Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ahmed Draia Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

BEN CHOUA Aziza

Thème

Distributions de type D'_{L^p}

Soutenu le 18/10/2020 devant le jury composé de

Mr.Ahmed KEDDI	MCB	Université d'Adrar	Président
Mr.Said BOUAZIZ	MAA	Université d'Adrar	Examinateur
Mr. Mohammed Taha KHALLADI	MCA	Université d'Adrar	Rapporteur

Promotion : 2019/2020

Dédicaces

Je dédie ce travail à :

L'âme de mon père,

Ma mère, ma premiére école, symbole de sécurité, d'espoir et générosité,

Mes frères et soeurs,

La femme de mon frère et à ses enfants surtout Anwar Al-Firdaws,

Mon fiancé,

Mes familles BEN CHOUA et BIGA,

Mes amis.

AZIZA

Remerciements

Je remercie ‹Allah› qui ma donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Je tiens à remercier le professeur Mr.Khalladi Mohammed Taha pour sa supervision de la note de service et pour ses directives et conseils pendant sa préparation. Ce fut la bénédiction du professeur et la meilleure aide pour sa réussite académique, même pendant sa carrière universitaire. Que Dieu le récompence de toutes les meilleurs, donc les plus hautes expressions d'appréciatio et de respect.

Je voudrais remercier les professeurs Mr.Ahmed KEDDI et Mr.Said BOUAZIZ qui ont eu la peine de corriger et tous mes professeurs au cours de ma carrière universitaire, qui ont eu le mérite de ce que j'ai atteint aujourd'hui.

Je tiens à remercier ma famille. Merci pour votre don.

Table des matières

INTRODUCTION **IV**

1 Préliménaire **2**

1.1 Quelques notions topologiques 2

1.2 Rappel de quelques espaces fonctionnels 5

1.2.1 L'espace de Lebesgue L^p 5

1.2.2 L'espace de distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ 12

1.2.3 L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ 15

2 Les espaces de fonctions $\mathcal{D}_{L^p}$ **20**

2.1 Définitions et propriétés élémentaires 20

2.2 Multiplication et Convolution dans $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ 27

3 Les espaces de distributions $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ **30**

3.1 Définitions et propriétés élémentaires 30

3.2 Multiplication et convolution dans $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ 34

4 Applications aux équations de convolution **39**

REFERENCES **47**

INTRODUCTION

La théorie des distributions fut construite par le mathématicien L. Schwartz entre 1944 et 1950 et lui valut la médaille Fields en 1950. Comme la plupart de grandes découvertes scientifiques, la théorie de distributions est construite sur des bases provenant de travaux effectués par de nombreux chercheurs : Heaviside en 1893, Wiener en 1925, Dirac en 1926-27, Hadamard en 1932, Bochner en 1932, Leray en 1934, Sobolev en 1936, Carleman en 1944, etc. L'objectif à été de généraliser la notion de fonction, afin de donner un sens mathématiques correct à des objects manipulés par les physiciens et les ingénieurs.

La théorie des distributions est importante aussi bien en mathématiques que dans plusieurs disciplines scientifiques. Elle s'est révélée être une nécessité pour le progrès de plusieurs théories en physique et en ingénierie où beaucoup de problèmes discontinus conduisent naturellement, entre autres, à des équations différentielles dont les solutions sont des distributions plutôt que des fonctions ordinaires. La théorie assure un certain nombre d'opérations indispensables auxquelles les fonctions ne se prêtent pas toujours et a apporté les outils mathématiques dont les physiciens et les ingénieurs avaient tant besoin.

Par ailleurs un autre point important qu'apporte la théorie des distributions sur celle des fonctions provient de ce que les distributions sont dérivables autant de fois que l'on veut, ce qui n'est évidemment pas le cas des fonctions. Au sens des distributions, la dérivabilité s'étend même à des fonctions discontinues, qui sont indéfiniment dérivables. L'approche utilisée par L. Schwartz est basée sur la dualité dans les espaces topologiques. Il s'agit là d'un concept abstrait, profond et apparemment sans relation avec la physique. Une telle théorie nécessite donc un bagage mathématique assez paussé en analyse fonctionnelle, notamment sur la notion de convergente forte qui détermine une topologie adéquate dans des espaces de fonctions régulières ou de convergence faible dans les espaces duaux de distributions. Les L^p-distributions sont introduites pour la première fois par L. Schwartz dans [15], et développées par d'autre autours, voir [1], [2], [3] [11], [12] et [13]. Ces neveaux espaces de distributions sont analogues aux espaces classiques de

Lebesgue L^p . Ces espaces ont des applications théoriques et pratiques nombreuses.

Dans ce mémoire, on va étudie ce type des distributions, et quelques unes de leurs applications. Ce travail est composé d'une introduction et de quatre chapitres.

Le premier chapitre contient un rappel de quelques notions et résultats topologiques et un autre rappel de quelques espaces fonctionnels tels que l'espace de Lebesgue, l'espace des distributions et l'espace de Sobolev.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des espaces de base $\mathcal{D}_{L^p}$, $1 \leq p < \infty$, c'est l'espace vectoriel constitué de toutes les fonctions φ indéfiniment dérivables sur Ω, tel que $\partial^\alpha \varphi \in L^p$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Nous étudions la définition et les propriétés fondamentales de l'espace $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$. Quelques propriétés algébriques et topologiques sont étudiées ainsi que le lien entre $\mathcal{D}_{L^p}$ et l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

Le troisième chapitre consiste en l'étude de l'espace des distributions $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, i.e., le dual topologique de l'espace $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. La définition, les propriétés élémentaires ainsi que la caractérisation de cet espace des distributions $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, sont données.

Dans le dernier chapitre on s'intérèse à l'équation de convolution

$$A * X = B,$$

où A est une distribution donnée de l'algèbre de convolution $\mathcal{D}'_{L^1+}$, B est une distribution bornée et l'inconnue est la distribution X.

À la fin de ce mémoire on donne une conclusion générale.

Notations

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réeles.

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réeles positifs.

$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

$L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables et $p-$intégrables au sens de Lebesgue sur Ω, $p \in [1, +\infty]$.

$\omega \Subset \Omega$ signifie que $\overline{\omega}$ est un compact de Ω.

E est un espace vectoriel topologique.

$\sigma\left(E, E'\right)$ est la topologie faible sur E.

$\sigma\left(E', E\right)$ est la topologie $*$-faible sur E'.

$\mathcal{C}(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω.

$\mathcal{C}_b(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues bornées sur Ω.

$\mathcal{C}_c(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact.

$\mathcal{C}_0$ est l'espace des fonctions continues sur Ω tendant vers 0 à l'infini.

$\mathcal{C}^\infty$ est l'espace des fonctions indéfiniment continûment différentiables sur Ω.

$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions test sur Ω.

$\mathcal{D}_K(\Omega)$ est l'espace des fonctions test à support inclu dans le compact K de Ω.

$\mathcal{D}_K^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions m fois continument différentiables à support inclu dans le compact K de Ω.

$\mathcal{S}(\Omega)$ est l'espace des fonctions à décroissance rapides sur Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions Ω.

$\mathcal{E}'(\Omega)$ est l'espace des distributions à support compact sur Ω.

$W^{m,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev, $m \in \mathbb{Z}_+, p \in [1, +\infty]$..

$\langle ., . \rangle$ est le crochet de dualité.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ est un multi-indices.

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, est la longueur de α.

$|\alpha|_\infty := \max\limits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$.

$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ est la dérivée mixte.

$\Delta := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est le laplacien.

Chapitre 1

Préliménaire

Ce chapitre est composé de deux sections, dans la première on donne un petit rappel sur la topologique et dans la deuxième nous rappellons quelques notions de base et résultats fondamentales sur l'espace de Lebesgue, l'espace des distribution et l'espace de Sobolev. Pour les preuves et plus de détails voir [4], [5], [6], [7], [8], [10] et [16]

1.1 Quelques notions topologiques

Définition 1 *Soit E un espace vectoriel, l'application $\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite norme si elle vérifie les assertions suivantes :*

1. $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0, x \in E$,

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \, , \forall x \in E, \forall \ \lambda \in \mathbb{k}$ *et*

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, , \forall x, y \in E$.

Le couple $(E, \|.\|)$ *est appelé espace normé*

Définition 2 *Une suite* $(u_n)_n$ *de* E *est dite suite de Cauchy si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n > 0, \ \forall p, q > n, \ \ \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Définition 3 *L'espace normé* $(E, \|.\|)$ *est complet si toute suite de Cauchy de* E *est*

convergente dans E.

Définition 4 *On appel espase de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

Définition 5 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et soit $A \subset X$.*

1. A est dite équilibrée si : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda A \subset A$.

2. A est dite absorbante si :$\forall x \in X$, $\exists r > 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq r \Rightarrow \lambda x \in A$.

Définition 6 *Un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si :*

$$\forall x, y \in U,\ \forall t \in [0,1] \text{ on a } \ tx + (1-t)y \in U.$$

Définition 7 *On dit qu'un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé E est faiblement compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite faiblement converge vers un élément de A.*

Définition 8 *On dit qu'un sous-ensemble A d'un espace vectoriel normé E est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de A.*

Définition 9 *Soit E un espace topologique et $x \in E$. On dit qu'une partie V de E est un voisinage de x dans E, s'il existe un ouvert O de E, vérifiant $x \in O \subseteq V$. On note par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x.*

Définition 10 *Un espace vectoriel topologique E est dit séparé si pour tous $x, y \in E$ il existe $V_x \subset E$ un voisinage de x et $V_y \subset E$ un voisinage de y tel que $V_x \cap V_{y.} = \varnothing$.*

Définition 11 *On dit qu'une partie A d'un espace topologique séparé E est relativement compacte, si elle est contenue dans une partie compacte de E.*

Définition 12 *Dans un espace topologique (E, τ), on appelle système fondamental de voisinages (ou base de voisinage) d'un point x toute partie $\rho(x) \subseteq \mathcal{V}(x)$ de voisinages de x tel que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \rho(x)$ tel que $W \subset V$.*

Définition 13 *Un espace vectoriel topologique réel ou complexe E est dit localement convexe si le vecteur nul admet un système fondamental de voisinages convexes.*

Définition 14 *On appele espace de Fréchet tout espace vectoriel topologique localement convexe qui est métrisable et complet par rapport à cette métrique.*

Définition 15 *Une partie T d'un espace vectoriel topologique E est dit tonneau s'il est convexe, équilibrée, fermée et absorbante.*

Définition 16 *On dit qu'un espace vetoriel topologique E est tonnelé s'il est séparé, localement convexe, et si tout tonneau T de E est un voisinage de* 0.

