie des opérateurs, équations aux dérivées partielles) attendent encore leur développement. [1]

Ce mémoire se divise en trois chapitres de :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et propriétés des opérateurs linéaires et des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés, aussi il enferme le théorème de Hille-Yosida.

Dans le second chapitre, on s'intéresse à des notions, définitions, théorèmes et des lemmes sur la stabilité des opérateurs et des C_0-semi groupes.

Le troisième et dernière chapitre est traité les problèmes abstraits de Cauchy à valeur initiale, puis, la stabilité au sens de Liaponov, et un exemple qui applique les définitions de stabilité et le théorème de Liaponov.

1. [5]

Chapitre 1

Préliminaires

Définitions et propriétés

1.1 *Opérateur linéaire borné, fermé, fermable*

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés.

Définition 1.1 (Opérateur linéaire). Un opérateur linéaire de X dans Y est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeur dans Y.

Un opérateur linéaire sur X est une application linéaire A définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeur dans X.

$D(A)$ est appelé **le domaine** de l'opérateur A.

On dit que A est à domaine dense si

$$\overline{D(A)} = X.$$

Définition 1.2 (Opérateur borné). Soient X et Y deux espaces de Banach, on dit que $A : D(A) \subset X \to Y$ est **"borné"** s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$|Ax|_Y < c\,|x|_X \qquad \forall x \in D(A)$$

.

Dans le cas contraire, c-à-d pour $\forall c > 0$ on a $|Ax|_Y \geq c\,|x|_X \quad \forall x \in D(A)$, on dit que $A : D(A) \subset X \to Y$ est non-borné.

Définition 1.3. On désigne par $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y munit de la norme

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\{|Tx|_Y : x \in X \text{ et } |x|_X \leq 1\ \}$$

$\mathcal{L}(X,Y)$ est dit espace des opérateurs bornés.

On pose $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

On définie des autres mormes sur $\mathcal{L}(X,Y)$ par :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \Leftrightarrow \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{|Ax|_Y}{|x|_X} \Leftrightarrow \sup_{|x|_X \leq 1} |Ax|_Y \Leftrightarrow \sup_{|x|_X = 1} |Ax|_Y$$

Théorème 1.1 (Banach-Steinhaus). *[4] Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires bornés de X dans Y, on suppose que :*

$$\sup_{i\in I} |T_i x|_Y < \infty$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$$

Autrement dit il existe une constante $c \geq 0$ telle que :

$$|T_i x|_Y < c\,|x|_X \qquad \forall x \in X \quad \forall i \in I$$

Définition 1.4 (Opérateur fermé). Soient X et Y deux espaces de Banach, On dit qu'un opérateur A est **"fermé"** si le graphe de A noté $G(A) = \{(x,Ax) : x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times Y$.

Proposition 1.1. [6]

Un opérateur A sur X est fermé, si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in X$ et $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \in X$, on a alors $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Théorème 1.2 (Théorème du graphe fermé). *[4] Soient X et Y deux espaces de Banach, soit A un opérateur linéaire de X dans Y. Si le graphe de A noté $G(A) = \{(x,Ax) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$, alors A est continue.*

Définition 1.5 (Extension). On dit que l'opérateur B est **"une extension"** de l'opérateur A si $G(A) \subset G(B)$, c-à-d $D(A) \subset D(B)$ et $Ax = Bx$ pour tout $x \in D(A)$.

Définition 1.6 (Opérateur fermable). On dit qu'un opérateur linéaire A est **"fermable"** s'il possède une extension fermé.

Définition 1.7 (Spectre et ensemble résolvant). [8] Soit X un espace de Banach et soit $A : D(A) \to X$ un opérateur linéaire. On appelle **ensemble résolvant** de A, qu'on note $\rho(A)$, l'ensemble :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : D(A) \to X \text{ est bijective et } (\lambda I - A)^{-1} : X \to D(A) \text{ est borné}\}$$

Si A est fermé alors d'aprés le théorème du graphe fermé on a

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \to X \textbf{est bijective}\}$$

est l'ensemble résolvant de A et son complémentaire $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ s'appele **le spectre** de A.

Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire borné $R(\lambda,A) := (\lambda I - A)^{-1}$ est appelé **la résolvante** de A au point λ.

Définition 1.8 (Rayon spectral). [8] Soient X un espace normé complexe, et A un opérateur linéaire sur X. **Le rayon spectral** de A est noté $r(A)$ et définie par :

$$r(A) = sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Proposition 1.2. [7] Soient X un espace de Banach, et A un opérateur linéaire sur X. Alors :

$$r(A) = \lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

1.2 *Semi-groupes d'opérateurs uniformement continue*

Définition 1.9. Soit X est un espace de Banach.

Une famille à un paramètre $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite **"semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés"** sur X si :

(i) $T(0) = I$ (où I est l'opérateur identité de X).

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t,s \geq 0$

Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit **"uniformément continu"** sur X si :

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$$

Définition 1.10. On appelle **"générateur infinitésimal"** d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire :

$$A : X \longrightarrow X$$
$$A = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)-I}{t}$$

Lemme 1.1. *[6] Soit $f : [a,b] \to X$ une fonction continue, alors :*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)ds = f(a)$$

Preuve. Pour $t \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{t} \int_{a}^{a+t} f(s)ds - f(a) \right\| &= \left\| \frac{1}{t} \int_{a}^{a+t} (f(s) - f(a))ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{t} \times \sup_{s \in [a,a+t]} \|f(s) - f(a)\| \times \int_{a}^{a+t} ds \\
&\leq \frac{1}{t} \times \sup_{s \in [a,a+t]} \|f(s) - f(a)\| \times t \\
&= \sup_{s \in [a,a+t]} \|f(s) - f(a)\|
\end{aligned}$$

La continuité de f nous permet de conclure. □

Lemme 1.2. *Si $A \in B(X)$ et $\|A\| < 1$ alors $I - A$ est inversible et $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A)^n$.*

Lemme 1.3. *[6] Soit $A \in B(X)$ alors $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ est un semi groupe uniformement continue d'opérateurs linéaires bornés sur X dont la générateur infinitésimal est A.*

Preuve. *Soit* A$\in B(X)$ et t$\to T(t) \in B(X)$ est une application définie par :

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \forall t \geq 0.$$

La série de membres de droit est convergente pour la topologie de la norme de $B(X)$, Alors :

1) On a $T(0) = e^{(0 \times A)} = I$.

2) $\forall t,s \geq 0$, On a : $T(t + s) = e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} = T(t)T(s)$.

3) On a :

$$
\begin{aligned}
\|T(t)-I\| &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}-I\right\| \\
&= \left\|I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}-I\right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k\left\|A\right\|^k}{k!} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k\left\|A\right\|^k}{k!}-1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\left\|A\right\|^k}{k!}-1 = e^{t\|A\|}-1 \quad ,\forall t\geq 0.
\end{aligned}
$$

Il on résulte que $\lim\limits_{t\to 0}\|T(t)-I\| = 0$.

