Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université D'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

DAOUDI Zohra

Thème

Stabilité exponnentielle d'un système de Bresse avec Second son

---

Soutenu le 11/9/2020 devant le jury composé de :

M.MAMOUNI Touhami	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Président
M. KEEDI Ahmed	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Rapporteur
M.BOUAZIZ Said	Maître assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

2019–2020

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

à mes chers parents,

à mes soeurs,

à toute ma famille.

à mon professeur superviseur KEDDI Ahmed.

à Tous mes enseignants .à mes amis sans exception.

Remerciements

Je remercie premièrement Dieu ALLAH, qui m'a donné a puissance et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à remercier infiniment Dr. KEDDI Ahmed qui a encadré cette thèse avec beaucoup de patience et de gentillesse. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et a su me faire progresser dans mes recherches. Je le remercie trés sincèrement pour sa disponibilité (même à distance).

À le professeur qui n'hésite jamais à donner a chaque fois que j'avais besoin DAOUDI Hassen

Je profite aussi de cette occasion pour remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de université Ahmed Dria,Adrar.

Enfin, un mérci tout les membres du juré.

Notations générales

$D(A)$	Domaine de l'opérateur A.
$B(E)$	L'espace des opérateur linéaires bornés de E dans E.
$p.p$	Presque par tout.
H^1, H_0^1,	Espaces de sobolev.
$\varrho(A)$	Ensemble résolvant de l'opérateur A.
$R(.,A)$	Application résolvante de A.

Table des matières

Introduction

Le systèm de Bresse prend en compte les déformations de arc d'un cercle soumis aux déplacements longitudinal, vertical et l'angle de rotation indiqués par w, φ et ψ respectivement. Le système est donné par les équations suivantes

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0\left(w_x - l\varphi\right) = F_1, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = F_2, \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0\left(w_x - l\varphi\right)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) = F_3, \end{cases} \tag{1}$$

où F_1, F_2 et F_3 représentent les forces extérieures et les cofecients ρ_i, k, k_0, l et b sont des constantes positives. Le système de Bresse (1) est composé de trois équations des ondes et il a été introduit par Bresse [2]. Lorsque $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, le système (1) est purement conservateur. En d'autres termes, en prenant en compte tous les conditions aux limits, l'énergie du système définie par la fonctionnelle suivante

$$E\left(t\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + +k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0\left(w_x - l\varphi\right)^2\right] dx,$$

satisfait $E'(t) = 0$. Par conséquent, $E(t) = E(0)$ pour tout $t \geq 0$. Cette identité est appelée la propriété de conservation de l'énergie.

En outre, si $l \equiv 0$, alors le système de Bresse se réduit au système de Timoshenko. Santos et Almeida Júnior [11] ont considéré (1) lorsque $F_1 = \gamma_1 \varphi_t$, $F_2 = \gamma_1 \psi_t$ et $F_3 = \gamma_3 w_t$, avec des conditions initiales et les conditions aux limites de type Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet, et ils ont montré que le système est exponentiellement stable sans imposer aucune condition sur les coefecients. Le même résultat a été obtenu par Soriano et al [12] lorsque $F_1 = a(x)g_1(\varphi_t)$, $F_2 = g_2(\psi_t)$ et $F_3 = \gamma(x)g_3(w_t)$, où a, $\gamma \in L^\infty(0, L)$ et les fonctions g_1, g_2 et g_3 sont continues et monotones.

Un résultat similaire anété obtenu également par Guesmia et Kafini [8] lorsque

$F_1 = -\int\limits_0^\infty g_1(s)\,\varphi_{xx}(x,t-s)\,ds,\ F_2 = -\int\limits_0^\infty g_2(s)\,\psi_{xx}(x,t-s)\,ds$ et

$F_3 = -\int\limits_0^\infty g_3(s)\,w_{xx}(x,t-s)\,ds$, où g_i sont des fonctions différentiables décroissantes satisfaisant certain hypothèses. Précisément, ils ont établi l'exictence et l'unicité des solution et la stabilité asymptotique de ce système, mais sans imposer aucune condition sur les coeficients. Lorsque $F_1 = F_3 = 0$ et $F_2 = \gamma\psi_t$ avec $\gamma > 0$, Alabau Boussouira et al [1] ont montré que le système est exponentiellement stable sous les conditons

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \text{ et } k = k_0,$$

sinon le sytème manque de stabilité exponentielle.

Dans ce mémoire, on étude l'exsistence et l'unicité des solutions et le comportement asymptotique du système de Bresse suivant, où le flux de chaleur est donnée par la loi de Cattaneo

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0\,(w_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_1\omega_{tt} - k_0\,(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \\ \rho_3\theta_t + q_x + \gamma\psi_{tx} = 0, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, \end{cases} \tag{2}$$

dans $(0,1) \times (0,\infty)$ avec les conditions aux limites

$$\begin{matrix} \varphi(0,t) = \psi_x(0,t) = \omega_x(x,0) = \theta(0,t) = 0 \\ \varphi_x(1,t) = \psi(1,t) = \omega(1,t) = q(1,t) = 0 \end{matrix} \qquad \forall t \geq 0 \tag{3}$$

et les conditions initiales pour $x \in (0,1)$

$$\begin{matrix} \varphi(x,0) = \varphi_0(x) & \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x) & \psi(x,0) = \psi_0(x) & \psi_t(x,0) = \psi_1(x) \\ \omega(x,0) = \omega_0(x) & \omega_t(x,0) = \omega_1(x) & \theta(x,0) = \theta_0(x) & q(x,0) = q_0(x). \end{matrix} \tag{4}$$

Ce mémoire est basé sur le travil de Keddi et al [7] mais on va utiliser une méthode differente pour établir la stabilité exponentielle et elle est organisé comme suite :

Dans le chapitre 1, on va donnée quelques rappels, Défintions et théoremes fondamentaux pour traite notre probléme. Dans le chapitre 2, on va utiliser la théorie de semi groupes pour prouver l'exsistence et l'unicité de notre système. dérniérement, on basé sur un résultat de stabilité exponentielle pour va montrer que le système (2) est exponentiellement stable sous les hypothěses $\zeta = 0$ et $k = k_0$, où

$$\zeta = (1 - \frac{\tau k \rho_3}{\rho_1}) \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) - \frac{\gamma^2 \tau}{b}.$$

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels sur les espaces de Sobolov et de Lebesgue

1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(I)$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle dans $\mathbb{R}$ (pas forcément borné) et $1 \leq p < +\infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(I)$, l'espace

$$L^p(I) = \left\{ u : I \longrightarrow \mathbb{R}, u \text{ mesurable et } \int_a^b |u|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

Sa norme est

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_a^b |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{P}}.$$

Si $p = +\infty$, on pose

$$L^\infty(I) = \{u : I \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et il existe une constante } c \text{ telle que } |u| < c \ \ p.p \text{ sur } I\},$$

et on défnit sur $L^{\infty}(I)$ la norme

$$\|u\|_{L^{\infty}} = \inf\left\{c \in \mathbb{R}^{+} \text{ tel que } |u| < c \ p.p \text{ sur } I\right\}.$$

On dit que une fonction $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^{p}_{loc}(I)$ si $\mathbf{1}_K u \in L^{p}(I)$ pour tout compact $K \subset I$.