Définition 17 *Un espace vetoriel topologique E est dit de Montel s'il est tonnelé et si toute partie bornée de E est relativement compacte.*

Soit E un espace de Banach, on désigne par $E^{'}$ son dual et par E'' le bidual de E, i.e. le dual de E'.

Définition 18 *On dit qu'un espace topologique localement convexe E est semi-réflexif, si $J(E) = E^{''}$, où J est l'injection canonique de E dans E''.*

Théorème 19 *(Mackey-Arens) Un espace vectoriel topologique, localement convexe, où les ensembles bornés sont relativement faibelement compact, est semi-réflexif.*

Théorème 20 *Tout espace vectoriel topologique semi réflexif et tonnelé est réflexif.*

Définition 21 *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } x, y \in E,\ \ \|x\| \leq 1,\ \ \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left(\left\| \frac{x-y}{2} \right\| < 1 - \delta \right)$$

Théorème 22 *(de Milman-Pettis) Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Définition 23 *On dit qu'un espace vectoriel est séparable si et seulement s'il contient une partie dénombrable et dense.*

1.2 Rappel de quelques espaces fonctionnels

1.2.1 L'espace de Lebesgue L^p

Définition 24 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous ensemble mesurable. Si la mesure de A est nulle, i.e. $\mu(A) = 0$, on dit que A est négligeable pour la mesure μ.*

Définition 25 *On dit qu'une propriété est vraie presque partout sur Ω (ou p.p.), si l'ensemble des éléments de Ω qui ne vérifient pas cette propriété est négligeable.*

Définition 26 *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite mesurable si l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 27 *On définit l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\Omega)$ par*

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \{f \text{ mesurables sur } \Omega, \int_\Omega |f| < +\infty\}.$$

Définition 28 *L'espace vectoriel $L^1(\Omega)$ est défini par le quotient de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout dans Ω", i.e.*

$$L^1(\Omega) := \frac{\mathcal{L}^1(\Omega)}{\mathcal{R}},$$

où $\mathcal{R}$ est définie par

$$f\mathcal{R}g \iff f = g \text{ p.p.}$$

Autrement dit,

$$L^1(\Omega) = \{f \text{ définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligeable près, telle que} \int_\Omega |f(x)|dx < +\infty\}.$$

Définition 29 *Soit $p \in [1, +\infty[$. L'espace de Lebesgue est noté et défini par*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \quad \textit{mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Pour $f \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$, on note

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 30 *On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est essentiellement bornée, s'il existe un réel $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ p.p. sur Ω.*

On note

$$\sup_{x \in \Omega} \ ess\, |f(x)| = \inf\{C > 0 : |f(x)| \leq C \ \textit{p.p.sur } \Omega\}.$$

Définition 31 *On appelle espace $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω, i.e.*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \ \textit{mesurable}, \exists\ C > 0 \ \textit{telle que } |f(x)| \leq C \ \textit{p.p. sur } \Omega.\}$$

Pour $f \in L^\infty(\Omega)$, on note

$$\|f\|_{infty} = \sup_{x \in \Omega} \ ess\, |f(x)|.$$

Remarque 32 *Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors*

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \qquad \textit{p.p. sur } \Omega.$$

Définition 33 *On dit qu'un nombre réel $p \in [1, +\infty]$ est le conjugué d'un nombre réel $q \in [1, +\infty]$, si : $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Dans ce cas on dit que p et q sont des exposants conjugés.*

Théorème 34 *(Inégalité de Hölder) Soient p et q deux exposants conjugés de $[1,+\infty]$, $f \in L^p$ et $g \in L^q$. Alors $f.g \in L^1$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Preuve 35 *Voir [6] et [7].* ■

Corollaire 36 *Soient p et q deux exposants conjugés, si $p = 2$ on a $q = 2$ et l'inégalité de Hölder se réduit alors à l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Théorème 37 *(Inégalité de Minkowski) Soit $p \in [1,\infty]$ et f, $g \in L^p(\Omega)$. Alors on a $f + g \in L^p(\Omega)$ et*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Preuve 38 *Voir [6] et [7].* ■

Théorème 39 *L'ensemble $L^p(\Omega)$ forme un espace vectoriel normé pour la norme $\|\cdot\|_{L^p}$, $p \in [1,+\infty]$.*

Preuve 40 *Voir [5], [6] et [7].* ■

Définition 41 *Soient X et Y deux espaces vectoriel normés. On dit que X s'injecte continûment dans Y s'il existe une injection continue i de X dans Y, i.e. une injection i et une constante $C > 0$, telle que :*

$$\forall x \in X, \ \ \|i(x)\|_Y \leq C \|x\|_X$$

On note

$$X \hookrightarrow Y,$$

On dit que cette injection continue est compact si i est un opérateur compact, ce qui signifie qu'elle transforme tout ensemble borné de X en un ensemble relativement compact de Y . On note

$$X \underset{c}{\hookrightarrow} Y$$

Proposition 42 *Si $\mu(\Omega) < +\infty$ alors $L^{\infty}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega) \hookrightarrow L^{p}(\Omega) \hookrightarrow L^{1}(\Omega)$, $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.*

Preuve 43 *Voir [5], [6] et [7].* ■

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur Ω.

Définition 44 *Si la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(t)$ sur Ω sauf pour un ensemble de valeurs de t de mesure nulle alors on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout sur Ω vers la fonction f et on note :*

$$f_n \overset{p.p}{\rightarrow} f \text{ sur } \Omega.$$

Théorème 45 *(de convergence monotone de Beppo Levi)*
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positive de $L^p(\Omega)$ telle que $\sup\limits_n \int_\Omega f_n(x)dx < \infty$. Alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.p. sur Ω vers une limite finie $f(x)$, de plus $f \in L^p(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Preuve 46 *Voir [6].* ■

Définition 47 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega, M, \mu)$*
La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne au sens L^1 si $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty} \int\limits_\Omega |f_n - f|\, d\mu = 0$, et on note $f_n \overset{L^1}{\rightarrow} f$ sur Ω.

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure si $\forall \varepsilon, \varepsilon' > 0$, $\exists N$, $\forall n > N$,

$$\mu\left\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon'\right\} < \varepsilon.$$

Théorème 48 *(de convergence dominée de Lebesgue dans L^p)*

Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que

(1) $f_n(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω.

(2) il existe une fonction positive et intégrable $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ (i.e. $\|f_n - f\|_p \underset{n\to+\infty}{\to} 0$).

Preuve 49 *Voir [6].* ■

Théorème 50 (*Réciproque du théorème de Lebesgue*)

Soient (f_n) une suite de L^p et $f \in L^p$ tel que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Alors il existe une sous sous suite (f_{n_k}) de (f_n) tel que

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p sur Ω,

(ii) Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p, sur Ω pour une certaine fonction positive $g \in L^p(\Omega)$.

Preuve 51 *Voir [6].* ■

Lemme 52 *(de Fatou)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ telle que

(1) pour chaque n, $f_n(x) \geq 0$ p.p. sur Ω,

(2) $\sup\limits_n \int\limits_\Omega f_n(x)dx < \infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n(x)$. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\int\limits_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)\right) dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int\limits_\Omega f_n(x)dx.$$

Preuve 53 *Voir [6].* ■

Théorème 54 *(Fischer-Riesz)*

L^p est un espace de Banach pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Preuve 55 *Voir [5], [6] et [7].* ■

Définition 56 *On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est localement intégrable sur Ω, si pour tout compact $K \subset \Omega$, la fonction f est intégrable sur K, i.e.*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \textit{mesurable} : f \in L^1(K),\ \textit{pour tout compact } K \subset \Omega \right\},$$

L'espace vectoriel $L^1_{loc}(\Omega)$ est appelé l'espace des fontions localement intégrables.
De même, pour tout $p \in]1, +\infty]$, on désigne par

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \textit{mesurable} : f|_K \in L^p(K),\ \textit{pour tout compact } K \subset \Omega \},$$

l'espace vectoriel des fontions $p-$localement intégrables sur Ω.

Remarque 57 *On a $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.*

Définition 58 *(Convergence dans $L^p_{loc}(\Omega)$) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p_{loc}(\Omega)$ et $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. On dit que $f_n \to f$ dans $L^p_{loc}(\Omega)$, si, pour tout compact K de Ω, on a $f_{n_{\backslash K}} \to f_{\backslash K}$ dans $L^p(K)$.*

Lemme 59 *Soit $p \in [1, \infty]$, alors $\mathcal{C}_c(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

Théorème 60 *(Densité).*
L'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$, i.e. il existe une suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$, i.e.

$$\forall f \in L^p(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists (f_n)_n \ \textit{une suite de } \mathcal{C}_c(\Omega) \textit{ tel que } \|f_n - f\|_p < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Preuve 61 *Voir [5], [6] et [7].* ■

Proposition 62 $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, *pour tout* $p \in [1, +\infty]$.

Proposition 63 *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.*

Preuve 64 *Voir [5], [6] et [7].* ■

Dans la suite, nous allons rappeler la réfléxivité, la séparabilité et la dualité de l'espace $L^p(\Omega)$.