Donc la famille $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe uniformement continue.

Montrons que A est le générateur infinitésimal de cette semi groupe, puis que :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t)-I}{t}-A\right\| &= \left\|\frac{1}{t}(e^{tA}-I-tA)\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{t}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}-I-tA)\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{t}(I+tA+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}-I-tA)\right\| \\
&\leq \frac{1}{t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k\left\|A\right\|^k}{k!} \\
&\leq \frac{1}{t}(1+t\left\|A\right\|+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k\left\|A\right\|^k}{k!}-1-t\left\|A\right\|) \\
&\leq \frac{1}{t}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\left\|A\right\|^k}{k!}-1-t\left\|A\right\|) \\
&\leq \frac{1}{t}(e^{t\|A\|}-1-t\left\|A\right\|) \\
&\leq (\frac{e^{t\|A\|}-1}{t\left\|A\right\|}\left\|A\right\|-\left\|A\right\|)
\end{aligned}$$

Et comme $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{t\|A\|}-1}{t\|A\|}\left\|A\right\|-\left\|A\right\|=0$,donc nous obtenons que

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)-I}{t}-A=0$$

Donc $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe de générateur infinitésimal A. □

Lemme 1.4. *[6] Soit A un opérateur de $B(X)$. Il existe un unique semi-groupe uniformement continue $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tel que $T(t)=e^{tA}$ ayant pour générateur l'opérateur A.*

Preuve. Soit $A\in B(X)$, alors il existe un semi groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ engendre par A.

Supposons $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un autre semi groupe uniformément continu engendre par A, alors nous avons :

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{T(t)-I}{t} = A$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{S(t)-I}{t} = A$

Par conséquent : $\lim\limits_{t\to 0}\left\|\frac{T(t)-I}{t} - \frac{S(t)-I}{t}\right\| = \lim\limits_{t\to 0}\left\|\frac{T(t)-S(t)}{t}\right\| = 0$

Montrons que pour tout $a > 0$, $T(t) = S(t)$ pour $t \in [0,a]$.

Soit $a > 0$ fixé. Comme $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sont des semi groupes uniformément continus, alors les applications $t \mapsto \|T(t)\|$ et $t \mapsto \|S(t)\|$ sont continues. Il existe alors une constante $C_a > 0$ telle que $\sup\limits_{t\in[0,a]}(\|T(t)\|, \|S(t)\|) \leq C_a$

Pour $h > 0$, on a $\left\|\frac{T(h)-S(h)}{h}\right\| = \left\|\frac{T(h)-I}{h} - A - (\frac{S(h)-I}{h} - A)\right\|$

Soit $\varepsilon > 0$. ce qui implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $0 < h \leq \delta$, on ait

$$\left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2aC_a} \text{ et } \left\|\frac{S(h)-I}{h} - A\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2aC_a}.$$

Ce qui entraîne alors que pour $0 < h \leq \delta$, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(h)-S(h)}{h}\right\| &\leq \left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| + \left\|\frac{S(h)-I}{h} - A\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{aC_a}\end{aligned}$$

Soit $t \in [0,a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{t}{n} < \delta$. alors :

$$\begin{aligned}
\|T(h)-S(h)\| &= \|\sum_{k=0}^{n-1}\left[T((n-k)\frac{h}{n})S(k\frac{h}{n})-T((n-k-1)\frac{h}{n})S((k+1)\frac{h}{n})\right]\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T((n-k)\frac{h}{n})S(k\frac{h}{n})-T((n-k-1)\frac{t}{n})S((k+1)\frac{t}{n})\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T((n-k-1)\frac{h}{n})T(\frac{h}{n})S(k\frac{h}{n})-T((n-k-1)\frac{h}{n})S(k\frac{h}{n})S(\frac{h}{n})\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T((n-k-1)\frac{h}{n})\right\|\left\|S(k\frac{h}{n})\right\|\left\|T(\frac{h}{n})-S(\frac{h}{n})\right\| \\
&\leq C_a\frac{h}{n}\frac{\varepsilon}{aC_a}\sum_{k=0}^{n-1}1=\varepsilon\frac{h}{a}\leq\varepsilon \qquad (\text{on a } h\in[0,a] \text{ alors } \frac{h}{a}\leq 1)
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon>0$ est arbitraire, alors $T(t)=S(t)$, $\forall t\in[0,a]$. Mais puisque $a>0$ est aussi arbitraire, il s'ensuit que $T(t)=S(t)$, $\forall t\geq 0$. □

Théorème 1.3. *:[6] un opérateur $A:X\to X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformement continue si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Preuve. $\Rightarrow$) Soit $A:X\to X$ le générateur infinitésimal d'un semi groupe uniformement continue $\{T(t)\}_{t\geq 0}\in B(X)$ alors $\lim\limits_{t\to 0}\|T(t)-I\|=0$.

L'application $t\in[0,+\infty)\to T(t)\in B(X)$ est continue, par suite $\int_0^t T(s)ds\in B(X)$, donc avec Lemme 1.1 on voit que :

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)ds=T(0)=I.$$

Il existe $\tau>0$ tel que $\left\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau T(t)dt-I\right\|<1$, donc avec le lemme 1.2

l'élément $\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau T(t)dt$ *est inversible alors il s'ensuit que* $\int\limits_0^\tau T(t)dt$ *est inversible, nous avons :*

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h}\int\limits_0^\tau T(t)dt &= \frac{1}{h}[(\int\limits_0^\tau T(t+h)-T(t))dt] \\ &= \frac{1}{h}\int\limits_\tau^{\tau+h} T(t)dt - \frac{1}{h}\int\limits_0^\tau T(t)dt \end{aligned}$$

Nous ontenons

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}\int\limits_0^\tau T(t)dt &= \lim_{h\to 0^+}[\frac{1}{h}\int\limits_\tau^{\tau+h} T(t)dt - \frac{1}{h}\int\limits_0^\tau T(t)dt] \\ &= T(\tau)-T(0) \\ &= T(\tau)-I \end{aligned}$$

D'où : $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h} = [T(\tau)-I][\int\limits_0^\tau T(t)dt]^{-1}$

Par conséquent, le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'opérateur : $A = [T(\tau)-I][\int\limits_0^\tau T(t)dt]^{-1} \in B(X)$ cet opérateur est borné.

$\Leftarrow$) cette implication est évidente coumpte tenu du lemme 1.4. $\square$

Corollaire 1.1. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformement continue et A son générateur infinitésimal, alors :

(1) Il existe $w \geq 0$ tel que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, $\forall t \geq 0$.