Remarque 1 *L'espace $L^2(I)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_a^b uvdx, \quad u, v \in L^2(I)$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 2 *[3] L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Théorème 3 *(Inégalité de Hölder) [3]. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par q l'exposant conjugé de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
Pour tout $u \in L^p(I)$ et $v \in L^q(I)$ on a $uv \in L^1(I)$ et

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Théorème 4 *(Inégalité de Young). Soient p et q deux réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2_+, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{q}{p}}} b^q.$$

Si $p = q = 2$, on a

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2_+, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

Lemme 5 *(Inégalité de Cauchy Schwarz). Soit H un espace de Hilbert, on a*

$$\forall u, v \in H : |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Définition 6 *Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$, une fonction $u \in L^p(I)$ a une dérivée faible dans $L^p(I)$ s'il existe $v \in L^p(I)$ telle que pour toute $\varphi \in C_c^\infty(I)$ on ait*

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b v(x)\varphi(x)\,dx.$$

Cela revient à dire que v est la dérivée de u au sens des distributions.

1.1.2 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$.

Définition 7 *L'espace de Sobolev, noté $W^{1,p}(I)$, est constitué des fonctions de $L^p(I)$ dont la dérivées au sens des distributions, s'identifie à une fonction de $L^p(I)$. La définition précédente s'écrit donc comme ceci*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I), \exists g \in L^p(I) \text{ tel que} \int_I u\varphi' dx = -\int_I g\varphi dx,\ \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{1,p}(I)$ par $H^1(I)$.

Proposition 8 *[6]*

1. *L'espace $W^{1,p}(I)$ muni de la norme définie par*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

2. *L'espace $H^1(I)$, muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$$

est un espace de Hilbert.

Corollaire 9 *(Intégration par parties)[3]. Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $uv \in W^{1,p}(I)$ et*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

De plus on a la formule d'intégration par parties

$$\int_x^y u'vdx = u(y)\,v(y) - u(x)\,v(x) - \int_x^y uv'dx, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

1.1.3 Espace de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Définition 10 *Etant donnés un entier $m \geq 2$ et un réel $1 \leq p < +\infty$, on définit par récurrence l'espace*

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(I), u' \in W^{m-1,p}(I) \right\}.$$

On pose

$$H^m(I) = W^{m,2}(I),$$

et l'espace H^m muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{m} (u^{(i)}, v^{(i)})_{L^2}$$

est un espace de Hilbert.

Espace de Sobolev $W_0^{m,p}(I)$

Définition 11 *Etant donnés $1 \leq p \leq +\infty$ et $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $W_0^{m,p}(I)$ la fermeture de $C_c^m(I)$ dans $W^{m,p}(I)$. On note $H_0^m = W_0^{m,2}(I)$, le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle des fonctions de $W_0^{1,p}(I)$*

Proposition 12 *(Inégalité de Poincaré) [3]. On suppose que I est borné. Alors il existe une constante c_p (pendant de $|I|$) telle que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq \|u'\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(I)$ la quantité $\|u'\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(I)$.

Remarque 13 *On a la caracterisation suivante de $H_0^m(I)$*

$$H_0^m(I) = \left\{ u \in H^m(I),\ u = u^{'} = ... = u^{(m-1)} = 0 \ sur \ \partial(I) \right\}.$$

Il convient de bien distinguer

$$H_0^2(I) = \left\{ u \in H^2(I),\ u = u^{'} = 0 \ sur \ \partial(I) \right\}.$$

et

$$H^2(I) \cap H_0^1(I) = \left\{ u \in H^2(I),\ u = 0 \ sur \ \partial(I) \right\}.$$

1.2 Rappels sur Les opérateurs

Soient E et F deux espaces de Banach.

1.2.1 Définitions

Définition 14 *(Opérateur linéaire non borné). Un opérateur linéaire est une application linéaire définit sur un sous espace vectoriel $D(A)$ de E appelé domaine de A.*

Ainisi

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow F,$$

$$D(A) = \{u \in E, \quad Au \in F\}$$

et $\forall u, v \in D(A)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$A(u+v) = Au + Av, \quad A(\lambda u) = \ \lambda A(u).$$

Définition 15 *On dit que* A *est un opérateur linèaire borné s'il existe* $c \geq 0$ *telle que*

$$\forall u \in D(A), \qquad \|Au\|_F \leq c\, \|u\|_E\,.$$

On note $A \in B(E)$.

Définition 16 *(Graphe/Noyau/Image)*

Le graphe de A *est le sous espace vectoriel de* $E \times F$ *noté* $G_r(A)$ *défini par*

$$G_r(A) = \{(u, Au) : \quad u \in D(A)\}\,.$$

On appelle Noyau de A *le sous espace de* E *noté* $\ker(A)$ *définie par*

$$\ker(A) = \{u \in D(A) : \qquad Au = 0\}\,.$$

Et Image de A *le sous espace de* F *noté* $\operatorname{Im}(A)$ *défini par*

$$\operatorname{Im}(A) = A(D(A)) = \{Au, \quad u \in D(A)\}\,.$$

On dit que A *est injectif si* $\ker(A) = \{0\}$, *et que* A *est surjectif si* $\operatorname{Im}(A) = F$. *L'opérateur est bijectif s'il est à la fois injectif et surjectif.*

Définition 17 *(Opérateur inversible). On dit qu'un opérateur* $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ *est inversible si il est bijectif et a un inverse*

$$A^{-1} : F \longrightarrow D(A) \subset E$$

borné.

Définition 18 *(Opérateur fermé). Un opérateure A est dit fermé si son graphe $G_r(A)$ est fermé dans $E \times E$; c-à-d si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(A)$ telle que $x_n \to x$ alors $x \in D(A)$ et $Ax_n \to Ax$.*

1.3 Quelques propriétés spectrales,

Soit H un espace de Hilbert.

Définition 19 *Soit A un opérateur dèfini sur H, l' ensemble résolvant $\varrho(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - A$ inversible.*

Définition 20 *Soit A un opérateur dèfini sur H, le spectre $\sigma(A)$ est le complément de l'ensemble résolvante.*

Définition 21 *On appelle application résolvante de A, l application*

$$\begin{aligned} R(.,A) \quad &: \quad \varrho(A) \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow B(H) \\ \lambda \quad &\longrightarrow \quad R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Théorème 22 *[4]. Soit H un espace de Hilbert complexe et soit $A \in B(H)$.*

1. Si $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \notin \sigma(A)$.

2. $\sigma(A)$ est un ensemble fermé.

1.4 Rappels sur la théorie des semi-groupes

1.4.1 Quelques définitions

Définition 23 *On dit aue A est monotone si*

$$\forall x \in D(A), \quad (Ax, x) \geq 0 \ \ (\textit{dissipqtif si} \ \ (Ax, x) \leq 0 \ ).$$

Définition 24 *Une famille* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *opérateur linéaires continues est dite semi-groupe fortement continu* (C_0*-semi-groupe*) *sur* H *si elle satisfait les propriétés suivantes*

1. $S(0) = I_d$
2. $S(t+s) = S(t)\,S(s)\,, \ \ \forall t, s \geq 0$
3. *Pour chaque* $x \in H$, $S(.)\,x$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *.i.e.*

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t)\,x - x\|_H = 0.$$

On appelle infintésimal du C_0*-semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *tout opérateur* A *définie sur l'ensemble*

$$D(A) = \left\{ x \in H, \ \ \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)\,x - x}{t} \quad exist \right\}.$$

Par

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)\,x - x}{t}, \ \forall x \in D(A).$$

Par fois on note $\{\exp(At)\}_{t\geq 0}$ *pour* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Définition 25 *Un semi-groupe fortement continue* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *sur* H *est dit de contraction si* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq 1$, $\forall t \geq 0$.