Théorème 65 *L'espace $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe pour tout $p \in]1, \infty[$ et donc il est réflexif pour tout $p \in]1, +\infty[$.*

Proposition 66 *$L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.*

Théorème 67 *$L^p(\Omega)$ est séparable pour tout $p \in [1, +\infty[$.*

Preuve 68 *Voir [5], [6] et [7].* ■

Remarque 69 *$L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Le dual topologique de L^p, noté $(L^p)'$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur L^p. Plus présicement, on a le résultat suivant.

Théorème 70 *(de représentation de Riesz)*
Soient $p \in]1, \infty[$ et $T \in (L^p)'$. Alors il existe $g \in L^q$ unique, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tel que :

$$\langle T, f \rangle = \int_\Omega gf, \qquad \forall f \in L^p$$

De plus, on a

$$\|g\|_q = \|T\|_{(L^p)'}$$

Preuve 71 *Voir [5], [6] et [7].* ■

Théorème 72 *On a*

(1) $(L^p)' = L^q$, *pour* $p \in [1, \infty[$, *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(2) $(L^1)' = L^\infty$ *(si la mesure est σ-finie).*

Preuve 73 *Voir [6].* ■

La convergence faible dans L^p est résumée dans la définition suivante.

Définition 74 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Alors.*

1. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de $L^p(\Omega)$ est converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x) = 0, \ \forall \varphi \in L^q(\Omega), \ \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On note dans ce cas $u_n \rightharpoonup u$, lorsque $n \to +\infty$.

2. Si $p = +\infty$, on dit que la suite $(u_n)_n$ est $*$-faiblement convergente vers u dans L^∞ si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x) = 0, \ \forall \varphi \in L^1(\Omega).$$

On note $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$, lorsque $n \to +\infty$.

1.2.2 L'espace de distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 75 *On appelle support d'une fonction continue f, le sous ensemble de Ω, noté et défini par*

$$suppf = \overline{\{x \in \Omega, \ f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 76 *$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω.*

Les éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont appelés fonctions test.

Définition 77 *On appelle dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, l´espace des formes linéaires continues T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définies par*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \langle T, \varphi \rangle \end{array},$$

i.e.,

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \langle T, \lambda\varphi + \psi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle$.
2. $\forall K$ *compact de* Ω, $\exists C > 0, \ \exists k \in \mathbb{N}$ *:* $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup\limits_{\substack{|\alpha| \leq k \\ x \in \Omega}} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$.

Définition 78 *Les éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont appelés distributions.*

Soient $x \longmapsto f(x)$ et $y \longmapsto g(y)$ deux fonctions localement intégrables respectivement sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^m$

Définition 79 *Le produit tensoriel de f et g est une application, noté $f \otimes g$ et définie par*

$$\begin{array}{rcl} f \otimes g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f \otimes g(x, y) = f(x) g(y) \end{array}.$$

Remarque 80 *L'application $f \otimes g$ est localement intégrables sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, Elle détermine donc une distribution et on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$,*

$$\langle f \otimes g, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle$$

Définition 81 *On définit le produit de convolution de deux fonctions f et g localement intégrables sur $\mathbb{R}^n$ dont l'une est à un support compact par*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$$

Définition 82 *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Alors la convolution de T et φ est donnée par la formule*

$$(T * \varphi)(x) = \langle T_y, \varphi(x - y) \rangle .$$

Définition 83 *Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Le produit tensoriel (ou direct) est la distribution $R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ notée $S_x \otimes T_y$ et définie par*

$$\langle R, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x, y) \rangle \rangle .$$

Définition 84 *Soit $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et supposons qu'au moins l'un d'eux ait un support compact, la convolution $S * T$ est une distribution sur $\mathbb{R}^n$ définie par*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) .$$

Soit f une fonction localement intégrable et soit $\check{f} : x \to f(-x)$, sa transposée. La distribution $T_{\check{f}}$ associée à $\check{f}$ est déterminée par

$$\left\langle T_{\check{f}}, \varphi \right\rangle = \int f(-x)\,\varphi(x)\,dx = \int f(x)\,\varphi(-x)\,dx = \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

où $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Définition 85 *La transposée d'une distribution T, noté $\check{T}$, est la distribution définie par*

$$\left\langle \check{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

Définition 86 *Soit T une distribution et $h \in \mathbb{R}$. La translatée de T par h est notée et définie par*

$$\langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-h}\varphi \rangle\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

où $\tau_{-h}\varphi(x) = \varphi(x+h)$.

Définition 87 *Le dual topologique de $\mathcal{C}^\infty$, noté $\mathcal{E}'$ est l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}^\infty$.*

Les éléments de $\mathcal{E}'$ sont appelés distributions à support compact dans Ω.

Définition 88 *la dérivé d'ordre α d'une distribution T est définie par*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m$.

Théorème 89 *$\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace de Fréchet, Montel, reflexive et not métrizable.*

Preuve 90 *Voir [15], [16] et [17].* ■

Définition 91 *On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_j) \in \mathcal{D}$ converge dans $\mathcal{D}$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ et on écrit $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, si :*

(i) Tous les supports des φ_j sont contenus dans un même compact K.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la suite $\left(D^\alpha \varphi_j\right)$ converge uniformément vers $\left(D^\alpha \varphi\right)$ sur K.

Théorème 92 *$\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ est dense dans $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Preuve 93 *Voir [15], [16] et [17].* ■

Definition 1 *L'espace des fonctions à décroissance rapide est noté et défini par*

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty : \forall \left(\alpha, \beta\right) \in \mathbb{Z}_+^2, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, \|\varphi\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(1 + |x|^2\right)^\beta \left|\varphi^{(\alpha)}\left(x\right)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \right\}.$$

Remark 1 $\left(\mathcal{S}, \left(\| \quad \|_{\alpha,\beta}\right)_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^2}\right)$ *est un espace de Fréchet.*

Théorème 94 *$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ est dense dans $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Preuve 95 *Voir [16] et [17].* ■

1.2.3 L'espace de Sobolev $W^{m,p}\left(\Omega\right)$

Dans ce paragraphe nous allons donner la définition de l'espace de Sobolev $W^{m,p}\left(\Omega\right)$ ainsi que le théorème d'injection de Sobolev. Pour plus de détailes sur cet espace voir [3] et [8].

Définition 96 *L'espace de Sobolev sur Ω noté $W^{m,p}\left(\Omega\right), m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, est l'espace vectoriel constitué de toutes les fonctions de $L^p\left(\Omega\right)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m au sens des distribution, s'identifient à des fonctions de $L^p\left(\Omega\right)$, i.e.*

$$W^{m,p}\left(\Omega\right) = \{u \in L^p\left(\Omega\right), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \ |\alpha| \leq m, \ D^\alpha u \in L^p\left(\Omega\right)\}.$$

Définition 97 *Nous désignons par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de toutes les distributions $f \in \mathcal{D}'$ tel que $\partial^\alpha f \in L^p, \forall |\alpha| \leq m$ équipé de la norme ,*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}$$

Théorème 98 *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $m \in N^*$. Alors $\left(W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \|.\|_{W^{m;p}(\mathbb{R}^n)}\right)$ est un espace de Banach pour la norme définie par*

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < +\infty$$

En outre, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve 99 *Le fait que $\|.\|_{W^{m;p}(\mathbb{R}^n)}$ soit une norme est une conséquence immédiate de l'inégalité de Minkowski. Soit maintenant une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $|\alpha| \leq m$, $(\partial^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $L^p(\mathbb{R}^n)$: Elle est donc convergente vers une limite g^α : Si l'on note g la limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ alors il y a aussi convergence au sens des distributions, et donc*

$$\forall |\alpha| \leq m, \ \partial^\alpha f_n \rightharpoonup \partial^\alpha g$$

En conséquence, par unicité de la limite au sens des distributions, on peut affirmer que $g^\alpha = \partial^\alpha g$, et donc conclure que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
Afin de démontrer la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$; introduisons la famille de l'identité $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ positive telle que

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{pour } \|x\| \geq 2 \end{cases} \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(x)\, dx = 1,$$

d' approximation, suivante :

$$\zeta_\varepsilon(x) \overset{déf}{=} \frac{1}{\varepsilon^n}\zeta(\frac{x}{\varepsilon}), \varepsilon > 0$$

Pour $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, la convergence* $\zeta_\varepsilon * g \to g$ *est vraie au sens de* $S(\mathbb{R}^n)$*, et le résultat s'ensuit très simplement par densité de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *et inégalité de Young. Alors :*

$$\forall g \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \zeta_\varepsilon * g \to g \ \textit{dans}\ L^p(\mathbb{R}^n)$$

et donc, si $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

$$\forall |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha(\zeta_\varepsilon * f) = \zeta_\varepsilon * \partial^\alpha f \ \textit{dans}\ L^p(\mathbb{R}^n)$$

Donc

$$\zeta_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \textit{et}\ \zeta_\varepsilon * f \to f \quad \textit{dans}\ W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

Si l'on suppose de plus que f *est à support compact alors il en est de même pour* $\zeta_\varepsilon * f$*, et l'on a donc obtenu la densité de* $\mathcal{D}$ *dans l'ensemble des fonctions de* $W^{m,p}$ *à support compact.* ■

Pour $m > 0$ et $1 \leq p < \infty$, on définit le sous espace $\overset{\circ}{W}{}^{\infty,p}(\mathbb{R}^n)$ de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, i.e.

$$\overset{\circ}{W}{}^{\infty,p}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}^{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Théorème 100 *Si* $1 \leq p < \infty$ *alors* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *et donc on a*

$$\overset{\circ}{W}{}^{\infty,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Preuve 101 *Voir[8].* ■

Notons que l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est uniformement convexe pour $p \in [1, \infty[$, c'est donc un espace réflexif pour $1 \leq p < +\infty$ et séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

Pour $p = 2$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$, en utilisant des propriétés élémentaires de la transformation de Fourier des fonctions u de $L^2(\Omega)$, l'espace de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ est équivalente à l'espace suivant

$$W^{m,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \ \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{m}{2}} \widehat{u}(\xi) \in L^2(\Omega)\}.$$

On désigne par $\mathcal{H}^m(\Omega)$ l'espace $W^{m,2}(\Omega)$.