(2) L'application $t \to T(t) \in B(X)$, $\forall t \in [0, +\infty)$ est différentiable pour la topologie de la norme et $\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A$, $\forall t \geq 0$.

Preuve. **(1)** Nous avons $\|T(t)\| = \left\|e^{tA}\right\| \leq e^{t\|A\|}$

Pour $\omega \geq \|A\|$, On obtient que $\|T(t)\| \leq e^{t\omega}$, $\forall t \geq 0$

(2) On a : $A = A \times I = \lim\limits_{t\to 0}\frac{T(t)-I}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{T(t)-T(0)}{t} = \frac{d}{dt}T(0)$

Nous déduirons que l'application $t \mapsto T(t)$ est dérivable au point $t = 0$.

Soit $t > 0$ et $h > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t+h)-T(t)}{h} - AT(t)\right\| &\leq \left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| \|T(t)\| \\
&\leq \left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| e^{t\|A\|}
\end{aligned}$$

et comme $\frac{T(h)-I}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} A$ alors $\lim\limits_{h\to 0}\left\|\frac{T(t+h)-T(t)}{h} - AT(t)\right\| = 0$

Par conséquent, l'application $t \mapsto T(t)$ est dérivable à droite et on a $\frac{d^+T(t)}{dt} = AT(t)$.

Soit $t > 0$ et $h < 0$ tel que $t + h > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t+h)-T(t)}{h} - AT(t)\right\| &\leq \left\|\frac{I-T(-h)}{h} - AT(-h)\right\| \|T(t+h)\| \\
&\leq \left\|\frac{T(-h)-I}{-h} - AT(-h)\right\| \|T(t+h)\| \\
&\leq \left\|\frac{T(-h)-I}{-h} - AT(-h)\right\| e^{(t+h)\|A\|}
\end{aligned}$$

D'où il vient que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{T(t+h)-T(t)}{h} = AT(t)$.

Par conséquent, l'application $t \mapsto T(t)$ est dérivable à gauche et on a $\frac{d^-T(t)}{dt} = AT(t)$.

Donc cette application est dérivable sur $[0, +\infty)$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} T(t)A &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)-T(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)T(t)-T(t)}{h} \\ &= AT(t). \end{aligned}$$

alors $T(t)A = AT(t)$. $\square$

1.3 *Semi-groupe fortement continue ou C_0-semi groupe*

Définition 1.11. On appelle "C_0**-semi groupe"** ou **semi-groupe fortement continue** d'opérateurs linéaires bornés sur X, une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in B(X)$ vérifiant les propriétés suiventes :

1- $T(0) = I$.

2- $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall t,s \geq 0$.

3- $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x, \ \forall x \in X$.

Définition 1.12. On appelle **"générateur infinitésimal"** d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un opérateur A définie sur l'ensemble

$$\mathrm{D(A)}=\{x \in X, \lim_{t\to 0}\tfrac{T(t)x-x}{t} \text{ existe}\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0}\tfrac{T(t)x-x}{t}, \quad \forall x \in D(A)$$

Remarque 1.1. Puisque

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - I\| \, \|x\| \ \ pour \ \forall x \in X \ \ et \ t \geq 0$$

il en résulte que : les semi-groupes uniformement continues sont C_0-semi groupes. Mais, il existe des C_0-semi groupes qui ne sont pas uniformement continues.

Exemple 1.1. *Soit* $X = C[0, +\infty) = \{f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}; f$ *est uniformément continue et borné*$\}$

avec la norme $\|f\|_{C[0,+\infty)} = \sup\limits_{\alpha\in[0,+\infty)} |f(\alpha)|$.

On définie sur X *un opérateur linéaire par :*

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha), \forall t \geq 0 \text{ et } \alpha \in [0,+\infty)$$

1) *Montrons que* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi groupe :

(i) $(T(0)f)(\alpha) = f(\alpha), \ \forall \alpha \in [0,+\infty)$.

donc $T(0) = I$.

(ii) Soit $t,s \geq 0, \ \alpha \in [0,+\infty)$

$T((t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha)$..........(1)

et $(T(t)T(s)f)(\alpha) = T(t)f(s+\alpha) = f(t+s+\alpha) = (T(t+s)f)(\alpha)$......(2)

De (1) et (2), on trouve $(T(t+s)f)(\alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha), \forall \alpha \in [0,+\infty)$ $t,s \geq 0$.

(iii) Montrons que $\lim\limits_{t\to 0} T(t)f(\alpha) = f(\alpha), \quad \forall \alpha \in [0,+\infty)$.

$$\|T(t)f - f\|_{C[0,+\infty)} = \sup_{\alpha\in[0,+\infty)} |T(t)f(\alpha) - f(\alpha)| = \sup_{\alpha\in[0,+\infty)} |f(t+\alpha) - f(\alpha)|$$

comme f est uniformement continue, alors :

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)f - f\|_{C[0,+\infty)} = 0$$

D'où $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi groupe fortement continue.

2) Trouvons maintenent le générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$

Soit $A : D(A) \subseteq C[0,+\infty) \to C[0,+\infty)$ le générateur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$,soit $f \in D(A)$

$$Af(\alpha) = \lim_{t\to 0} \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t+\alpha) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha) \ \ \forall \alpha$$

$f' \in C[0,+\infty)$, donc $D(A) \subset \{f \in C[0,+\infty) \ / f' \in C[0,+\infty)\}$.

Inversement, soit $f \in C[0,+\infty)$ tel que $f' \in C[0,+\infty)$

$$\left\|\frac{T(t)f-f}{t}-f'\right\|_{C[0,+\infty)}=\sup_{\alpha\in[0,+\infty)}\left|\frac{f(t+\alpha)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right|$$

mais,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(t+\alpha)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right| &= \left|[\frac{1}{t}f(\tau)]_{\alpha}^{t+\alpha}-f'(\alpha)\right|\\ &= \left|\frac{1}{t}\int_{\alpha}^{t+\alpha}[f'(\tau)-f'(\alpha)]d\tau\right|\\ &\leq \frac{1}{t}\int_{\alpha}^{t+\alpha}\left|f'(\tau)-f'(\alpha)\right|d\tau\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t)f-f}{t}-f'\right\|_{C[0,+\infty)} &\leq \sup_{\alpha\in[0,+\infty)}\frac{1}{t}\int_{\alpha}^{t+\alpha}\left|f'(\tau)-f'(\alpha)\right|d\tau\\ &\leq \sup_{\alpha\in[0,+\infty)}\frac{1}{t}\int_{\alpha}^{t+\alpha}\sup_{\tau\in[0,+\infty)}\left|f'(\tau)-f'(\alpha)\right|d\tau\\ &\leq \frac{1}{t}\sup_{\alpha\in[0,+\infty)}\sup_{\tau\in[\alpha,t+\alpha]}\left|f'(\tau)-f'(\alpha)\right|\int_{\alpha}^{t+\alpha}d\tau \quad ,f'\in C[0,+\infty)\\ &\leq \sup_{\tau\in[\alpha,t+\alpha]}\left|f'(\tau)-f'(\alpha)\right|\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{T(t)f-f}{t}-f'\right\|_{C[0,+\infty)}\leq \lim_{t\to 0}\sup_{\tau\in[\alpha,t+\alpha]}\left|f'(\tau)-f'(\alpha)\right|$$