Exemple 26 *Soit*

$$\mathcal{C} = \{f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \ f \ \text{est uniformément continue et bornée}\}.$$

Avec la norme $||f||_C = \sup_{\alpha \in [0,\infty)} |f(\alpha)|$, *l'espace* $\mathcal{C}$ *devient un espace de Banach.*

On définit

$$(S(t)f)\alpha = f(t+\alpha), \forall t \geq 0 \ \text{et} \ \alpha \in [0, \infty).$$

Evidemment $S(t)$ *est un opérateur linéaire, et, en plus, on a*

1. $(S(0)f)\alpha = f(\alpha)$, *donc* $S(0) = I_d$,

2. $S\left(\left(t+s\right)f\right)\alpha = f(t+s+\alpha) = \left(S\left(t\right)f\right)\left(s+\alpha\right) = \left(S\left(t\right)S\left(s\right)f\right)\left(\alpha\right), \forall f \in \mathcal{C}$, *donc* $S\left(t+s\right) = S\left(t\right)S\left(s\right), \ \ \forall t, s \geq 0$

3. $\lim\limits_{t\to 0^+} \left\|S\left(t\right)f - f\right\|_c = \lim\limits_{t\to 0^+} \sup\limits_{\alpha\in[0,\infty)} \left|f(t+\alpha) - f\left(\alpha\right)\right| = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{C}$.

De même, on a $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} \left\|S\left(t\right)f\right\|_c &= \underset{\alpha\in[0,\infty)}{sup}\left|\left(S\left(t\right)f\right)\left(\alpha\right)\right| \\ &= \underset{\alpha\in[0,\infty)}{sup}\left|f(t+\alpha)\right| \\ &= \underset{\beta\in[t,\infty)}{sup}\left|f(\beta)\right| \\ &\leq \underset{\beta\in[0,\infty)}{sup}\left|f(\beta)\right| = \left\|S\left(t\right)f - f\right\|_c \end{aligned}$$

Donc $\|S(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$. *D'aprés la définition précedent* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe de contraction, nommé le* C_0*-semi-groupe de translations à droite.*

Soit $A : D(A) \subset \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *le genérateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*. Si* $f \in D(A)$*, alors on a*

$$Af(\alpha) = \underset{t\to 0^+}{lim}\frac{f(t+\alpha) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha),$$

uniformément par rapport à α*. Par conséquent*

$$D(A) \subset \{f \in \mathcal{C} : \ f' \in \mathcal{C}\}.$$

Si $f \in \mathcal{C}$ *tel que* $f\prime \in \mathcal{C}$*, alors*

$$\left\|\frac{S\left(t\right)f - f}{t} - f'\right\|_c = \underset{\alpha\in[0,\infty)}{sup}\left|\frac{\left(S\left(t\right)f\right)\left(\alpha\right) - f\left(\alpha\right)}{t} - f'\left(\alpha\right)\right|.$$

Mais

$$\begin{aligned}\left|\frac{(S(t)f)(\alpha)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right| &= \left|\frac{f(t+\alpha)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right| \\ &= \left|\frac{1}{t}\left[f(s)\right]_{\alpha}^{t+\alpha}-f'(\alpha)\right| = \frac{1}{t}\left|\int_{\alpha}^{t+\alpha}\left(f'(s)-f'(\alpha)\right)ds\right| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_{\alpha}^{t+\alpha}\left|f'(s)-f'(\alpha)\right|ds \to 0,\end{aligned}$$

uniformément par rapport à α *pour* $t \geq 0$. *Alors*

$$\left\|\tfrac{S(t)f-f}{t}-f'\right\|_c \to 0 \quad si\ t \to 0$$

d'ou $f \in D(A)$ *et*

$$\{f \in \mathcal{C} :\ f' \in \mathcal{C}\} \subset D(A).$$

Par conséquent

$$Af = f\ ' \ et \ \ D(A) = \{f \in \mathcal{C} :\ f' \in \mathcal{C}\}.$$

Définition 27 $\{\exp(At)\}_{t\geq 0}$ *est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes positive* α *et* M *telles que*

$$\|\exp(At)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M\exp(-\alpha t), \quad \forall t \geq 0.$$

1.5 C_0-Semi-groupe généré par un opérateur dissipatif

Théorème 28 *(Hille-Yosida) [10]. Un opérateur linèaire (non borné)* $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contractions* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *si et seulement si*

i) A *est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = H$, *ii)L'ensemble résolvant $\varrho\ (A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 29 *(Lumer-Phillips) [9]. Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire et $D(A)$ est dense dans H. Alors A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction si et seulement si*

i) A est dissipatif,

ii) Il existe $\lambda > 0$ tel que $Im(\lambda I - A) = H$ (A est maximal).

1.6 Le théorème Lax Miligrame

Soit H un espace de Hilbert muni de produit scalaire $(.,.)_H$ et de norme associée $\|.\|_H$.

Définition 30 *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est :*

(i) continue, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

(ii) coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$

$$|a(u,u)| \geq \alpha\|u\|^2, \quad \forall u \in H.$$

Théorème 31 *(Lax-Milgram) [3]. Soit H une espace de Hilbert réel, $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue . Alors, il existe un unique élément u de H solution du problème variationnel*

$$a(u,v){=}L(v)\ \forall v \in H,$$

de plus, si a est symétrique u définie par

$$\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \right\}.$$

Chapitre 2

Existence et Unicité

Dans ce chapitr, on va donner un résultat d'existence et d'unicité pour le problème $(2)-(4)$, en utilisant la théorie de semi groupes. Pour cela, en posant $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, w, \omega, \theta, q)^T$, où $u = \varphi_t$, $v = \psi_t$ *et* $\omega = w_t$. le systèm $(2)-(4)$ peut être écrit comme suit

$$\begin{cases} \Phi'(t) + \mathcal{A}\Phi(t) = 0 \\ \Phi(0) = \Phi_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0, q_0)^T, \end{cases}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}\Phi = \begin{pmatrix} -u \\ \frac{1}{\rho 1}(-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0(w_x - l\varphi)) \\ -v \\ \frac{1}{\rho 2}(-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x) \\ -\omega \\ \frac{1}{\rho 1}(-k_0(w_x - l\varphi)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw)) \\ \frac{1}{\rho 3}(q_x + \gamma v_x) \\ \frac{1}{\tau}(\beta q + \theta_x) \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer le cadre fonctionnelle de notre problème, on considère les espaces de

Hilbert suivants

$$\begin{array}{ll} H_*^1(0,1) = \{f \in H^1\ (0,1) \quad f\ (0)\ = 0\} & H_*^2(0,1) = H^2(0,1) \cap H_*^1(0,1) \\ \hat{H}_*^1(0,1) = \{f \in H^1\ (0,1) \quad f\ (1) = 0\} & \hat{H}_*^2(0,1) = H^2(0,1) \cap \hat{H}_*^1(0,1) \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= H_*^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \hat{H}_*^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \hat{H}_*^1(0,1) \\ &\quad \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \end{aligned}$$

muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} \left(\Phi, \tilde{\Phi}\right)_{\mathcal{H}} &= k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) \left(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi} + l\tilde{w}\right) dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)(\tilde{w}_x - l\tilde{\varphi})\, dx \\ &\quad + \rho_1 \int_0^1 u\ \tilde{u} dx + b \int_0^1 \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \rho_2 \int_0^1 v\tilde{v} dx + \rho_1 \int_0^1 \omega\tilde{\omega} dx + \rho_3 \int_0^1 \theta\tilde{\theta} dx \\ &\quad + \tau \int_0^1 q\tilde{q} dx. \end{aligned}$$

Alors le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ est donné par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{c} \Phi \in H : \varphi \in H_*^2(0,1)\,; \quad \psi, w \in \hat{H}_*^2(0,1)\,; \quad u, \theta \in H_*^1(0,1)\,; \\ v, \omega, q \in \hat{H}_*^1(0,1); \quad \varphi_x(1) = 0, w_x(0) = \psi_x(0) = 0 \end{array} \right\}$$

Pour montrer que $\mathcal{A}$ est gènerateur infinitisimal de C_0-semi-groupes de contraction il suffit montre que d'aprés le théoreme de Hille-Yosida que $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone.