L'espace $\mathcal{H}^m(\Omega)$, muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.

Proposition 102 *(Meyer-Serin) Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$. Alors le sous espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Définition 103 *Soit $j \in \mathbb{Z}_+$. On définit les espaces $C_b^j(\Omega)$ par*

$$C_b^j(\Omega) = \left\{u \in C^j(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq j, \exists k_\alpha, \|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leq k_\alpha\right\}.$$

Le sous-espace $C_b^{j,\lambda}(\Omega)$, ou λ est un réel strictement positif, est constitué des fonctions de $C_b^j(\Omega)$ vérifiant

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq j, \ \exists C_{\alpha,\lambda}, \forall x, y \in \Omega, |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C_{\alpha,\lambda} |x - y|^\lambda.$$

Théorème 104 *(Injection de Sobolev) Soit $1 \leq p < \infty$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors on a les assertions suivantes :*

1. Si $n > mp$, alors pour tout q vérifiant $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$, on a

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

i.e. il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$\|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{W^{m,p}(\Omega)}, \ \forall \varphi \in W^{m,p}(\Omega)$$

2. Pour $p = 1$, *on a*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}_b(\Omega)$$

3. Si $n = mp$ *et* $p > 1$, *alors pour tout* q *vérifiant* $p \leq q < +\infty$, *on a*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

Chapitre 2

Les espaces de fonctions $\mathcal{D}_{L^p}$

Dans ce chapitre on donne la définition et les propriétés fondamentales de l'espace $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$. Quelques propriétés algébriques et topologiques sont étudiées ainsi que le lien entre $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ et l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Le présent paragraphe donne la définition des espaces $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, et leurs propriétés algébriques et topologiques.

Définition 105 *Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq \infty$. On désigne par $\mathcal{D}_{L^p}$ l'espace vectoriel constitué de toutes les fonctions φ indéfiniment dérivables sur Ω, tel que $\partial^\alpha \varphi \in L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, i.e.*

$$\mathcal{D}_{L^p}(\Omega) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \ : \partial^\alpha \varphi \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \right\}.$$

L'espace $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ équipé de la topologie localement convexe la plus grossière pour laquelle les applications

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

sont continues pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Cette topologie coïncide avec la topologie définie par la famille dénombrable de normes $\left(\|.\|_{m,p}\right)_m$ définie par

$$\|\varphi\|_{m,p} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^p}, \quad \text{pour } p \in [1, +\infty[, \ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Pour $p = +\infty$, l'espace $\mathcal{D}_{L^\infty}(\Omega)$, noté aussi $\mathcal{B}(\Omega)$, est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables φ sur $\mathbb{R}^n$, tel que φ est bornée ainsi que toutes leurs dérivées, i.e.

$$\mathcal{B}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \ \partial^\alpha \varphi \in L^\infty(\Omega), \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}.$$

L'espace $\mathcal{B}(\Omega)$ est muni de la topologie définie par la famille dénombrable de normes

$$\|\varphi\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}, \ m \in \mathbb{Z}_+.$$

La définition suivante donne le mode de convergence dans les espaces $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$.

Définition 106 *On dit qu'une suite de fonction $\left(\varphi_j\right)_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, si les $\left(\varphi_j\right)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ et chacune de leurs dérivées converge vers 0 dans L^p.*

Définition 107 *On note par $\dot{\mathcal{D}}_{L^\infty}(\Omega)$ ou $\dot{\mathcal{B}}(\Omega)$ le sous espace de $\mathcal{D}_{L^\infty}(\Omega)$ contenant toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tendant vers 0 à l'infini ainsi que toutes leurs dérivées, i.e.*

$$\dot{\mathcal{D}}_{L^\infty}(\Omega) = \left\{\varphi \in \mathcal{D}_{L^\infty}(\Omega) \ : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ \lim_{x\to+\infty} \partial^\alpha \varphi(x) = 0\right\}.$$

C'est la férméture de l'espace des fonctions test $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}_{L^\infty}$ pour la topologie générée par la même famille des norms $\|\cdot\|_{m,\infty}$.

Théorème 108 *Les espaces $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, sont des espaces de Fréchet.*

Proposition 109 *On a les inclusions suivantes*

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \ 1 \leq p < +\infty.$$

Preuve 110 *La première inclusion* $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{L^p}(\Omega), 1 \leq p < +\infty$, *devient du fait que toute fonction test est à support compact, donc elle est* $p-$*intégrable sur* Ω, *ainsi que toutes ses dérivées.*

L'inclusion $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), 1 \leq p < +\infty$, *découle du fait que* $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *et que tout élément de* $L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$, *définit une distribution sur* Ω. ■

Proposition 111 $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, *pour tout* $p \in [1, +\infty[$.

Preuve 112 *Elle découle du fait que* $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *et que* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[$. ■

Remarque 113 $\mathcal{D}(\Omega)$ *n'est pas dense dans* $\mathcal{D}_{L^\infty}(\Omega)$. *Il est claire que la fonction* φ *définie par*

$$\varphi \equiv 1,$$

est un élément de $\mathcal{D}_{L^\infty}(\Omega)$, *mais il n'existe aucune suite de fonctions teste* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, *pour lequelle* $\varphi_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \varphi$.

Proposition 114 $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $\dot{\mathcal{D}}_{L^\infty}(\Omega)$.

Preuve 115 *Elle découle du fait que* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \subset \dot{\mathcal{D}}_{L^\infty}(\Omega)$, *pour* $1 \leq p < +\infty$. ■

Afin de donner d'autres propriétés structurelles de l'espace $\mathcal{D}_{L^p}$, nous rappelons les notions et résultats suivants.

Définition 116 *Si* f *et* g *sont deux fonctions de* C^∞, *alors la formule de Leibniz est donnée par*

$$(fg)^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!\,(j-i)!} f^{(i)}(x)\, g^{(j-i)}(x).$$

Définition 117 *Le rang d'un multi-indices* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *est noté et défini par*

$$rang\alpha = \max_{1\leq j\leq n} (\alpha_j).$$

Théorème 118 *Soit A et a des nombres réels tels que $0 < a < A$ et soit B_A et B_{A-a} les boules concentriques de rayon A et $A-a$, réspectivement. Alors il existe une fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :*
(i) supp $\phi \subset B_A$,
(ii) $\phi(x) = 1$ sur B_{A-a},
(iii)Pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\partial^\alpha \phi| \leq C_{\alpha,n}.a^{-|\alpha|}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Preuve 119 *Voir [3].* ■

Théorème 120 *Soit A et a des nombres réels tels que $0 < a < A$ et soit B_A et B_{A-a} les boules concentriques de rayon A et $A-a$ respectivement. Si une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que toutes ses dérivées de rang ≤ 1, sont des fonctions φ telles que*

$$\|\partial^\alpha \varphi\|_{L^p(B_A)} \leq C,$$

alors sur B_{A-a}, la distribution T est une fonction bornée par $CC_{A,n}a^{-n}$ où $C_{A,n}$ est un constante indépendante de T et de a.

Preuve 121 *D'après le théorème 118, il existe une fonction test $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que supp$\Psi \subset B_A$, $\Psi(x) = 1$, sur B_{A-a} et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$|\partial^\alpha \Psi(x)| \leq C_{\alpha,n}.a^{-|\alpha|},$$

d'autre part, la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & si\ x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

est une solution fondamentale de $\frac{\partial^n}{\partial x_1 ... \partial x_n}$. On peut donc écrire

$$\Psi T = \frac{\partial^n H}{\partial x_1 ... \partial x_n} * (\Psi T) = H * \frac{\partial^n (\Psi T)}{\partial x_1 ... \partial x_n},$$

Ainsi, T est une fonction dans B_{A-a} pour tous $x=(x_1,...,x_n)\in B_{A-a}$, écriver

$$T(x)=(\Psi T)(x)=\int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n}\frac{\partial^n(\Psi T)}{\partial y_1...\partial y_n}dy$$

Par la formule de Leibniz,

$$\frac{\partial^n(\Psi T)}{\partial y_1...\partial y_n}=\sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|=n\\ \alpha\leq 1,\beta\leq 1}}C_{\alpha,\beta}\frac{\partial^\alpha\Psi}{\partial y^\alpha}.\frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta}$$

Par inégalité de Hölder, nous obtenous

$$\int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n}\left|\frac{\partial^\alpha\Psi}{\partial y^\alpha}\right|.\left|\frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta}\right|dy\leq\int_{B_A}...\int\left|\frac{\partial^\alpha\Psi}{\partial y^\alpha}\right|.\left|\frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta}\right|dy$$