Alors

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{T(t)f-f}{t}-f'\right\|_{C[0,+\infty)}=0$$

Donc, $f'\in D(A)$, *D'où* $D(A)=\{f\in C[0,+\infty)/f'\in C[0,+\infty)\}$ et $Af(\alpha)=f'(\alpha),\ \forall\alpha\in[0,\infty),\ \forall f\in D(A).$

Théorème 1.4. *[6] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupes d'opérateurs linéaires bornés. Alors :*

(1) *Il existe $\tau > 0$ et $M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \in [0,\tau]$.*

(2) *Il existe $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que : $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ $\forall t > 0$.*

Preuve. (1) *Supposons que : pour* $\forall \tau \geq 0$ et $M \geq 1$, il existe $t \in [0,\tau]$ tel que $\|T(t)\| > M$.

En particulier pour $\tau = \frac{1}{n}$ et $M = n \in \mathbb{N}^*$ il existe $t_n \in [0,\frac{1}{n}]$, tel que $\|T(t_n)\| > n$, donc la suite $(\|T(t_n)\|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non bornée alors d'aprés le théorème de Banach Steinhaus 1.1 la suite $(\|T(t_n)x_n\|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est non bornée pour tout $x_n \in X$, donc il existe $x_0 \in X$ tel que $(\|T(t_n)x_0\|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit non bornée. Ce qui controdiut par la définition : on a $\lim\limits_{n\to 0} \|T(t_n)x_0\| = \|x_0\|$ (car $t_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$). Donc $\exists \tau > 0$ et $M \geq 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \in [0,\tau]$.

(2) Soit t quelconque tel que $t = n\tau + r$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau \geq 0$, $0 \leq r \leq \tau$ alors,

$$\begin{aligned}
\|T(t)\| &= \|T(n\tau + r)\| = \|T(n\tau)T(r)\| \\
&= \|T(n\tau)\| \, \|T(r)\| \\
&= \Big\|T(\underbrace{\tau + \tau + ... + \tau}_{n \text{ fois}})\Big\| \, \|T(r)\| \\
&= \|T(\tau)\|^n \, \|T(r)\| \\
&\leq M^n M \qquad , (\text{D'aprés } \mathbf{1}) \\
&\leq Me^{n \ln M} \\
&\leq Me^{\frac{t-r}{\tau} \ln M} \\
&\leq Me^{\frac{t}{\tau} \ln M} e^{\frac{-r}{\tau} \ln M} \qquad ,(e^{\frac{-r}{\tau} \ln M} \leq 1) \\
&\leq Me^{(\frac{1}{\tau} \ln M)t}
\end{aligned}$$

Donc, on prend $w = \frac{1}{\tau} \ln M$.

Corollaire 1.2. Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C$_0$-semi groupe, alors l'application $t \in [0, +\infty) \mapsto T(t)x \in X$ est continue sur $[0, +\infty)$, $\forall x \in X$.

Preuve. Soient $t_0 \in [0, +\infty)$ et $h > 0$

on a

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0)\| \, \|T(h)x - Ix\|$$

donc

$$\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \; Me^{\omega t_0} \, \|T(h)x - x\|$$

alors

$$\lim_{h\to 0} \|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| = 0.$$

Si $t_0 > h$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|T(t_0 - h)x - T(t_0)x\| &\leq \|T(t_0 - h)\| \, \|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{\omega(t_0 - h)} \, \|T(h)x - x\| \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{h\to 0} \|T(t_0 - h)x - T(t_0)x\| = 0$.
D'où la continuité de cette application est vérifiée. □

Remarque 1.2. Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C$_0$-semi groupe, alors avec le théorème précident 1.4, on voit qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$tel que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$,$\forall t \geq 0$. Si $w < 0$ alors nous obtenons $\|T(t)\| \leq Me^{wt} \leq M$, $\forall t \geq 0$. Par conséquent, on peut considérer que :

pour $w \geq 0$ on note $SG(M,w)$ l'ensemble des semi groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tels que : $\exists w \geq 0$ et $M \geq 1$ on a $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$,$\forall t \geq 0$.

Proposition 1.3. [6] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal, si $x \in D(A)$ alors $T(t)x \in D(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x$, $\forall t \geq 0$.

Preuve. Soit $x \in D(A)$, alors $\forall t \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t)\lim_{h\to 0}\frac{T(h)x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \\ &= AT(t)x. \end{aligned}$$

donc $T(t)x \in D(A)$ et on a : $T(t)Ax = AT(t)x$, $\forall t \geq 0$, $\forall x \in D(A)$. $\square$

Théorème 1.5. *[6] Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in SG(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors, l'application $t \in [0,+\infty) \mapsto T(t)x \in X$ est dérivable sur $[0,+\infty)$ pour tout $x \in D(A)$ et nous avons :*

(1) $\frac{dT(t)}{dt}x = T(t)Ax = AT(t)x.$

(2) $T(t)x - x = \int_0^t T(s)Axds$, $\forall t \geq 0$.

Preuve. **(1)** *Soient* $x \in D(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \left\|\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t)\|\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| \\ &\leq Me^{\omega t}\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| \end{aligned}$$

Par conséquent $\lim\limits_{h\to 0}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)Ax$, $\forall t \geq 0$. Donc $\frac{d^+T(t)}{dt}x = T(t)Ax$.

D'autre part, soit $t-h>0$, alors :

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}-T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-T(h)Ax\right\| \\
&\leq Me^{\omega(t-h)}\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax+Ax-T(h)Ax\right\| \\
&\leq Me^{\omega(t-h)}(\left\|\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right\|+\|T(h)Ax-Ax\|)
\end{aligned}$$

Par suite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}=T(t)Ax$, $\forall t\geq 0$. Donc $\frac{d^{-}T(t)}{dt}x=T(t)Ax$, $\forall t\geq 0$.

D'où $\frac{dT(t)}{dt}x=T(t)Ax=AT(t)x \quad \forall t\geq 0$.