A cet effet, on a besoin les deux lemmes suivants

Lemme 32 *L'opérateur $\mathcal{A}$ est monotone et satisfait, pour tout $\Phi \in D(\mathcal{A})$*

$$(\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} = \beta \int_0^1 q^2 dx \geq 0. \tag{2.1}$$

Preuve 33 ***Preuve 34*** ***Preuve 35*** *En utilisant le produit scalaire, pour tout $\Phi \in D(\mathcal{A})$, on a*

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}\Phi, \Phi)_{\mathcal{H}} &= -k \int_0^1 (u_x + v + l\omega)(\varphi_x + \psi + lw)\, dx - k_0 \int_0^1 (w_x - lu)(w_x - l\varphi)\, dx \\
&+ \int_0^1 (-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0 (w_x - l\varphi))u dx \\
&- b \int_0^1 v_x \psi_x dx + \int_0^1 (-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x) v dx \\
&+ \int_0^1 (-k_0 (w_x - l\varphi)_x\, dx + lk(\varphi_x + \psi + lw))\omega dx \\
&+ \int_0^1 (q_x + \gamma v_x)\theta dx + \tau \int_0^1 \frac{1}{\tau}(\beta q + \theta_x) q dx
\end{aligned}$$

Après la simplification, on trouve

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} &= -kl \int_0^1 w u_x dx - k \int_0^1 \psi u_x dx - k \int_0^1 \varphi_x u_x dx + k_0 l \int_0^1 \varphi \omega_x dx - k_0 \int_0^1 w_x \omega_x dx \\
&- kl \int_0^1 u w_x dx - k \int_0^1 u \psi_x dx - k \int_0^1 u \varphi_{xx} dx - b \int_0^1 \psi_x v_x dx + \gamma \int_0^1 v \theta_x dx \\
&- b \int_0^1 v \psi_{xx} dx + k_0 l \int_0^1 \varphi_x \omega dx - k_0 \int_0^1 \omega w_{xx} dx + \gamma \int_0^1 \theta v_x dx + \int_0^1 \theta_x q dx \\
&+ \int_0^1 \theta q_x dx + \beta \int_0^1 q^2 dx,
\end{aligned}$$

et grâce à la formule d'integration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} &= -kl[wu]_0^1 - k[\psi u]_0^1 - k[\varphi_x u]_0^1 + k_0 l[\varphi\omega]_0^1 - k_0\left[w_x\omega\right]_0^1 \\ &\quad -b\left[\psi_x v\right]_0^1 + \gamma\left[v_x\theta\right]_0^1 + \left[q_x\theta\right]_0^1 + \beta\int_0^1 q^2 dx.\end{aligned}$$

Alors, les conditions au bord impliquent

$$\langle \mathcal{A}\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} = \beta\int_0^1 q^2 dx.$$

Lemme 36 *L'opérateur $A + I$ est surjectif.*

Preuve 37 *pour montrer que A+I est surjectif il faut montrer pour tout $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8)$ de $\mathcal{H}$, il existe $\Phi \in D(\mathcal{A})$ tel que*

$$\Phi + \mathcal{A}\Phi = G \tag{2.2}$$

i.e,

$$\begin{cases} -u + \varphi = g_1 \in H_*^1(0,1) \\ -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0\left(w_x - l\varphi\right) + \rho_1 u = \rho_1 g_2 \in L^2(0,1) \\ -v + \psi = g_3 \in \hat{H}_*^1(0,1) \\ -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x + \rho_2 v = \rho_2 g_4 \in L^2(0,1) \\ -\omega + w = g_5 \in \hat{H}_*^1(0,1) \\ -k_0\left(w_x - l\varphi\right)_x + lk(\varphi_x + \psi + lw) + \rho_1\omega = \rho_1 g_6 \in L^2(0,1) \\ q_x + \gamma v_x + \rho_3\theta = \rho_3 g_7 \in L^2(0,1) \\ \left(\beta + \tau\right) q + \theta_x = \tau g_8 \in L^2(0,1) \end{cases} \tag{2.3}$$

l'intégration de $(2.3)_8$ *donne*

$$\theta=\tau\int_0^x g_8(y)dy-(\beta+\tau)\int_0^x q(y)dy. \tag{2.4}$$

Donc $\theta(0,t)=0$. *Par substitution* $u=\varphi-g_1$, $v=\Psi-g_3$, $\omega=w-g_5$ *et* (2.4) *en* $(2.3)_2$, $(2.3)_4$, $(2.3)_6$, $(2.3)_7$, *ona*

$$\begin{cases} -k(\varphi_x+\psi+lw)_x-lk_0\left(w_x-l\varphi\right)+\rho_1\varphi=h_1\in L^2(0,1) \\ -b\psi_{xx}+k(\varphi_x+\psi+lw)+\rho_2\psi-\gamma\left(\beta+\tau\right)q=h_2\in L^2(0,1) \\ -k_0\left(w_x-l\varphi\right)_x+lk(\varphi_x+\psi+lw)+\rho_1\omega=h_3\in L^2(0,1) \\ -q_x+\left(\beta+\tau\right)\rho_3\displaystyle\int_0^x q(y)dy-\gamma\psi_x=h_4\in L^2(0,1), \end{cases} \tag{2.5}$$

oú

$$\begin{cases} h_1=\rho_1(g_1+g_2), \\ h_2=\rho_2(g_3+g_4)-\tau\gamma g_8, \\ h_3=\rho_1(g_5+g_6), \\ h_4=-\gamma g_{3x}-\rho_3(g_7-\tau\displaystyle\int_0^x g_8(y)dy). \end{cases} \tag{2.6}$$

On multiple les èquations de system (2.5) *respectivement par* $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{w}$ *et* $\tilde{q}$ *puis en sommant les terms, on trouve la formulation variationnelle suivante*

$$B((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q})=F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q}) \tag{2.7}$$

sur l'espace

$$V=H_*^1(0,1)\times\hat{H}_*^1(0,1)\times\hat{H}_*^1(0,1)\times L^2(0,1)$$

muni de la norme

$$\|(\varphi,\psi,w,q)\|_V^2=\|(\varphi_x+\psi+lw)\|_2^2+\|w_x-l\varphi\|_2^2+\|\psi_x\|_2^2+\|q\|_2^2.$$

Où B est la forme bilinèaire sur V définie par

$$\begin{aligned}
& B((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q})) \\
= \; & k\int_0^1 (\varphi_x+\psi+lw)\,(\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w})dx+(\beta+\tau)\int_0^1 q\tilde{q}dx+b\int_0^1 \psi_x\tilde{\psi}_x dx \\
& \rho_2\int_0^1 \psi\tilde{\psi}dx-\gamma(\beta+\tau)\int_0^1 \tilde{\psi}qdx+\rho_1\int_0^1 \varphi\tilde{\varphi}dx+\gamma(\beta+\tau)\int_0^1 \psi\tilde{q}dx \\
& +k0\int_0^1 (w_x-l\varphi)(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi})dx+\rho_3(\beta+\tau)^2\int_0^1 \left(\int_0^x q(y)dy\right)\left(\int_0^x \tilde{q}(y)dy\right)dx+\rho_1\int_0^1 w\tilde{w}dx.
\end{aligned}$$

Et F est un application linèaire définie par :

$$F(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q})=\int_0^1 h_1\tilde{\varphi}dx+\int_0^1 h_2\tilde{\psi}dx+\int_0^1 h_3\tilde{w}dx+(\beta+\tau)\int_0^1 h_4\left(\int_0^x \tilde{q}(y)dy\right)dx.$$