$\left|\left\langle\frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta},\varphi\right\rangle\right|=\left|(-1)^\beta\left\langle T,\frac{\partial^\beta\varphi}{\partial y^\beta}\right\rangle\right|=\left|\left\langle T,\frac{\partial^\beta\varphi}{\partial y^\beta}\right\rangle\right|\leq C\sup\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial y^{\alpha+\beta}}\right|\leq\sup\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial y^{\alpha+\beta}}\right|$
on a

$$\begin{aligned}
T(x) &\leq \int_{B_A}...\int\left|\frac{\partial^\alpha\Psi}{\partial y^\alpha}\right|.\left|\frac{\partial^\beta T}{\partial y^\beta}\right|dy\\
&\leq \int_{B_A}...\int\left|\frac{\partial^\alpha\Psi}{\partial y^\alpha}\right|.\sup\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial y^{\alpha+\beta}}\right|dy\\
&\leq \int_{B_A}...\int\left|\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial y^\alpha}\right|.\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\Psi}{\partial y^{\alpha+\beta}}\right|dy \qquad \textit{on suppose que } \varphi=\Psi \textit{ dans } \mathcal{D}\\
&\leq \left(\int_{B_A}...\int\left|\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial y^\alpha}\right|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_{B_A}...\int\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\Psi}{\partial y^{\alpha+\beta}}\right|^{p'} dy\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&\leq CC_{\alpha+\beta,n}.a^{-|\alpha+\beta|}\\
&\leq CC_{\alpha+\beta,n}.a^{-n},\quad |\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|=n.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 122 *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est tel que toutes ses dérivées de rang ≤ 1 sont des fonctions appartenant à $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors on a*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |T(x)| \leq C. \sum_{rang\alpha\leq 1} \|\partial^\alpha T\|_{L^p}.$$

Preuve 123 *Voir [3]* ■

Corollaire 124 *Si $\varphi \in \mathcal{D}_{L^p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, alors φ est bornée dans $\mathbb{R}^n$. De plus, si $1 \leq p < +\infty$, φ converge vers zéro à l'infini.*

Preuve 125 *La bornitude de $\varphi \in \mathcal{D}_{L^p}(\mathbb{R}^n)$ découle du corrollaire précédent. Si $\varphi \in \mathcal{D}_{L^p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, il est possible de trouver un nombre $R > 0$ assez grand tel que*

$$\int_{|x|>R} \cdots \int \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \right| dx < \varepsilon$$

pour tout α de rang ≤ 1. En appliquant le théorème 120. nous obtenous que φ est arbitrairement petit pour un grand $|x|$. ■

Corollaire 126 *Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ alors $\mathcal{D}_{L^p}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}_{L^q}(\mathbb{R}^n)$ avec une injection continue.*

Preuve 127 *Lorsque $q = +\infty$, le résultat est une conséquence du corrollaire 124.*

Supposons que $q < +\infty$. En posant $\varphi^{(\beta)} = \partial^\beta \varphi$ et en appliquant le corollaire 122, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left|\varphi^{(\beta)}(x)\right|^q dx &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\varphi^{(\beta)}(x)\right|^{q-p} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\varphi^{(\beta)}(x)\right|^p dx \\
&\leq C \sum_{\alpha\leq 1} \left\|\partial^\alpha \varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{q-p} \left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^p \\
&= C \sum_{\alpha\leq 1} \left\|\varphi^{(\alpha+\beta)}\right\|_{L^p}^{q-p} \left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^p \\
&= C \left\|\varphi^{(\beta)} + \varphi^{(1+\beta)}\right\|_{L^p}^{q-p} \left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^p \\
&\leq C \left(\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{q-p} + \left\|\varphi^{(1+\beta)}\right\|_{L^p}^{q-p}\right) \left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

En élevant à la puissance $\frac{1}{q}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^q} &\leq C\left(\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}+\left\|\varphi^{(1+\beta)}\right\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}\right)\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \\
&= C\left(\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}+\left\|(1+\beta)\,\varphi^{'}\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}\right)\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \\
&\leq C\left(\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}+(1+\beta)\left\|\varphi^{'}\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}\right)\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \\
&\leq C\left(\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}+(1+\beta)\left\|\varphi^{'}\right\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}\right)\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}^{\frac{p}{q}} \\
&\leq C\left(1+(1+\beta)\left\|\varphi^{'}\right\|_{L^p}\right)\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p} \\
&\leq C\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_{L^p}
\end{aligned}$$

alors pour $m \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \leq m$, $p, q \in [1, \infty[$

$$\|\varphi\|_{m,q} \leq C\,\|\varphi\|_{m,p}\,.$$

■

Remarque 128 *L'espace* $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ *n'est pas un espace de Montel, car : l'ensemble des translatées* $\{\tau_h\varphi = \varphi(x-h),\, h \in \Omega\}$ *d'une fonction* $\varphi \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ *est borné dans* $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, *mais n'est pas relativement compact.*

Théorème 129 $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ *est réflexif, pour* $1 < p < \infty$.

Preuve 130 *En appliquant les résultats cités dans le paragraphe* 1.1 *du Chapitre* 1, *on peut montrer que dans* $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, *tout ensemble bornée est faiblement relativement compact, pour* $1 < p < \infty$, *de sorte que* $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ *est quant même réflexif d'après le théorème de Mackey-Arens.* ■

Remarque 131 *Les espaces* $\mathcal{D}_{L^1}$, $\mathcal{D}_{L^\infty}$, $\dot{\mathcal{B}}$ *ne sont pas réflexifs.*

Le lien entre les espaces $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ et l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, est donné par le résultat suivant.

Théorème 132 *On a*

$$\mathcal{D}_{L^p}(\Omega) := \bigcap_{m=0}^{\infty} W^{m,p}(\Omega).$$

Preuve 133 *Il suffit d'appliquer le théorème d'injection de Sobolev.* ■

Remarque 134 *La topologie de $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ coïncide avec la topologie la plus grossière pour laquelle les injections $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ sont continus.*

2.2 Multiplication et Convolution dans $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$

Proposition 135 *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et φ, $\psi \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, alors $\varphi.\psi \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$.*

Preuve 136 *Si $\varphi \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, alors $\forall j \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi^{(j)} \in L^p(\Omega)$ et $\psi^{(j)} \in L^p(\Omega)$. Par la règle de Leibniz, nous obtenons*

$$(\varphi.\psi)^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} \tbinom{i}{j} \varphi^{(j)} \psi^{(j-i)} \in L^p(\Omega),$$

cela montre que $\varphi.\psi \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$. ■

Proposition 137 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Si $\varphi.\psi \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, alors pour tout $m \in \mathbb{Z}_+$ il existe $C_m > 0$ tel que*

$$\|\varphi.\psi\|_{m,p} \leq C_m \|\varphi\|_{m,p} \|\psi\|_{m,p}.$$

Preuve 138 *Soit $\varphi.\psi \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, D'après la proposition ci-dessus, nous avons*

$$\begin{aligned}
\sum_{j \leq m} \left\| (\varphi.\psi)^{(j)} \right\|_{L^p} &= \sum_{j \leq m} \left\| \sum_{i=1}^{j} \tbinom{i}{j} \varphi^{(j)} \psi^{(j-i)} \right\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{j \leq m} \sum_{i=1}^{j} \tbinom{i}{j} \left\| \varphi^{(j)} \psi^{(j-i)} \right\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{j \leq m} \sum_{i=1}^{j} \tbinom{i}{j} \left\| \varphi^{(j)} \right\|_{L^p} \sum_{j \leq k} \sum_{i=1}^{j} \tbinom{i}{j} \left\| \psi^{(j-i)} \right\|_{L^p}
\end{aligned}$$

donc il existe $C_m = \left(\sum_{j\leq m}\sum_{i=1}^{j}\binom{i}{j}\right)^2 > 0$, *tel que*

$$\|\varphi.\psi\|_{m,p} \leq C_m \|\varphi\|_{m,p} \|\psi\|_{m,p}.$$

■

En conséquence, on a le résultat suivant.

Corollaire 139 *Si* $1 \leq p \leq \infty$, *l'application de la multiplication*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \times \mathcal{D}_{L^p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \\ & (\varphi, \psi) & \longmapsto & \varphi \cdot \psi \end{array},$$

est continue.

Comme conséquence de l'inégalité de Young pour le produit de convolution, on a le résultat suivant.

Proposition 140 *Soit* $1 \leq p, q \leq \infty$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Alors l'application de la convolution*

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \times \mathcal{D}_{L^q}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{L^\infty}(\Omega) \\ & (\varphi, \psi) & \longmapsto & \varphi * \psi \end{array},$$

est continue. De plus, pour tout $m \in \mathbb{Z}_+$, *on a*

$$\|\varphi * \psi\|_{m,\infty} \leq C_k \|\varphi\|_{m,p} \|\psi\|_{m,q}.$$

Preuve 141 *Si* $\psi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, *alors pour tout* $x \in \Omega$. *On a*

$$y \longmapsto \psi(x-y) \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$$

Par conséquent, $y \longmapsto \partial^{\alpha}\varphi(y)\,\psi(x-y)$ *est intégrable sur* Ω *et l'inégalité de Hölder donne*

$$\begin{aligned}\sum_{j\leq m}\sup_{x\in\Omega}\left|\partial^{\alpha}(\varphi*\psi)(x)\right| &= \sum_{j\leq m}\sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega}\left|\partial^{\alpha}\varphi(y)\,\psi(x-y)\right|dy \\ &\leq \|\varphi\|_{m,p}\,\|\psi\|_{m,q}\end{aligned}$$

ce qui entraine

$$\|\varphi*\psi\|_{m,\infty}\leq\|\varphi\|_{m,p}\,\|\psi\|_{m,q}\,.$$

■

Chapitre 3

Les espaces de distributions $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'espace des distributions $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, i.e., l'espace des formes linéaires continues sur l'espace $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La définition, les propriétés élémentaires ainsi que la caractérisation des distributions $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, sont données.

3.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 142 *On appelle dual topologique de $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, noté $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, l´espace des formes linéaires continues T sur $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, où $1 < p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i.e.,*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{D}_{L^q}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \langle T, \varphi \rangle \end{array},$$

est linéaire et continue, i.e.,

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega),\ \langle T, \lambda\varphi + \psi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle$.
2. $\exists C > 0,\ \exists k \in \mathbb{N} :\ |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{k,q},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^q}$.

Remarque 143 *La définition 142 est équivalente à dire que : Pour toute suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$ convergente vers 0 dans $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, la suite $\langle T, \varphi_j \rangle$ convergente vers 0 dans $\mathbb{C}$.*

On peut aussi définir la convergence des suites dans $\mathcal{D}'_{L^p}$, $1 < p \leq \infty$.