(2) *Soit* $x\in D(A)$, alors nous avons :

$$\frac{dT(s)}{ds}x=T(s)Ax \quad \forall s\in[0,+\infty)$$

D'où

$$\int_0^t \frac{dT(s)}{ds}x=\int_0^t T(s)Axds$$

Donc

$$T(t)x-x=\int_0^t T(s)Axds \quad \forall t\geq 0. \qquad \square$$

Lemme 1.5. *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi groupe, alors :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds=T(t)x,\ \forall x\in X,\ t\geq 0.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left(T(s)x - T(t)x \right) ds \right\| \\
&\leq \sup_{s \in [t, t+h]} \| T(s)x - T(t)x \| \, \frac{1}{h} \int_t^{t+h} ds \\
&= \sup_{s \in [t, t+h]} \| T(s)x - T(t)x \|
\end{aligned}$$

Comme l'application $t \in [0, +\infty) \to T(t)x \in X$ est continue, on trouve le résultat. $\square$

1.4 *Théorème de Hille-Yosida*

Lemme 1.6. *[6] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe sur X de générateur infinitésimal A et soit V un opérateur linéaire borné sur X, i.e., $V \in B(X)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $T(t)V = VT(t)$, $\forall t \geq 0$.
2. $VD(A) \subseteq D(A)$ *et* $AVx = VAx$, $\forall x \in D(A)$.

1.4.1 *Théorème de Hille-Yosida pour les C_0-semi groupes de contractions*

Définition 1.13. *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe sur X.

1- $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit **"uniformément borné"** sur X s'il existe $M \geq 1$ telle que $\|T(t)\| \leq M$, $\forall t \geq 0$.

2- $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit un C_0-semi groupe de **"contraction"** si $\|T(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$.

Théorème 1.6 (Hille-Yosida). *[6] Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X si et seulement si :*

1- $\overline{D(A)} = X$ *et A est un opérateur fermé.*

2- $]0, +\infty[\subset \rho(A)$ *et pour tout $\lambda > 0$ on a* $\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

1.4.2 *Théorème de Hille-Yosida cas général*

Théorème 1.7. *[6] Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X vérifiant $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$,$\forall t \geq 0$, avec*

$\omega \geq 0, M \geq 1$, *si et seulement si :*

1- $\overline{D(A)} = X$ *et* A *est un opérateur fermé.*

2- *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re\lambda > \omega$, *on a* $\lambda \in \rho(A)$ *et*

$$\|R(\lambda,A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chapitre 2

Notions de base de stabilité des opérateurs et des semi-groupes

2.1 Stabilité des opérateurs

Définition 2.1 (Opérateur à puissance bornée). Un opérateur A dans un espace de Banach X est dit **"à puissance bornée"** si

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|A^n\| < \infty.$$

Proposition 2.1. [7] Si A est un opérateur à puissance bornée, alors on a :

$$r(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

et donc $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Preuve. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\right) \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad r(A)^n \leq \|A^n\| < \infty \qquad \text{(car } A \text{ est à puissance bornée).}$$

donc l'ensemble $\{r(A)^n \ /n \in \mathbb{N}^*\}$ est borné c'est à dire $\exists M > 0$:

$$r(A)^n \leq M \Rightarrow r(A) \leq M^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

alors $r(A) \leq 1$.

Maintenant, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tq : $|\lambda| > 1$. Posons $S = \frac{A}{\lambda}$ donc $\exists M > 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|S^n\| = \frac{\|A^n\|}{|\lambda|^k} \leq \frac{M}{|\lambda|^k}$$

Comme $|\lambda| > 1$ la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{M}{|\lambda|^k}$ est convergente donc la série de Neumann $\sum\limits_{k=0}^{\infty} S^n$ est convergente normalement. Ce qui implique que l'opérateur $I - S = I - \frac{A}{\lambda}$ est inversible alors $(\lambda I - A)$ est inversible d'où $\lambda \notin \sigma(A)$.

Donc, $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow |\lambda| \leq 1$. $\square$

Définition 2.2 (Stabilité exponentielle uniforme). Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$. A est dit **"uniformément exponentiellement stable"** s'il existe des constantes $M \geq 0$,$\varepsilon > 0$ tels que

$$\|A^n\| \leq Me^{-\varepsilon n}.$$

Proposition 2.2. [7] Soit X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $r(A) < 1$.

(ii) $\|A^n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(iii) A est uniformément exponentiellement stable.

Preuve. *(i)* $\Rightarrow$*(ii)* Supposons que $r(A) < 1$ donc $\exists R > 0$ tel que $r(A) < R < 1$, d'autre part on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A)$ alors

$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow -\varepsilon + r(A) < \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon + r(A)$ (définition de limite)

Comme $R > r(A)$ donc $\exists\varepsilon > 0$, $R = r(A) + \varepsilon$ et on obtient

$$\begin{aligned}\exists N &\in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq N \Rightarrow \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < R \\ &\Rightarrow \|A^n\| < R^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0 \text{ (car } R < 1).\end{aligned}$$

donc $\lim \|A^n\| = 0$.

(ii)$\Rightarrow$*(iii)* Si $\lim \|A^n\| = 0$, on a $\exists M_0 > 0$, $\|A^n\| \leq M_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On choisit $M > 0$, $M > M_0$ et $\varepsilon > 0$, tels que

$$\begin{aligned}\varepsilon n &< \ln \frac{M}{M_0} \Rightarrow e^{\varepsilon n} < \frac{M}{M_0} \\ &\Rightarrow M_0 < Me^{-\varepsilon n} \\ &\Rightarrow \|A^n\| \leq M_0 < Me^{-\varepsilon n}\end{aligned}$$

Donc A est uniformément exponentiellent stable.

(iii)$\Rightarrow$*(i)* Supposons que A est uniformément exponentiellent stable i.e $\|A^n\| \leq Me^{-\varepsilon n}$ alors $\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}}e^{-\varepsilon} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\varepsilon} < 1$.

Donc $r(A) = \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$. $\square$

Lemme 2.1. [7] *Soient X un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(X)$, alors :*

$$A^n = \frac{r^{n+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)}R(re^{i\varphi}, A)d\varphi = \frac{r^{n+2}}{2\pi((n+1)}\int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n+1)}R^2(re^{i\varphi}, A)d\varphi.$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r > r(A)$.

Définition 2.3 (Bornétude polynomiale). Un opérateur A borné dans un espace de Banach X est dit **"polynomialement borné"** si

$$\|A^n\| \leq p(n)$$

pour une certain polynome p et tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2.4 (Stabilité forte). Un opérateur A dans un espace de Banach X est dit **"fortement stable"** si $\|A^n x\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, pour tout $x \in X$.

Remarque 2.1. Tout opérateur fortement stable dans un espace de Banach X est à puissance bornée.