Maintenant , en utilisant l'inègalitè suivante, on montre la continuité de B

$$\int_0^1 (\varphi_x^2+\psi_x^2+\omega w_x^2)dx\leq c\int_0^1 ((\varphi_x+\psi+lw)^2+(w_x-l\varphi)^2+\psi_x^2))dx. \tag{2.8}$$

En effet, d'aprés l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
& \left|B((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q}))\right| \\
\leq \; & k\left\|\varphi_x+\psi+lw\right\|_2\left\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w}\right\|_2+(\beta+\tau)\left\|q\right\|_2\left\|\tilde{q}\right\|_2+b\left\|\psi_x\right\|_2\left\|\tilde{\psi}_x\right\|_2 \\
& +\rho_2\left\|\psi\right\|_2\left\|\tilde{\psi}\right\|_2-\gamma(\beta+\tau)\left\|\tilde{\psi}\right\|_2\left\|q\right\|_2+\rho_1\left\|\varphi\right\|_2\left\|\tilde{\varphi}\right\|_2 \\
& +\gamma(\beta+\tau)\left\|\psi\right\|_2\left\|\tilde{q}\right\|_2+k_0\left\|(w_x-l\varphi)\right\|_2\left\|(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi})\right\|_2 dx \\
& +\rho_3(\beta+\tau)^2\left[\int_0^1\left(\int_0^x |q(y)|\,dy\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^1\left(\int_0^x |\tilde{q}(y)|\,dy\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}+\rho_1\left\|w\right\|_2\left\|\tilde{w}\right\|_2
\end{aligned}$$

En traite $9^{éme}$ *term comme suite*

$$
\begin{aligned}
& \left[\int_0^1 (\int_0^x |q(y)|\, dy)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 (\int_0^x |\tilde{q}(y)|\, dy)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \left[\int_0^1 \left(\int_0^x dy\right)\left(\int_0^x |q(y)|^2\, dy\right) dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^x dy\right)\left(\int_0^x |\tilde{q}(y)|^2\, dy\right) dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 dy\right)\left(\int_0^1 |q(y)|^2\, dy\right) dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 dy\right)\int_0^1 |\tilde{q}(y)|^2\, dy) dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \ \|q\|_2 \|\tilde{q}\|_2 .
\end{aligned}
$$

Donc d'aprés les inégalités de Poincaré, Young et (2.8) *on obtient*

$$
\begin{aligned}
& \left|B((\varphi,\psi,w,q),(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q}))\right| \\
\leq & \ c(\|q\|_2^2 + c(\|\varphi_x+\psi+lw\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|(w_x-l\varphi)\|_2^2))^{\frac{1}{2}} \\
& \times(\|\tilde{q}\|_2^2 + c(\left\|\tilde{\varphi}_x+\tilde{\psi}+l\tilde{w}\right\| + \|(\tilde{w}_x-l\tilde{\varphi})\|_2^2 + \left\|\tilde{\psi}_x\right\|_2^2))^{\frac{1}{2}}. \\
\leq & \ c\,\|(\varphi,\psi,w,q)\|_V \left\|(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{w},\tilde{q})\right\|_V .
\end{aligned}
$$

D'où la continuité de B.

la coercivité

$$
\begin{aligned}
& B((\varphi,\psi,w,q),(\varphi,\psi,w,q)) \\
= & \ k\int_0^1 (\varphi_x+\psi+lw)^2 dx + k_0\int_0^1 (w_x-l\varphi)^2 dx + (\beta+\tau)\int_0^1 q^2 dx + b\int_0^1 \psi_x^2 dx \\
& \rho_2\int_0^1 \psi^2 dx + \rho_1\int_0^1 \varphi^2 dx + \rho_3(\beta+\tau)^2\int_0^1 (\int_0^x q(y)dy)^2 dx + \rho_1\int_0^x w^2 dx \\
\geq & \ k\,\|\varphi_x+\psi+lw\|_2^2 + k_0\,\|w_x-l\varphi\|_2^2 + c\,\|q\|_2^2 + b\,\|\psi_x\|^2 \\
\geq & \ \min(k,k_0,b,c)\ \|\ (\varphi,\psi,w,q)\ \|_V^2 .
\end{aligned}
$$

Par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, la formulation variationelle admet une solution unique tel que

$$\varphi \in H_*^1(0,1) \quad w \in \hat{H}_*^1(0,1), \quad \psi \in \hat{H}_*^1(0,1), \quad q \in L^2(0,1).$$

Par substitution φ, ψ, w *et* q *respectivement dans* $(2.3)_1$, $(2.3)_3$, $(2.3)_5$ *et* $(2.3)_8$, *on obtient*

$$u \in H_*^1(0,1), \quad \omega \in \hat{H}_*^1(0,1), \quad v \in \hat{H}_*^1(0,1), \quad \theta \in H_*^1(0,1).$$

D'autre part, si $(\tilde{\psi}, \tilde{w}, \tilde{q}) = (0,\ 0,\ 0) \in \hat{H}_*^1\ (0,1) \times \hat{H}_*^1\ (0,1) \times L^2(0,1)$, (2.7) *réduit*

$$k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)\tilde{\varphi}_x dx - k_0 l \int_0^1 (w_x - l\varphi)\tilde{\varphi} dx + \rho_1 \int_0^1 \varphi\tilde{\varphi} dx = \int_0^1 h_1 \tilde{\varphi} dx. \tag{2.9}$$

Alors, on a

$$\int_0^1 (-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) + \rho_1 \varphi - h_1)\tilde{\varphi} dx = 0, \quad \forall \tilde{\varphi} \in H_*^1(0,1).$$

Ce qui implique

$$-k\varphi_{xx} = k\psi_x + l(k + k_0)w_x - (k_0 l^2 + \rho_1)\varphi + h_1 \in L^2(0,1).$$

Par consèquent, d'aprés la théorie de la régularitè des équations elleptique linéaire, on trouve $\varphi \in H^2(0,1)$ *de plus* $\varphi \in H_*^1(0,1)$ *donc* $\varphi \in H_*^2(0,1)$ *Par ailleurs,* (2.9) *est également vrai pour tout* $\phi \in C^1([0,1]), \phi(0) = 0) \subset H_*^1(0,1)$. *Donc en utilisant l'intégration par parties,on trouve*

$$\varphi_x(1)\phi(1) = 0, \quad \forall \phi \in C^1([0;1]), \phi(0) = 0).$$

On déduit que

$$\varphi_x(1) = 0.$$

De même,nous obtenons

$$\begin{cases} -b\psi_{xx} = -k\varphi_x - (k+\rho_2)\psi - lkw - \gamma\left(\beta+\tau\right)\int\limits_0^1 q\widetilde{\varphi}dx + h_2 \in L^2(0,1), \\ -kw_{xx} = -l(k+k_0)\varphi_x - lk\psi + (l^2k_0 + \rho_1 \ \ )w + h_3 \in L^2(0,1), \\ -q_x = \gamma\psi_x - \left(\beta+\tau\right)\rho_3\int\limits_0^x q(y)dy + h_4 \in L^2(0,1). \end{cases}$$

Donc nous avons $\psi, w \in H_*^2\left(0,1\right), \, q \in \hat{H}_*^1\ \left(0,1\right)\ w_x = \psi_x(0) = 0.$

Enfn,l'application de la théorie de la régularité des équations linéaires elliptiques garantit l'existence d'un unique $\Phi \in D(\mathcal{A})$ *telque* (2.2) *est satisfaite. Par conséquent, en utilisant le lemme 32 et le lemme 36, nous concluons que l'opérateur* $\mathcal{A}$ *est maximale de opérateur monotone. Ainsi, par le théorme de Lumer philips nous avons le réultat suivant*