Définition 144 *Soit* $(T_j)_j$ *une suite de* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ *et* $T \in \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, *on dit que* $\lim\limits_{j \longrightarrow \infty} T_j = T$ *dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, *si*

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega) \ \ avec \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Remarque 145 *L'espace* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, *est lié aux espaces de Sobolev par la relation*

$$\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega) := W^{-\infty,p}(\Omega) = \bigcup_{m=0}^{\infty} W^{-m,p}(\Omega),$$

où $W^{-\infty,p}(\Omega)$ *est le dual topologique de* $\overset{\circ}{W}{}^{\infty,q}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *et l'espace* $\overset{\circ}{W}{}^{\infty,q}(\Omega)$ *est l'adhérence de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $W^{\infty,q}(\Omega)$.

Définition 146 *Le dual topologique de* $\mathcal{D}_{L^1}(\Omega)$, *noté* $\mathcal{D}'_{L^\infty}(\Omega)$ *ou bien* $\mathcal{B}'(\Omega)$, *est appelé l'espace des distributions bornées sur* Ω.

Definition 2 *Le dual topologique de* $\dot{\mathcal{D}}_{L^\infty}$, *noté,* $\mathcal{D}'_{L^1}(\Omega)$, *est appelé l'espace des distributions intégrables sur* Ω .

Proposition 147 *On a* $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$.

Preuve 148 *Soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$, *puisque* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, *alors*

$$\exists C > 0, \exists k \in \mathbb{N} : |\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f \varphi dx \right| \leq C \|f\|_{L^p} \|\varphi\|_{k,q}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

D'où, $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$. ■

Le résultat suivant donne la caractérisation des distributions $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$.

Théorème 149 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, *les assertions suivantes sont équivalents*

(i) $T \in \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$

(ii) $T * \varphi \in L^p(\Omega)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

(iii) $\exists\ m \in \mathbb{Z}_+, \exists\ (f_j)_{j\leq m} \subset L^p(\Omega) : T = \sum\limits_{j\leq m} f_j^{(j)}$

Preuve 150 $(iii) \Longrightarrow (i)$ *Elle découle du fait que* $T = \sum\limits_{j\leq m} f_j^{(j)} \in L^p(\Omega)$ *et que* $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$ *Soit* $T \in \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, *et soit l'ensemble*

$$F = \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \ \ : \|\psi\|_{L^q} \leq 1, \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right\},$$

F *est dense dans la boule unité de* $L^q(\Omega)$. *Pour* φ *fixe et* $\psi \in F$, *on considère les fonctions* $\check{\varphi} * \psi$, *où* $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, *elles forment un ensemble borné dans* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, *de sorte que les nombres*

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle$$

sont bornés, ce qui signifié que $T * \varphi$ *est une forme linéaire continue sur* $\mathcal{D}(\Omega)$ *muni de la topologie induite par* L^q, *donc* $T * \varphi \in \mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, *et par suite* $T * \varphi \in L^p(\Omega)$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ *Puisque* $T * \varphi \in L^p(\Omega)$, *alors les nombres*

$$\left\langle T * \check{\psi}, \check{\varphi} \right\rangle = \langle T * \varphi, \psi \rangle$$

sont bornées pour toute φ *fixe de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *et* $\psi \in F$, *en conséquence, les distributions* $T * \check{\psi}$ *sont bornées dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *alors,* $\forall K \Subset \Omega$, $\exists k \geq 0$ *tel que, pour* φ *fixe de* $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$, $\left\langle T * \check{\psi}, \check{\varphi} \right\rangle$ *et par suite* $\langle T * \varphi, \psi \rangle$, *soient bornés pour* $\psi \in F$. *Alors* $T * \varphi$ *est encore dans* $L^p(\Omega)$ *pour* $\varphi \in \mathcal{D}_K^m(\Omega)$, *il suffit de prendre* $\varphi = \gamma E$, *où* $\gamma \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et* $\gamma = 1$ *sur un voisinage de l'origine dans* Ω, *et* E *est la solution élémentaire de l'équation de Laplace itérés* $\Delta^m E = \delta$. *Prenons* m *assez grand pour que* E *soit une fonction continue. alors on a*

$$\begin{cases} \Delta^m * \gamma E - \xi = \delta \\ \Delta^m * (\gamma E * T) - \xi * T = T \end{cases}, \ \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On voit que T *est une somme finie de dérivées de fonctions de* $L^p(\Omega)$. ■

Remarque 151 *L'assertion* (ii) *du théorème* 149, *est équivalente à dire qu'une distri-*

bution T est bornée sur Ω, si l'ensemble de ses translatées $\{\tau_h T,\ h \in \Omega\}$ est borné dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, i.e. l'application

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ h & \longrightarrow & \tau_h T \end{array}$$

est une fonction bornée sur Ω. i.e. $\langle \tau_h T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, est une fonction bornée de h.

Quelques propriétés de l'espace $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ sont résumées dans la propositions suivante.

Proposition 3 (1) $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$.

(2) $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

(3) $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{L^q}(\Omega)$, $1 < p \leq q < \infty$.

Avec une injection continue.

Preuve 152 (1) *Toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, est définie et continue sur $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$ et puisque $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}_{L^q}$, alors, si cette forme linéaire coïncide, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, elle est entièrement déterminée par cette distribution T, ce qui montre $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.*

(2) *Soit $1 < p < \infty$, puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{L^p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ topologiquement, i.e. la topologie induite sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp, sur $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$) par $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$ $\big($resp, par $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)\big)$ est moins fine que la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp, $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$), et comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}_{L^p}(\Omega)$, alors il vient que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'_{L^p}$.*

(3) *Montrons que $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ est s'injecte continument dans $\mathcal{D}'_{L^q}(\Omega)$. En effet, puisque $\mathcal{D}_{L^{q'}}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{L^{p'}}(\Omega), \forall q' \leq p'$, et $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}_{L^{q'}}(\Omega)$, $1 \leq q' < \infty$, alors $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{L^q}(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{L^\infty}(\Omega), \forall\ p \leq q$.* ■

3.2 Multiplication et convolution dans $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$

Théorème 153 *Si $\varphi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, alors $\varphi T \in \mathcal{D}'_{L^r}(\Omega)$, où $r \geq 1$, $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ et l'application bilinéaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega) \times \mathcal{D}_{L^q}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{L^r}(\Omega) \\ (T,\varphi) & \longmapsto & \varphi T \end{array},$$

est séparément continue, i.e, est continue par rapport à chaque variable en fixant l'autre.

Preuve 154 *On a $\langle \varphi T, \psi \rangle = \langle T, \varphi\psi \rangle$, $\forall \psi \in \mathcal{D}_{L^{r'}}(\Omega)$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, et puisque $\varphi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, et $\psi \in \mathcal{D}_{L^{r'}}(\Omega)$, alors $\varphi\psi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, car si $\varphi_1 \in \mathcal{D}_{L^{q_1}}(\Omega)$ et $\varphi_2 \in \mathcal{D}_{L^{q_2}}(\Omega)$ alors $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$ où $q = \min(q_1, q_2)$, et par suite $\varphi T \in \mathcal{D}'_{L^r}(\Omega)$.*

φT est séparément continue en φ et en T. En effet, soient $(\varphi_j)_j$, $(T_j)_j$, $j \geq 1$ une suite des fonctions de $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, $q \geq 1$ respectivement une suite des distributions de $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$. Supposons que

$$\langle T_j, \psi \rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle 0, \psi \rangle = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega), \text{ lorsque } \psi \text{ parcourt un ensemble borné } B \text{ de } \mathcal{D}_{L^q}(\Omega),$$

et que la suite $(\varphi_j)_j$ reste bornée dans $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, i.e.

$$\varphi_j \longrightarrow \varphi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega), \text{ quand } j \longrightarrow \infty,$$

alors, la suite $(\varphi_j\psi)_j$ parcourt un ensemble borné dans $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, et on a

$$\langle \varphi_j T_j, \psi \rangle = \langle T_j, \varphi_j\psi \rangle \longrightarrow \langle 0, \varphi\psi \rangle \text{ quand } j \longrightarrow \infty.$$

D'où, $\langle \varphi_j T_j, \psi \rangle$ converge uniformément vers 0 dans $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$ pour $\psi \in B$, ce qui démontre que $\varphi_j T_j$ est séparément continue en T_j. Supposons maintenant que

$$\varphi_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$$

et que la suite $(T_j)_j, j \geq 1$ *est borné dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$*, i.e.*

$$T_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} T \text{ dans } \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega).$$

Comme ψ *parcourt un ensemble borné* B *dans* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$*, alors la suite* $\left(\varphi_j\psi\right)_j$ *converge uniformément vers 0 dans* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$*, et puisque la suite* $(T_j)_j$ *est borné dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$*, alors*

$$\left\langle \varphi_j T_j, \psi \right\rangle = \left\langle T_j, \varphi_j \psi \right\rangle \longrightarrow \langle T, 0\rangle = 0 \text{ quand } j \longrightarrow \infty.$$

D'où, $\left\langle \varphi_j T_j, \psi \right\rangle$ *converge uniformément vers 0 dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$*, pour* $\psi \in B$*, ce qui entraîne que* $\varphi_j T_j$ *est séparément continue en* φ_j*.* ■

Définition 155 *La convolution d'une distribution* $T \in \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ *et d'une fonction* $\varphi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$*, notée* $T * \varphi$*, est une fonction de* $\mathcal{D}_{L^r}(\Omega)$*,* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$*, définie par*

$$(T * \varphi)(x) = \langle T_y, \varphi(x - y)\rangle.$$

Théorème 156 *L'application bilinéaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega) \times \mathcal{D}_{L^q}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{L^r}(\Omega) \\ (T, \varphi) & \longmapsto & T * \varphi \end{array},$$

est séparément continue.