Lemme 2.2. *[7] Soient X un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur à puissance bornée et $x \in X$.*

(i) *S'il existe une sous suite $\{n_k\}_{k\geq 1}$ telle que $\|A^{n_k} x\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\|A^n x\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*

(ii) *Si A est de contraction, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \|A^n x\|$ existe.*

Preuve. *(i)* On prend $\varepsilon > 0$, $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A^n x\|$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $\|A^{n_k} x\| \leq \varepsilon$. Alors, on a :

$$\|A^n x\| \leq \|A^{n-n_k} x\| \|A^{n_k} x\| \leq M\varepsilon \text{ avec } n \leq n_k$$

Donc $\|A^n x\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) Comme A est de contraction (i.e $\|A\| \leq 1$) alors la suite $\{\|A^n x\|\}_{n\geq 1}$ est décoissente car on a(par récurrence) :

Pour $n = 1$:

$$\|A^2 x\| \leq \|A\| \|Ax\| \leq \|Ax\| \text{ pour } \forall x \in X.$$

Pour n quelconque dans $\mathbb{N}$:

$$\|A^{n+1}x\| \leq \|A\|\|A^n x\| \leq \|A^n x\| \text{ pour } \forall x \in X.$$

Donc pour $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|A^{n+1}x\| \leq \|A^n x\|$ qui implique que la suite $\{\|A^n x\|\}_{n\geq 1}$ est décoissente.

D'autre part, on a A est borné (A est à puissance bornée) alors la suite $\{\|A^n x\|\}_{n\geq 1}$ est convergente, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A^n x\|$ existe. $\square$

2.2 *Stabilité des C_0-semi groupes*

Définition 2.5 (C_0-semi groupes bornés). Un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach X est dit **"borné"** si $\sup\limits_{t\geq 0}\|T(t)\| < \infty$.

Définition 2.6. [1] On appelle **la borne de croissance** du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, qui est notée par $\omega_0(T)$, la valeur :

$$\omega_0(T) = inf\{\omega \in \mathbb{R} \text{ il existe } M_\omega \geq 1 \text{ tel que } \|T(t)\| \geq M_\omega e^{\omega t}\ \forall t \geq 0\}$$

Remarque 2.2. [7] Chaque C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ satisfie $\omega_0(T) \leq 0$ et donc $\sigma(A) \subset \{z : Re(z) \leq 0\}$. Mais la condition $\sigma(A) \subset \{z : Re(z) \leq 0\}$ n'implique pas la bornétude de semi-groupe.

Définition 2.7. Un semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach X est dit **"polynomiellement borné"** si $\|T(t)\| \leq p(t)$, $t \geq 0$ et pour certain polynome p.

Définition 2.8. [2] Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est **"stable"** si

$$\lim_{t\to+\infty} T(t)x = 0 \ , \forall x \in X.$$

Définition 2.9. Le semi groupe fortement continue $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit **"uniformément exponentiellement stable"** s'il existe deux constantes

$\alpha > 0$ et $M \geq 1$ telles que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \forall t \geq 0.$$

Ou, équivalement, si $\omega_0(T) < 0$.

Théorème 2.1. *[7] Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe dans un espace de Banach X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est uniformément exponentiellement stable,*

i.e. $\omega_0(T) < 0$.

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$.

(iii) $\|T(t_0)\| < 1$ *pour certain* $t_0 > 0$.

(iv) $r(T(t_0)) < 1$ *pour certain* $t_0 > 0$.

Théorème 2.2 (Gearhart 1978). *[7] Soit A le générateur infinitésimal de C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Hilbert H. Alors $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformement exponentiellement stable si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\|R(\lambda,A)\| < M \quad \text{pour tout } \lambda \text{ avec } Re(\lambda) > 0.$$

Définition 2.10 (Stabilité forte). Un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans un espace de Banach X est dit **"fortement stable"** si $\|T(t)x\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $x \in X$.

Remarque 2.3. Chaque C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ fortement stable est borné, et donc $\sigma(A) \subset \{z : Re z \leq 0\}$ avec A est le générareur infinitésimal de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Lemme 2.3. *[7] Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe borné dans un espase de Banach X et $x \in X$.*

(a) *S'il existe une suite non bornée $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ telle que*

$\|T(t_n)x\| \to 0$, *alors* $\|T(t)x\| \to 0$.

(b) *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est de contraction, alors $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \|T(t)x\|$ existe.*

Chapitre 3

Applications

On va étudier le probléme abstrait de Cauchy.

3.1 *Probléme homogéne de Cauchy à valeur initiale*

D'abord, on commence par l'étude du probléme homogène abstrait de la forme :

$$(PHC) \begin{cases} u'(t) = Au(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

où t est la variable temps, u est une fonction à valeurs dans l'espace de Banach X, avec $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire et $x \in X$ est la valeur initiale.

Définition 3.1. Le probléme à valeur initiale (PHC) est dit **probléme homogène abstrait de Cauchy** associé à $(A,D(A))$ et de valeur initiale $x \in X$.

Une fonction $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ est dite **"solution classique"** du probléme (PHC), si u est continue pour $t \geq 0$, continuement différentiable et $u(t) \in$

$D(A)$ pour $t > 0$ et u vérifie (PHC).

Remarquons que commme $u(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et u est continue en $t = 0$, (PHC) ne peut pas avoir une solution pour $x \notin D(A)$.

Théorème 3.1. *[6] Soit $(A,D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Alors pour tout $x \in D(A)$, la fonction $u : t \mapsto u(t) := T(t)x$ est l'unique solution classique du pronléme (PHC) à valeur initiale x.*

Preuve. Soit $x \in D(A)$, alors il vient du premier résultat de théorème 1.5 $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$ que $u(t) = T(t)x$ est une solution classique de (PHC).

Soit v une autre solution classique de (PHC). Soit $t > 0$, alors pour tout $s \in [0,t]$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(T(t-s)v(s)\right) &= -AT(t-s)v(s) + T(t-s)v'(s) \\ &= -T(t-s)Av(s) + T(t-s)Av(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui entraine que pour $x \in D(A)$, la fonction $s \mapsto T(t-s)v(s)$ est constante et en particulier ses valeurs aux points $s = t$ et $s = 0$ sont éguax, d'où $v(t) = T(t)x$, $\forall t \geq 0$. □

Définition 3.2. Une fonction continue $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ est dite solution **"mild"** ou **"faible"** du probléme (PHC) de valeur initiale x, si pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t u(s)ds \in D(A) \quad \text{et} \quad u(t) = x + A\left(\int_0^t u(s)ds\right).$$

Le mot "mild" est un mot anglais que l'on pourrait traduire par "allégée" (et non "douce", car ce dernier a un autre sens mathématique), mais qu'on laisse en anglais dans le texte en général.

Théorème 3.2. *[6] Soit $(A,D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $T(t)_{t\geq 0}$ sur X. Alors pour tout $x \in X$, la fonction*

$u : t \mapsto u(t) := T(t)x$ est l'unique solution faible du probléme (PHC) de valeur initiale x.