Théorème 38 *Soit* $\Phi_0 \in \mathcal{H}$*,alors il existe une solution faible unique* $\Phi \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$ *du problèm* $(2)-(4)$. *De plus, si* $\Phi_0 \in D(\mathcal{A}),\ \ \Phi \in C(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$

Chapitre 3

Stabilité exponentielle

Dans cette chapitre, on va montrer la décroissance exponentielle du système (2.1) – (1.3), en utilisant les condtions $\zeta = 0$ et $k = k_0$ et

Théorème 39 *Soit* $S(t) = \{\exp(\mathcal{A}t)\}_{t \geq 0}$ *est une* c_0*-semi -groupe de contraction sur l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Alors* $S(t)$ *est exponentiellement stable ssi* $\varrho(\mathcal{A}) \supseteq i\mathbb{R}$ *et*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \left\| (i\lambda - \mathcal{A})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty,$$

où $\varrho(\mathcal{A})$ *l'ensemble rèsolvante de* $\mathcal{A}$*.*

Pour cela soit $\Phi = (\varphi, u, \psi, v, w, \omega, \theta, q)^T$, $\tilde{\Phi} = (\overline{\varphi}, \overline{u}, \overline{\psi}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{\omega}, \overline{\theta}, \overline{q})^T$ et

$\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8)^T \in \mathcal{H}$. Alors le systéme résolvant associé à l'opérateur $\mathcal{A}$ donné par

$$
\begin{cases}
i\lambda\varphi + u \ = f_1, \\
\rho_1 i\lambda u + k(\varphi_x + \psi + lw)_x + lk_0\left(w_x - l\varphi\right) = \rho_1 f_2, \\
i\lambda\psi + v = f_3, \\
i\lambda\rho_2 v + b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) - \gamma\theta_x = \rho_2 f_4, \\
i\lambda w + \omega = f_5, \\
i\lambda\rho_1\omega + k_0\left(w_x - l\varphi\right)_x - lk(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 f_6, \\
i\lambda\rho_3\theta - q_x - \gamma v_x = \rho_3 f_7, \\
i\lambda\tau q - \beta q - \theta_x = \tau f_8.
\end{cases} \tag{3.1}
$$

On définit sur l'espace $\mathcal{H}$ le produit scalaire suivant

$$
\begin{aligned}
\left(\Phi, \tilde{\Phi}\right)_{\mathcal{H}} \quad = \quad & k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)\,\overline{(\varphi_x + \psi + lw)}dx + k_0\int_0^1 (w_x - l\varphi)\,\overline{(w_x - l\varphi)}dx \\
& + \rho_1\int_0^1 u\ \overline{u}dx + b\int_0^1 \psi_x\overline{\psi_x}dx + \rho_2\int_0^1 v\overline{v}dx + \rho_1\int_0^1 \omega\overline{\omega}dx \\
& + \rho_3\int_0^1 \theta\overline{\theta}dx + \tau\int_0^1 q\overline{q}dx.
\end{aligned}
$$

Pour simplifier l'écriture on pose

$$
\begin{cases}
h = -b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw), \\
g = -k(\varphi_x + \psi + lw)_x - lk_0\left(w_x - l\varphi\right), \\
\phi = lk(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0\left(w_x - l\varphi\right)_x, \\
\chi = \varphi_x + \psi + lw, \\
\mu = w_x - l\varphi.
\end{cases}
$$

Pour trouver le rèsultat de stabilité exponnentielle on a besoin les lemmes suivants

Lemme 40 *Sous les notations ci dessus, ona*

$$\beta\int_0^1 q^2dx \leq \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Preuve 41 *En multipliant les équations* $(3.1)_8$, $(3.1)_7$, $(3.1)_4$, $(3.1)_3$, $(3.1)_2$, $(3.1)_1$, $(3.1)_6$ *et* $(3.1)_5$ *par* $\overline{q},\overline{\theta},\overline{v},\overline{h},\overline{u},\overline{g},\varpi$ *et* $\overline{\phi}$ *respectivement, puis en intégrant sur* (0.1), *on trouve*

$$\left\{\begin{array}{l}
i\lambda\tau\int_0^1 q\overline{q}dx-\beta\int_0^1 q\overline{q}dx-\int_0^1\theta_x\overline{q}dx=\tau\int_0^1 f_8\overline{q}dx,\\
i\lambda\rho_3\int_0^1\theta\overline{\theta}dx-\int_0^1 q_x\overline{\theta}dx-\gamma\int_0^1 v_x\overline{\theta}dx=\rho_3\int_0^1 f_7\overline{\theta}dx,\\
i\lambda\rho_2\int_0^1 v\overline{v}dx+b\int_0^1\psi_{xx}\overline{v}dx-k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{v}dx-\gamma\int_0^1\theta_x\overline{v}dx=\rho_2\int_0^1 f_4\overline{v}dx,\\
i\lambda\int_0^1\psi\overline{h}dx+\int_0^1 v\overline{h}dx=\int_0^1 f_3\overline{h}dx,\\
i\lambda\rho_1\int_0^1 u\overline{u}dx+k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)_x\overline{u}dx+lk_0\int_0^1(w_x-l\varphi)\,\overline{u}dx=\rho_1\int_0^1 f_2\overline{u}dx,\\
i\lambda\int_0^1\varphi\overline{g}dx+\int_0^1 u\overline{g}dx=\int_0^1 f_1\overline{g}dx,\\
i\lambda\rho_1\int_0^1\omega\varpi dx+k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)_x\,\varpi dx-lk\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\varpi dx=\rho_1\int_0^1 f_6\varpi dx,\\
i\lambda\int_0^1 w\overline{\phi}dx+\int_0^1\omega\overline{\phi}dx=\int_0^1 f_5\overline{\phi}dx.
\end{array}\right. \tag{3.2}$$

Grâce á l'integration par parties et les conditions au bord, en sommant les égalités *de* (3.2)*, on a*

$$\begin{aligned}
& i\lambda k \left\|\varphi_x+\psi+lw\right\|_2^2+i\lambda k_0 \left\|w_x-l\varphi\right\|_2^2+i\lambda\rho_1 \left\|u\right\|_2^2+i\lambda b \left\|\psi_x\right\|_2^2 \\
& +i\lambda\rho_2 \left\|v\right\|_2^2+i\lambda\rho_3 \left\|\theta\right\|_2^2+i\lambda\tau \left\|q\right\|_2^2-\beta\int_0^1 \left|q\right|^2 dx-2i \ \operatorname{Im}(\theta_x,q) \\
& -2i \ \gamma \operatorname{Im}\int_0^1 v_x\overline{\theta}dx-2i \ b\operatorname{Im}\int_0^1 v\overline{\psi_{xx}}dx-2i \ \operatorname{Im}\int_0^1 k(\varphi_x+\psi+lw)\overline{v}dx+ \\
& 2i \ k\operatorname{Im}\int_0^1 u\overline{(\varphi_x+\psi+lw)_x}dx-2i \ lk_0\operatorname{Im}\int_0^1 u\overline{w_x-l\varphi}dx \\
& -2i \ k_0\operatorname{Im}\int_0^1 \omega\overline{(w_x-l\varphi)_x}dx-2i \ lk\operatorname{Im}\int_0^1 \left(\varphi_x+\psi+lw\right)\overline{\omega}dx \\
= & \ (\mathcal{F},\Phi).
\end{aligned}$$

Maintenant, on passe à la partie réelle, on obtient

$$-\beta\int_0^1 \left|q\right|^2 dx=\operatorname{Re}\left(\mathcal{F},\Phi\right).$$