Preuve 157 *On a* $\langle T * \varphi, \psi\rangle = \langle T, \check{\varphi} * \psi\rangle$, $\forall \psi \in \mathcal{D}_{L^r}(\Omega)$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. $\check{\varphi} * \psi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$ *alors* $T * \varphi \in \mathcal{D}'_{L^r}(\Omega)$.

$T * \varphi$ *est séparément continue en* φ *et en* T*. En effet, soient* $(T_j)_j$, $\left(\varphi_j\right)_j$, $j \geq 1$ *une suite des distributions de* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ *respectivement une suite des fonctions de* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$*,* $q \geq 1$*. Supposons que*

$\langle T_j, \psi\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle 0, \psi\rangle = 0$ *dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$*, lorsque* ψ *parcourt un ensemble borné* B *de* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$*,*

et que la suite $\left(\varphi_j\right)_j$ *reste bornée dans* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, *i.e.*

$$\varphi_j \longrightarrow \varphi \in \mathcal{D}_{L^q}(\Omega), \text{ quand } j \longrightarrow \infty,$$

alors, la suite $\left(\check{\varphi}_j * \psi\right)_j$ *parcourt un ensemble borné dans* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, *et on a*

$$\left\langle T_j * \varphi_j, \psi \right\rangle = \left\langle T_j, \check{\varphi}_j * \psi \right\rangle \longrightarrow \left\langle 0, \check{\varphi}_j * \psi \right\rangle \text{ quand } j \longrightarrow \infty.$$

D'où, $\left\langle T_j * \varphi_j, \psi \right\rangle$ *converge uniformément vers* 0 *dans* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$ *pour* $\psi \in B$, *ce qui démontre que* $T_j * \varphi_j$ *est séparément continue en* T_j. *Supposons maintenant que*

$$\varphi_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } \mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$$

et que la suite $(T_j)_j, j \geq 1$ *est borné dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, *i.e.*

$$T_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} T \text{ dans } \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega).$$

Comme ψ *parcourt un ensemble borné* B *dans* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, *alors la suite* $\left(\check{\varphi}_j * \psi\right)_j$ *converge uniformément vers* 0 *dans* $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, *et puisque la suite* $(T_j)_j$ *est borné dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, *alors*

$$\left\langle T_j * \varphi_j, \psi \right\rangle = \left\langle T_j, \check{\varphi}_j * \psi \right\rangle \longrightarrow \langle T, 0 \rangle = 0 \text{ quand } j \longrightarrow \infty.$$

D'où, $\left\langle T_j * \varphi_j, \psi \right\rangle$ *converge uniformément vers 0 dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, *pour* $\psi \in B$, *ce qui entraîne que* $T_j * \varphi_j$ *est séparément continue en* φ_j. ■

Définition 158 *Si* $S \in \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ *et* $T \in \mathcal{D}'_{L^q}(\Omega)$, *avec* $1 \leq p, q \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$, *alors la convolution* $S * T$ *de* S *et* T, *est une distribution de* $\mathcal{D}'_{L^r}(\Omega)$, *où* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, *et est définie par*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^{r'}}(\Omega), \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1.$$

Théorème 159 *L'application bilinéaire*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega) \times \mathcal{D}'_{L^q}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{L^r}(\Omega) \\ (S,T) & \longmapsto & S * T \end{array},$$

est continue.

Preuve 160 *On a S et T appartiant à $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'_{L^q}(\Omega)$ réspèctivement, alors d'applique le théoreme 149 de la caractérisaton des distributions $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega), \exists k \in \mathbb{Z}_+, \exists (f_j)_{j \leq k} \subset L^p$, tel que $S = \sum_{j \leq k} f_j^{(j)}$ et $\exists k' \in \mathbb{Z}_+, \exists \left(g_{j'}\right)_{j' \leq k'} \subset L^q$, tel que $T = \sum_{j' \leq k'} g_{j'}^{\left(j'\right)}$ réspèctivement et*

$$\begin{aligned} \langle S * T, \varphi \rangle &= \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^{r'}}(\Omega), \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1. \\ &= \left\langle \sum_{j \leq k} f_j^{(j)}, \left\langle \sum_{j' \leq k'} g_{j'}^{\left(j'\right)}, \varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j \leq k} f_j^{(j)}, \sum_{j' \leq k'} (-1)^{j'} \left\langle g_{j'}, \varphi^{\left(j'\right)}(x+y) \right\rangle \right\rangle \\ &= \sum_{j \leq k} (-1)^j \sum_{j' \leq k'} (-1)^{j'} \left\langle f_j, \left\langle g_{j'}, \varphi^{\left(j+j'\right)}(x+y) \right\rangle \right\rangle \\ &= \sum_{j \leq k} (-1)^j \sum_{j' \leq k'} (-1)^{j'} \left\langle f_j * g_{j'}, \varphi^{\left(j+j'\right)}(x+y) \right\rangle \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\left| \left\langle f_j * g_{j'}, \varphi^{\left(j+j'\right)} \right\rangle \right| \leq \|f_j\|_{L^p} \left\|g_{j'}\right\|_{L^q} \left\|\varphi^{\left(j+j'\right)}\right\|_{L^{r'}}$$

et par suite $\exists C > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^{r'}}(\Omega)$, on a

$$|\langle S * T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{k+k',r'} = C \|\varphi\|_{l,r'}$$

Montrons que l'application bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega) \times \mathcal{D}'_{L^q}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{L^r}(\Omega) \\ (S,T) & \longmapsto & S * T \end{array},$$

est continue.

Soient $(S_j)_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ *tel que* $S_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} S$ *dans* $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$ *et* $(T_j)_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{D}'_{L^q}(\Omega)$ *tel que* $T_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} T$ *dans* $\mathcal{D}'_{L^q}(\Omega)$, *on a*

$$\begin{aligned} \langle S_j * T_j \rangle &= \left\langle \left(S_j\right)_x \otimes (T_j)_y, \varphi(x+y) \right\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}_{L^{r'}}(\Omega), \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1 \\ &= \left\langle \left(S_j\right)_x, \left\langle (T_j)_y, \varphi(x+y) \right\rangle \right\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle S * T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

donc $S_j * T_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} S * T$, *ce qui démontre que* $S * T$ *est continue.* ■

Chapitre 4

Applications aux équations de convolution

Dans ce chapitre on s'intérèse à l'équation de convolution

$$A * X = B,$$

où A, B sont des distributions données d'une algèbre de convolution $\mathcal{A}$ et l'inconnue est la distribution X.

Il est bien connue que l'existence de l'inverse de convolution A^{-1} de la distribution A est une condition nésissaire pour que cette équation de convolution possède une solution dans l'algèbre $\mathcal{A}$.

Définition 161 *Une algébre de convolution $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$ vérifiant :*

1. Quels que soient S et T dans $\mathcal{A}$, le produit de convolution $S * T$ existe et appartient à $\mathcal{A}$.

2. La distribution de Dirac δ est un élément de $\mathcal{A}$.

3. Le produit de convolution est associatif dans $\mathcal{A}$

Remarque 162 *Dans une algébre de convolution $\mathcal{A}$, le produit de convolution joue le*

rôle de la multiplication et est commutatif. Dans $\mathcal{A}$, la distribution δ de Dirac joue le rôle d'élément neutre.

Définition 163 *On désigne par $\mathcal{D}'_+$, le sous-espace de $\mathcal{D}'$ contenant les distributions à support compact dans $\mathbb{R}_+$.*

Propriétie 164 *1. $\mathcal{D}'_+$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'$,*
2. Si S et T sont dans $\mathcal{D}'_+$, $S * T$ existe et $S * T \in \mathcal{D}'_+$,
3. $*$ est associatif dans $\mathcal{D}'_+$,
4. Si S et T sont deux distributions non-nulles de $\mathcal{D}'_+$, alors $S * T \neq 0$.

Exemple 165 *L'ensemble $\mathcal{E}'$ des distributions à support compact est une algèbre de convolution.*
L'espace $\mathcal{D}'_+$ est une algèbre de convolution.

Définition 166 *On appelle équation de convolution, toute équation de la forme*

$$A * X = B \tag{*}$$

où A et B sont des distributions données avec A est à support compact et $X \in \mathcal{D}'$ est la distribution inconnue.

Remarque 167 *1. Si $B = 0$, l'équation $(*)$ est dite homogène, sinon, elle est nonhomogène.*

2. On suppose toujours que la distribution A est à support compact pour que le premier membre de l'équation $(*)$ ais un sens quelle que soit la distributions $X \in \mathcal{D}'$.

Définition 168 *On appelle inverse A^{-1} de A dans $\mathcal{A}$, toute solution X de l'équation $A * X = \delta$.*
On dit que A^{-1}est une solution élémentaire de l'équation $A * X = B$.

Le problème $(*)$ consiste à étudier l'existence et l'unicité de la solution X dans l'algébre de convolution $\mathcal{A}$.