Preuve. Soit $x \in D(A)$, alors il vient de la deuxiéme résultat de théorème 1.5 $T(t)x - x = A\int_0^t T(s)xds$ que $u(t) = T(t)x$ est une solution faible du probléme (PHC). Soit v une autre solution faible du probléme (PHC).

Soit $t > 0$, alors pour tout $s \in [0,t]$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(T(t-s)\int_0^s (u(r)-v(r))\,dr\right) &= -T(t-s)A\int_0^s (u(r)-v(r))\,dr + T(t-s)(u(s)-v(s)) \\
&= -T(t-s)\left[A\int_0^s u(r)ds - A\int_0^s v(r)dr\right] + T(t-s)(u(s)-v(s)) \\
&= -T(t-s)\left[u(s)-x-v(s)+x\right] + T(t-s)(u(s)-v(s)) \\
&= -T(t-s)(u(s)-v(s)) + T(t-s)(u(s)-v(s)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in X$, la fonction $s \mapsto T(t-s)\int_0^s(u(r)-v(r))dr$ est constante, et en particulier ses valeurs aux points $s = t$ et $s = 0$ sont égaux. D'où $\int_0^s(u(r)-v(r))dr = 0$ ce qui implique $\int_0^s u(r)dr = \int_0^s v(r)dr$.

Par suite $u(t) = x + A\int_0^s u(r)dr = x + \int_0^s v(r)dr = v(t)\ \forall t \geq 0$. $\square$

Lemme 3.1. *[6] Soit u une solution de (PHC) avec A un opérateur fermé. Alors :*

$$\int_0^t u(s)ds \in D(A) \quad et \quad A\left(\int_0^t u(s)ds\right) = \int_0^t Au(s)ds$$

Preuve. Puisque $Au(t) = u'(t)$, alors $t \mapsto Au(t)$ est continue. De plus on a

$$\begin{aligned}\int_0^t Au(s)ds &= \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} Au\left(\frac{kt}{n}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} A\left(\frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(\frac{kt}{n}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} AS_n\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\int_0^t u(s)ds = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u\left(\frac{kt}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Donc

$$S_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t u(s)ds \quad \text{et} \quad AS_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \int_0^t Au(s)ds$$

Puisque A est fermé, alors $\int_0^t u(s)ds \in D(A)$ et $A(\int_0^t u(s)ds) = \int_0^t Au(s)ds.$ $\square$

Théorème 3.3. *[6] Soit A un opérateur linéaire à domaine $D(A)$ dense dans X tel que $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors le probléme à valeur initiale (PHC) admet une solution unique, qui est continûment différentiable sur $[0, +\infty[$, pour tout donnée initiale $x \in D(A)$ si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.*

Exemple 3.1. Considérons l'équation suivant qui décrit les phénomènes du transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = 0 \ , \ t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = f(x) \end{cases}$$

On cherche les solutions dans l'espace de Banach $X = L^2(\mathbb{R})$.

Ecrivons cette problème sous la forme d'un (PHC) en posant $u(t) = v(.,t)$

$$(PHC) \begin{cases} u'(t) = Au(t) \ , \ t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R} \\ u(0) = f \end{cases}$$

Avec $A = \frac{-d}{dx}$ de domaine $D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R})/u' \in L^2(\mathbb{R})\}$.

Comme A est le générateur infinitésimal du C_0-semi groupe définie sur X (aprés le théorème de Hille-Yosida 1.7) par :

$$(T(t)g)(x) = g(x-t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

Alors, il vient du théorème 3.3 que pour tout $f \in D(A) = H^1(\mathbb{R})$ la fonction définit par : $u(t) = T(t)f$ est l'unique solution de (PHC). Donc, $v(x,t) = (T(t)f)x = f(x-t)$ pour tout $f \in D(A)$.

3.2 Probléme non homogéne de Cauchy à valeur initiale

Maintenent, on étudie le problème non homogéne de Cauchy à valeur initiale suivant :

$$(PNHC)\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t)\ ,\ t > 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Où $f : [0,T[\longrightarrow X$ est une fonction. On suppose dans cette section que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, par conséquent l'équation homogéne associée pour $f \equiv 0$ admet une solution unique pour tout $x \in D(A)$.

Définition 3.3. Une fonction $u : [0,T[\longrightarrow X$ est dite solution classique du probléme $(PNHC)$ sur $[0,T[$ si :

(i) u est continue sur $[0,T[$.

(ii) u est continument différentiable sur $]0,T[$.

(iii) $u(t) \in D(A)$ pour tout $0 \leq t < T$ et u vérifie $(PNHC)$.

Proposition 3.1. [6] *Si* $f \in L^1(0,T;X)$, alors pour tout $x \in X$ le probléme à valeur initiale $(PNHC)$ admet au plus une solution.

Dans le cas où la solution existe, elle est donnée par :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Preuve. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi groupe de générateur infinitésimal A et soit u une solution de $(PNHC)$. Alors la fonction $s \mapsto g(s) := T(t-s)u(s)$

est différentiable pour $0 < s < t$ et

$$\begin{aligned}\frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s)\\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s)\\ &= T(t-s)f(s).\end{aligned}$$

Or $f \in L^1(0,T;X)$ donc $s \mapsto T(t-s)f(s)$ est intégrable et en intégrant $\frac{dg}{ds}$ entre 0 et t on obtient :

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \qquad \square$$

Définition 3.4. Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et soit $x \in X$ et $f \in L^1(0,T;X)$. La fonction $u \in \mathcal{C}([0,T],X)$ donnée par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, 0 \leq t \leq T,$$

est appellée la solution **"mild"** du problème à valeur initiale $(PNHC)$ sur $[0,T]$.

Remarque 3.1. En général, la continuité de f n'est pas suffisante pour assurer l'existance des solutions de $(PNHC)$ pour $x \in D(A)$.

Exemple 3.2. Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0- semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et soit $x \in X$ tel que $T(t)x \notin D(A)$ pour tout $t \geq 0$. On considére la fonction f définie par $f(s) = T(t)s$, $0 \leq s < T$. Alors f est continue pour $s \geq 0$.

Considérons le problème à valeur initiale :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + T(t)x \ , \ t > 0 \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Ce problème n'admet pas de solution malgré que $u(0) = 0 \in D(A)$. En effet, la solution "mild" de problème est :

$$u(t) = T(t)0 + \int_0^t T(t-s)T(s)x ds = tT(t)x$$

Or $t \mapsto tT(t)x$ n'est pas différentiable pour $t > 0$, et donc ne peut pas être une solution de ce problème.