On deduit, alors d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\beta\int_0^1 q^2dx=\left|\operatorname{Re}\left(\mathcal{F},\Phi\right)\right|\leq\left|(\mathcal{F},\Phi)\right|\leq\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.3}$$

Lemme 42 *Sous les notations ci-dessus, on a*

$$\left\|\theta\right\|^2\leq\epsilon\left\|v\right\|^2+(c+c_\epsilon)\left\|q\right\|^2+c\left\|\mathcal{F}\right\|\left\|\Phi\right\|.$$

Preuve 43 *En intégrant l'equation* $(3.1)_8$ *sur* $(0,x)$*, puis on multiple par* $\rho_3\overline{\theta}$ *et on intégre* *sur* (0.1), *on a*

$$i\lambda\tau\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x q(y)dy\right)\overline{\theta}dx-\beta\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x q(y)dy\right)\overline{\theta}dx-\rho_3\int_0^1|\theta|^2\,dx \tag{3.4}$$
$$=\tau\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x f_8(y)dy\right)\overline{\theta}dx.$$

On multiple $(3.1)_7$ *par* $\tau\int_0^x\overline{q(y)}dy$, *puis en intégrant sur* $(0,1)$, *on obtient*

$$i\lambda\tau\rho_3\int_0^1\theta\left(\int_0^x\overline{q(y)}dy\right)dx-\tau\int_0^1 q_x\left(\int_0^x\overline{q(y)}dy\right)dx-\gamma\tau\int_0^1 v_x\left(\int_0^x\overline{q(y)}dy\right)dx \tag{3.5}$$
$$=\rho_3\tau\int_0^1 f_7\left(\int_0^x\overline{q(y)}dy\right)dx,$$

Sous les conditions au bord, une intégration par parties et par sommation des égalités (3.4) *et* $(\ 3.5)$, *on trouve*

$$2i\lambda\rho_3\tau\,\mathrm{Re}\int_0^1\left(\int_0^x q(y)dy\right)\overline{\theta}dx-\beta\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x q(y)dy\right)\overline{\theta}dx$$
$$+\tau\int_0^1|q|^2\,dx+\gamma\tau\int_0^1 v\overline{q}dx-\rho_3\|\theta\|^2$$
$$=\tau\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x f_8(y)dy\right)\overline{\theta}dx+\rho_3\tau\int_0^1 f_7\left(\int_0^x\overline{q(y)}dy\right)dx,$$

ceci implique que

$$\begin{aligned}\rho_3 \|\theta\|^2 &= 2i\lambda\rho_3\tau \operatorname{Re}\int_0^1 \left(\int_0^x q(y)dy\right)\overline{\theta}dx - \beta\rho_3\int_0^1 \left(\int_0^x q(y)dy\right)\overline{\theta}dx + \tau\int_0^1 |q|^2 dx + \gamma\tau\int_0^1 v\overline{q}dx \\ &\quad -\tau\rho_3\int_0^1 \left(\int_0^x f_8(y)dy\right)\overline{\theta}dx - \rho_3\tau\int_0^{\epsilon 1} f_7 \left(\int_0^x \overline{q(y)}dy\right)dx,\end{aligned}$$

Les inégalités deYoung et Cauchy Schwarz impliquent

$$\begin{aligned}\rho_3 \|\theta\|^2 &\leq 2i\lambda\rho_3\tau \operatorname{Re}\int_0^1 \left(\int_0^x q(y)dy\right)\overline{\theta}dx + \frac{\rho_3}{2}\|\theta\|^2 + c\|q\|^2 + \epsilon\|v\|^2 + c_\epsilon\|q\|^2 \\ &\quad + c\|f_8\|\left\|\overline{\theta}\right\| + c\|f_7\|\|q\|.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\rho_3 \|\theta\|^2 &\leq 2i\lambda\rho_3\tau \operatorname{Re}\int_0^1 \left(\int_0^x q(y)dy\right)\overline{\theta}dx + \frac{\rho_3}{2}\|\theta\|^2 + c\|q\|^2 + \epsilon\|v\|^2 \\ &\quad + c_\epsilon\|q\|^2 + c\|\mathcal{F}\|\|\Phi\|.\end{aligned}$$

D'apres l'égalité (3.3) *et en passant à la partie réelle, on trouve donc*

$$\|\theta\|^2 \leq \epsilon\|v\|^2 + (c + c_\epsilon)\|q\|^2 + c\|\mathcal{F}\|\|\Phi\|.$$

Lemme 44 *Sous les notations ci-dessus, on a*

$$\|v\|^2 \leq c\left(1 + \frac{1}{|\lambda|}\right)\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|}\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_{\mathcal{H}}.$$

Preuve 45 *En intégrant d'abord l'équation* $(3.1)_4$ *sur* $(0, x) \subset (0, 1)$*, puis en intégrant* *sur* $(0,1)$ *après la multiplication par* $\rho_3\overline{\theta}$*, on trouve*

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho_2\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x v(y)dy\right)\overline{\theta}dx+b\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x \psi_{xx}(y)dy\right)\overline{\theta}dx \\
& -k\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x (\varphi_x+\psi+lw)(y)dy\right)\overline{\theta}dx-\gamma\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x \theta_x(y)dy\right)\overline{\theta}dx \\
= \;& \rho_2\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x f_4(y)dy\right)\overline{\theta}dx.
\end{aligned}$$

En multipliant l'équation $(3.1)_7$ *par* $\rho_2\int_0^x\overline{v(y)}dy$*, en intégrant sur* $(0,1)$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
& i\lambda\rho_3\rho_2\int_0^1\theta\left(\int_0^x\overline{v(y)}dy\right)dx-\rho_2\int_0^1 q_x\left(\int_0^x\overline{v(y)}dy\right)dx-\gamma\rho_2\int_0^1 v_x\left(\int_0^x\overline{v(y)}dy\right)dx \\
= \;& \rho_3\rho_2\int_0^1 f_7\left(\int_0^x\overline{v(y)}dy\right)dx.
\end{aligned}$$

En additionnant les deux égalités précédentes, et d'après la formule d'intégration par parties sur $(0,1)$*, on a*

$$\begin{aligned}
& 2i\lambda\rho_3\rho_2\,\mathrm{Re}\int_0^1\theta\left(\int_0^x\overline{v(y)}dy\right)dx-k\rho_3\int_0^1\left(\int_0^x(\varphi_x+\psi+lw)(y)dy\right)\overline{\theta}dx \\
& +\rho_2\int_0^1 q\overline{v}dx+\gamma\rho_2\int_0^1|v|^2\,dx+b\rho_3\int_0^1\psi_x\overline{\theta}dx-\gamma\rho_3\int_0^1|\theta|^2\,dx \\
= \;& \rho_2\rho_3\int_0^1\int_0^x f_4(y)dy\overline{\theta}dx+\rho_3\rho_2\int_0^1 f_7\left(\int_0^x\overline{v(y)}dy\right)dx.
\end{aligned}$$

En traite le $5^{éme}$ *et le* $2^{éme}$ *termes comme suite :*

$$\int_0^1 \psi_x \overline{\theta} dx = \frac{1}{i\lambda} \int_0^1 (f_{3x} - v_x) \overline{\theta} dx$$