Théorème 169 *Si A possède un inverse A^{-1} dans une algébre de convolution $\mathcal{A}$, alors cet inverse est unique et l'équation $(*)$ possède une solution unique donnée par $X = A^{-1} * B$.*

Preuve 170 *En effet, A admet un inverse unique car si $A * X = \delta$ avait une autre solution Y dans $\mathcal{A}$, on aurait $A * Y = \delta$ ou, compte tenu de la commutativité, $Y * A = \delta$. Des lors,*

$$Y = Y * \delta = Y * (A * X) = (Y * A) * X = \delta * X = X.$$

On en déduit par la convolution des deux membres de l'équation $A * X = B$ par A^{-1} que : $A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$, c'est-à-dire $X = A^{-1} * B$. ■

Remarque 171 *1. Si l'inverse A^{-1}existe dans l'algébre de convolution $\mathcal{A}$, alors l'équation $A * X = B$ admet une solution unique.*
2. L'inverse A^{-1} peut ne pas exister dans $\mathcal{A}$, comme le montre l'exemple suivant : soient A une fonction de $\mathcal{D}$ et X une distribution quelconque. On sait que le produit de convolution $A * X$ existe car $suppA$ est borné et alors c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ donnée par $A * X = B$. Celle-ci ne peut être égale à δ et donc A^{-1} n'existe pas.
3. Si l'inverse n'existe pas, alors l'équation $A * X = B$, n'a pas de solution pour $B = \delta$, mais peut avoir plusieurs soluions pour certaines valeurs de B.
4. Il se peut que l'équation $(*)$ possède une solution dans l'algébre de convolution $\mathcal{A}$ et une autre solution n'appartenant pas à $\mathcal{A}$. Par exemple l'équation

$$(\delta^{'} - c^2\delta) * X = \delta, \qquad c \neq 0,$$

possède dans $\mathcal{D}^{'}_{+}$ la solution $\frac{1}{c}H(x)\ sh(cx)$ et une autre solution $\frac{1}{2c}\exp -c\,|x|$ qui n'appartient pas à $\mathcal{D}^{'}_{+}$.

Proposition 172 *Soient S, $T \in \mathcal{D}^{'}_{+}$ et S^{-1}, T^{-1} leurs inverses respectifs.*

$$(S * T)^{-1} = S^{-1} * T^{-1}.$$

Preuve 173 *En effet, comme S et T sont à support bornés, le produit de convolution $S * T$ existe, il est commutatif et associatif. Des lors,*

$$(S * T) * \left(S^{-1} * T^{-1}\right) = \left(S * S^{-1}\right) * \left(T * T^{-1}\right) = \delta * \delta = \delta.$$

■

Exemple 174 *On a*

$$(\delta^{'} - c\delta)^{-1} = H(t) \exp ct,$$

où $c \in C$ et $H(t)$ est la fonction de Heaviside. En effet, on a

$$\begin{aligned}
(\delta^{'} - c\delta)^{-1} * H(t) \exp ct &= \delta^{'} * H(t) \exp ct - c\delta^{-1} * H(t) \exp ct, \\
&= (H(t) \exp ct)^{'} - cH(t) \exp ct, \\
&= H^{'}(t) \exp ct, \\
&= \delta \exp ct, \\
&= \delta,
\end{aligned}$$

Maintenant, nous allons appliquer les résultats théoriques précédents à l'espace des distributions $\mathcal{D}^{'}_{L^1+} := \mathcal{D}^{'}_{L^1} \cap \mathcal{D}_+$. défini par

$$\mathcal{D}^{'}_{L^1+} = \left\{T \in \mathcal{D}^{'}_{L^1},\ suppT \subset [0, +\infty[\right\}.$$

Théorème 175 *L'espace $\mathcal{D}^{'}_{L^1+}$ définit une algèbre de convolution.*

Preuve 176 *Soit S et T deux éléments de $\mathcal{D}^{'}_{L^1+}$ et soit $K = [-R, +R]$ et $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \in K\} \cap (suppS \times suppT)$. Si $(x, y) \in L^2$, on a forcément $x \geq 0, y \geq 0$ et $x + y \leq R$. Ainsi, $L \subset [0, +R] \times [0, +R]$, ce qui prouve que L est compact et que l'on peut bien définirle produit de convolution de S par T. De la relation $supp(S * T) \subset \overline{supp(S) + supp(T)}$, on déduit que $S * T \in \mathcal{D}^{'}_{L^1+}$.*

Il est clair que l'élément neutre $\delta \in \mathcal{D}'_{L^1+}$. *Il reste à montrer que le produit de convolution est associatif. On considère donc* S, T, U *trois élément de* $\mathcal{D}'_{L^1+}$, *et* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. *Si* $M = \{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z \in K\} \cap (supp\,\mathrm{S} \times suppT \times suppU)\}$ *est un compact, et si* θ *est une fonction valant* 1 *au voisinage de* M, *on a*

$$\langle S * (T * U), \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y \otimes U_z, \theta(x,y,z)\, \varphi(x+y+z) \rangle .$$

■

Considérons dans l'algèbre de convolution $\mathcal{D}'_{L^1+}$ l'équation $(*)$, avec $A \in \mathcal{D}'_{L^1+}$ et $B \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$ sont deux distributions données et cherchons une solution $X \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$ vérifiant l'équation $(*)$.

Théorème 177 *Si* A *possède un inverse* A^{-1} *dans l'algébre* $\mathcal{D}'_{L^1+}$, *alors l'équation* $(*)$ *possède une solution unique donnée par* $X = A^{-1} * B$.

Preuve 178 *En convolant les deux membres de l'équation* $A*X = B$ *par* A^{-1}, *on obtient* $A^{-1} * A * X = A^{-1} * B$, *c'est-à-dire* $X = A^{-1} * B$.

L'unicité découle du théorème 169. ■

Exemple 179 *Considèrons dans* $\mathcal{D}'_{L^1+}$ *l'équation de convolution*

$$H * X = \delta$$

et cherchons X *dans* $\mathcal{D}'_{L^\infty}$ *solution de cette équation. On a* $(H * X)' = \delta'$, *ce qui implique* $H' * X = \delta'$, *i.e.,* $\delta * X = \delta'$, *d'où* $X = \delta'$.

Exemple 180 *Cherchons dans* $\mathcal{D}'_{L^1+}$ *une solution* $X \in \mathcal{D}'_{L^\infty}$ *de l'équation de convolution*

$$(\delta' + H) * X = \delta.$$

On a

$$((\delta' + H) * X)' = \delta',$$

ce qui donne

$$(\delta' + H)' * X = \delta',$$

i.e.,

$$\left(\delta'' + \delta'\right) * X = \delta',$$

i.e.,

$$X = \left(\delta'' + \delta'\right)^{-1} * \delta',$$

or $\left(\delta'' + \delta'\right)^{-1} = H(t)\sin t$, *.d'où*

$$\begin{aligned} X &= \left(\delta'' + \delta'\right)^{-1} * \delta' = H(t)\sin t * \delta' \\ &= (H(t)\sin t * \delta)' \\ &= (H(t)\sin t)' \\ &= H'(t)\sin t + H(t)\cos t \\ &= \delta \sin t + H(t)\cos t \\ &= H(t)\cos t. \end{aligned}$$

Conclusion et perspectives

Le but principal de notre mémoire a été de faire une étude assez détaillée de l'espace $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, et leur dual topologique $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ce travail est loin d'être exhaustif, de nombreux problèmes dans la théorie des fonctions généralisées de type $\mathcal{D}'_{L^p}$ n'ont pas été abordés. Néanmoins, nous espérons que ce travail, soit un document utile et un point de départ pour développer d'autres travaux de recherche.

En perspectives, nous sommes intéressé par l'étude de certaines questions liées à l'existence et l'unicité de solutions des EDO et EDP dans les espaces des distributions de type $\mathcal{D}'_{L^p}$.

Résumé : L'objectif principal de ce travail est d'étudier les propriétés algébriques et topologiques de l'espace $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, et leur dual topologique $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Quelques équations de convolution dans l'algèbre $\mathcal{D}'_{L^1+}$ sont étudiées.

Mots clés : Espace de Lebesgue, Espace de Sobolev, Distribution bornée, Equation de convolution.

Abstract : The main objective of this work is to study the algebraic and topological properties of space $\mathcal{D}_{L^q}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, and their topological dual $\mathcal{D}'_{L^p}(\Omega)$, $1 < p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Some convolution equations in the algebra $\mathcal{D}'_{L^1+}$ are studied.

Key words : Lebesgue space, Sobolev space, Bounded distribution, Convolution equation.

Bibliographie

[1] S. Abdullah, On Convolution Operators and Multipliers of Distributions of L^p-Growth. Jou. Math. Anal & Appl. 183, No.1, 196-207,1994.

[2] J. Aleksić, S. Pilipović, et I. Vojnović, A note on convergence in the spaces of L^p-Distributions, Novi Sad J. Math.Vol. 44, No. 2, 173-181, 2014.

[3] J. Barros-Neto, An Introduction to the Theory of Distributions, Marcel Dekker, New York, 1973.

[4] N. Bourbaki, Sur certains espaces vectoriels topologiques, Annales de l'Institut Fourier, tome 2, p.5-16,1950.

[5] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Intégration, Chapitre 1 à 9, Hermann, 1965-1969.

[6] A. Bouziad et J. Calbrix, Théorie de la mesure et de l'intégration, Publications de l'Université de Rouen, 1993

[7] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[8] R. Jonathan, Les espaces de Sobolev, École polytéchnique fédérale de lausanne, SMA, 2009.

[9] J. Larcher, Multiplications and Convolutions in L. Schwartz'spaces of test functions and Distributions and their continuity, Arxiv :1209.4174v2 [Math.FA], 2013.

[10] A. Lesfari, Distributions, Analyse de Fourier et transformation de Laplace, cours et exercices, Ellipses Édition, 2012.

[11] N. Ortner et P. Wagner, Application of weighted $\mathcal{D}'_{L^p}$-spaces to the convolution of distributions, Bulletin Polish Acad Sci. Math., vol 37, N$^{\circ}_{=}$ $7-12$, p. 579–595, 1989.

[12] N. Ortner et P. Wagner, Sur quelques propriétés des espaces $\mathcal{D}'_{L^p}$ de Laurent Schwartz, Boll. Un, Mat. It., 6, 2-B, p. 353-375, 1983.

[13] D. Richard Carmichael, Distributional boundary values in D'_{L^p},Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol 43, p. 35-53, 1970.

[14] L. Schwartz, Analyse : Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle, Hermann, Paris, 1970.

[15] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, 1966.

[16] F. Trevs, Topological Vectors Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, 1970.

[17] G. Van dijk, Distribution Theory, convolution, fourier transform and Laplace transforme, Boston, 2013.