Lemme 3.2. *[6] Soit $g : [a,b[\to X$ une fonction continue addmettant une dérivée à droite g'_d continue sur $[a,b[$. Alors, g est continûment différentiable sur $[a,b[$.*

Théorème 3.4. *[6] Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, $f \in L^1(0,T;X)$ continue sur $]0,T]$ et soit v la fonction définit par :*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, 0 \leq t \leq T.$$

Le problème à valeur initiale $(PNHC)$ admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) *v est continûment différentaible sur $]0,T[$.*

(ii) *$v(t) \in D(A)$ pour $0 < t < T$ et la fonction $t \mapsto Av(t)$ est continue sur $]0,T[$.*

Réciproquement, si $(PNHC)$ admet une solution u sur $[0,T[$ pour un certain $x \in D(A)$, alors v vérifie les conditions (i) et (ii).

Corollaire 3.1. [6] Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si f est continûment différentiable sur $[0,T]$, alors le problème à valeur initiale $(PNHC)$ admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in D(A)$.

Corollaire 3.2. [6] Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Soit $f \in L^1(0,T;X)$ une fonction continue sur $]0,T[$. Si $f(s) \in D(A)$ pour $0 < s < T$ et $s \mapsto Af(s) \in L^1(0,T;X)$, alors pour tout $x \in D(A)$ le problème à valeur initiale $(PNHC)$ admet une solution sur $[0,T[$.

3.3 *Stabilité au sens de Liapounov*

Soit l'équation :

$$\dot{x} = Ax,\ x \in U \subset \mathbb{R}^n \text{ et } A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Définition 3.5 (Stabilité). La position d'équilibre $x = 0$ de (3.1) est dit **stable** (ou stable au sens de Liapounov) si

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$ tel que $\|x_0\| < \delta$, la solution x de l'équation (3.1) qui vérifie la condition initiale $x(0) = x_0 : \|x(t)\| < \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0$.

Définition 3.6 (Stabilité asymptotique). On dit que la position d'équilibre $x = 0$ de (3.1) est **asymptotiquement stable** si elle est stable (au sens de Liapounov) et si

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

pour tout solution x vérifiant $x(0) = x_0$.

Théorème 3.5 (de Liapounov). *[3] Si toutes les valeurs propres $\lambda \in \sigma(A)$ de l'opérateur A sont situées sur le demi-plan gauche, c'est à dire $Re\lambda < 0$. La position d'équilibre $x = 0$ de l'équation (3.1) est asymptotiquement stable.*

La stabilité de système est vraiment la stabilité des solutions, et on a la solution de (PHC) est le C_0-semi groupe qui génére par l'opérateur A (voir le théorème 3.1).

On sait que un C_0-semi groupe est un semi-groupe uniformement continu, et aussi l'opérateur A est le générateur infinitésimal de l'unique semi-groupe uniformement continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tel que $\{T(t)\} = e^{At}$ (voir lemme 1.4).

Exemple 3.3. Consédirons le système :

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) = -4y(t) + z(t) \\ z'(t) = -3z(t) \end{cases}$$

Nous allons étudier la stabilité de ce système (l'équilibre est 0) de deux façons. En utilisant le théorème de Liaponov, puis en utilisant la définition de stabilité.

D'abord, en posant $x_1 = y$, $x_2 = y'$ et $x_3 = \alpha z$ et en écrivant notre système sous la forme

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -4x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_3' = -3x_3 \end{cases}$$

Le système peut être écrit sous la forme

$$X' = AX$$

Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\star$ 1^{iere} **méthode (par théorème de Liapounov) :**

On comence par le calcule des valeurs propres de A.

On sait que les valeurs propres de A sont les solutions de $det(A-\lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$-\lambda((-4-\lambda)(-3-\lambda)) + 4(-3-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow$

$$(-3-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+4)=0$$

On remarque que les racines de cette dernière équation sont $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -2$ qui sont strictement négatifs.

D'où, aprés le théorème de Liapounov 3.5 on conclus que notre système est asymptotiquement stable.

$\star$ 2^{ieme} **méthode (par la définition) :**

Comme la matrice A est un opérateur linéaire borné alors elle est le générateur infinitésimal de semi-groupe uniformement continu

$\{T(t)\}_{t\geq 0} = e^{tA}$ (aprés le lemme 1.4). Aussi, on sait que la solution classique unique de notre problème est le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

La remarque 2.2 nous donne que $\omega_0(T) \leq 0$ ce qui équivalent que $\lim\limits_{t\to\infty} \|T(t)\| = 0$ (voir théorème 2.1). Donc, $\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = 0$, ce qui implique la stabilité asymptotique de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ c'est à dire notre système est asymptotiquement stable.

Conclusion

Ce travail est une étude sommaire des semi-groupes et ses notions de stabilité et la relation qui relie entre la stabilité des semi-groupes et les systèmes différentiels $i.e$ les équations différentielles.

Comme application, on a donné un exemple simple dans le cas linéaire des $EDOs$ pour illustrer l'applications des définitions et théorèmes de stabilités des semi-groupes.

Jusque aujourd'hui, les rechèrches sont encore dans les cas plus générales des $EDPs$.

Bibliographie

[1] C. Abdennasser. Fonction de lyapunov et stabilité globale pour un modéle de kermack-mckendrick avec l'àge d'infection. Master's thesis, UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAID, 2011-2012.

[2] W. Arendt and C. J. Batty. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 306(2) :837–852, 1988.

[3] V. Arnold. Equations différentielles ordinaires, mir. 1974.

[4] H. Brezis, P. G. Ciarlet, and J. L. Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.

[5] R. Chill and Y. Tomilov. Stability of operator semigroups : ideas and results. *Banach Center Publications*, 75 :71, 2007.

[6] S.-E. CHORFI. Théorie des semi-groupes : problème abstrait de cauchy et équations d'évolution. Master's thesis, Université Cadi Ayyad, 2017.

[7] T. EISNER. *Stability of operators and C_0-semi groups.* PhD thesis, Univercity Eberhard–Karls, 2007.

[8] H. Queffélec, J. Charles, and M. Mbekhta. *Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : Rappels de cours et exercices corrigés*. Dunod, 2010.

Abstract

In this memoir, we study the semi-groups and some notions of its stability, moreover, we study the relation ship that is related between the semi-groups and its stability. Finally, we apply these notions of stability by giving a simple example in the linear case of $EDOs$.

Key words: Semi-group, C_0-semigroup, generator infinitesimal, stability, stability asymptotic, Liaponouv.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions les semi-groupes et quelques notions de sa stabilité, de plus, nous étutions la relation qui est reliée entre les semi-groupes et sa stabilité. Finalement, nous appliquons ces notions de stabilité par donner un exemple simple dans le cas linéaires des $EDOs$.

Mots clés : Semi-groupe, C_0-semi groupe, générateur infinitésimal, stabilité, stabilité asymptotique, Liaponouv.