De l'èquation $(3.1)_7$ *et l'intégration par parties, on a*

$$\int_0^1 \psi_x \overline{\theta} dx = \frac{1}{i\lambda\gamma} \int_0^1 (\gamma f_{3x} + \rho_3 f_7) \overline{\theta} - \frac{1}{i\lambda\gamma} \int_0^1 q \overline{\theta} dx + \frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 |\theta|^2 dx,$$

et de l'èquation $(3.1)_8$ *, on trouve que*

$$\int_0^1 \psi_x \overline{\theta} dx = \frac{1}{i\lambda\gamma} \int_0^1 (\gamma f_{3x} + \rho_3 f_7) \overline{\theta} - \frac{\tau}{i\lambda\gamma} \int_0^1 q \overline{f_8} dx - \|q\|^2 - \frac{\beta}{i\lambda\gamma} \int_0^1 |q|^2 dx + \frac{\rho_3}{\gamma} \int_0^1 |\theta|^2 dx,$$

alors

$$\int_0^1 \left| \psi_x \overline{\theta} \right| dx \leq \frac{c}{|\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} \right) \|q\|^2 + c \|\theta\|^2 .$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x (\varphi_x + \psi + lw)(y) dy \right) \overline{\theta} dx &= \int_0^1 \varphi \overline{\theta} dx + \int_0^1 \left(\int_0^x \psi(y) dy \right) \overline{\theta} dx + l \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \overline{\theta} dx \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|\theta\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

En passant à la partie réelle, en utilisant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma \rho_2 \|v\|^2 &\leq \frac{\gamma \rho_2}{2} \|v\|^2 + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} \right) \|q\|^2 \\ &\quad + c \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} \right) \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{c}{|\lambda|} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|\theta\|_{\mathcal{H}} + c \|\theta\|^2 . \end{aligned}$$

D'aprés le lemme 40 et en passant à la partie réelle, on a

$$\|v\|^2 \leq c\left(1+\frac{1}{|\lambda|}\right)\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|}\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\|\theta\|_{\mathcal{H}}+c\|\theta\|^2.$$

Lemme 46 *Sous les notations ci-dissus, on a*

$$\frac{b}{2}\|\psi_x\|^2 \leq \frac{k^2}{b}\|\varphi_x+\psi+lw\|^2+c\|\theta\|^2+c\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Preuve 47 *On multiple* $(3.1)_4$ *par* $\overline{\psi}$ *et on intégre sur* $(0,1)$, *on trouve donc*

$$i\lambda\rho_2\int_0^1 v\overline{\psi}dx+b\int_0^1\psi_{xx}\overline{\psi}dx-k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx-\gamma\int_0^1\theta_x\overline{\psi}dx=\rho_2\int_0^1 f_4\overline{\psi}d,$$

ensuite, on remplace $i\lambda\ \overline{\psi}$ *par* $\overline{v-f_3}$, *et on intégre par parties, il vient*

$$\begin{aligned}&\rho_2\|v\|^2-b\|\psi_x\|^2-k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx+\gamma\int_0^1\theta\overline{\psi}_xdx\\=\ &\rho_2\int_0^1 f_4\overline{\psi}dx+\int_0^1\overline{f_3}vdx.\end{aligned}$$

Les inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré donnent

$$b\|\psi_x\|^2\leq\rho_2\|v\|^2+k\|\varphi_x+\psi+lw\|\|\psi_x\|+\gamma\|\theta\|\|\psi_x\|+c\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

En appliquant l'inégalité de Young, on voit que

$$\begin{aligned}b\|\psi_x\|^2 &\leq \rho_2\|v\|^2+\frac{b}{4}\|\psi_x\|^2+\frac{k^2}{b}\|\varphi_x+\psi+lw\|^2+c\|\theta\|^2\\&+\frac{b}{4}\|\psi_x\|^2+c\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{b}{2}\left\|\psi_x\right\|^2 \leq \rho_2\left\|v\right\|^2+\frac{k^2}{b}\left\|\varphi_x+\psi+lw\right\|^2+c\left\|\theta\right\|^2+c\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}}.$$

Lemme 48 *Sous les notations ci-dessus, on a*

$$k_0\left\|w_x-l\varphi\right\|_2^2+\frac{\rho_1 l}{2}\left\|\omega\right\|_2^2 \leq \; lk\left\|\varphi_x+\psi+lw\right\|_2^2+c\left\|v\right\|_2^2+\rho_1 l\left\|u\right\|_2^2+c\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}}.$$

Preuve 49 *En multipliant les équations* $(3.1)_2$ *et* $(3.1)_7$ *par* $\overline{\mu}$ *et* $\overline{\chi}$ *respectivement et en intégrant sur* $(0,1)$, *on trouve*

$$\begin{cases} \rho_1 i\lambda\int_0^1 u\overline{\mu}dx+k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)_x\overline{\mu}dx+lk_0\int_0^1(w_x-l\varphi)\,\overline{\mu}dx=\rho_1\int_0^1 f_2\overline{\mu}dx \\ i\lambda\rho_1\int_0^1\omega\overline{\chi}dx+k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)_x\,\overline{\chi}dx-lk\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\chi}dx=\rho_1\int_0^1 f_6\overline{\chi}dx \end{cases}$$

En utilisant la condition $k=k_0$, *et par sommation les deux équation précedants, on a*

$$\begin{aligned} & 2ik\operatorname{Im}\int_0^1(w_x-l\varphi)_x\,\overline{\chi}dx+\rho_1 i\lambda\int_0^1 u\overline{(w_x-l\varphi)}dx \\ & +lk_0\left\|w_x-l\varphi\right\|_2^2+i\lambda\rho_1\int_0^1\omega\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx-lk\left\|\varphi_x+\psi+lw\right\|_2^2 \\ = \;& \rho_1\int_0^1 f_2\overline{(w_x-l\varphi)}+\rho_1\int_0^1 f_6\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx. \end{aligned}$$

D'autre part d'aprés $(3.1)_1$*et* $(3.1)_5$ *,on a*

$$\rho_1 i\lambda\int_0^1 u\overline{(w_x-l\varphi)}dx=\rho_1\int_0^1 u\overline{(\omega_x-f_{5x})}dx-\rho_1 l\int_0^1 u\overline{(u-f_1)}dx.$$

En utilisant $(3.1)_1$, $(3.1)_3$ *et* $(3.1)_5$, *on conclut que*

$$\begin{aligned}
i\lambda\rho_1\int_0^1 \omega\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx &= \rho_1\int_0^1 \omega\overline{(u_x-f_{1x})}dx+\rho_1\int_0^1 \omega\overline{(v-f_3)}dx+\rho_1 l\int_0^1 \omega\overline{(\omega-f_5)}dx \\
&= -\rho_1\int_0^1 \omega\overline{f_{1x}}dx+\rho_1\int_0^1 \omega\overline{u_x}dx-\rho_1\int_0^1 \omega\overline{f_3}dx \\
&\quad +\rho_1\int_0^1 \omega\overline{v}dx+\rho_1 l\int_0^1 |\omega|^2 dx-\rho_1 l\int_0^1 \omega\overline{f_5}dx.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
&2ik\operatorname{Im}\int_0^1 (w_x-l\varphi)_x\,\overline{\chi}dx+2\rho_1 i\operatorname{Im}\int_0^1 \omega\overline{u_x}dx-\rho_1 l\int_0^1 |u|^2 dx \\
&+lk_0\left\|w_x-l\varphi\right\|_2^2+\rho_1\int_0^1 \omega\overline{v}dx+\rho_1 l\int_0^1 |\omega|^2 dx-lk\left\|\varphi_x+\psi+lw\right\|_2^2 \\
= \; &\rho_1\int_0^1 f_2\overline{(w_x-l\varphi)}dx+\rho_1\int_0^1 \omega\overline{f_3}dx\rho_1+\int_0^1 f_6\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx-\rho_1 l\int_0^1 u\overline{f_1}dx \\
&+\rho_1\int_0^1 \omega\overline{f_{1x}}dx-\rho_1 l\int_0^1 \omega\overline{f_5}dx+\rho_1\int_0^1 u\overline{f_{5x}}dx.
\end{aligned}$$

En passant à la partie réelle, on trouve

$$\begin{aligned}
&-\rho_1 l\int_0^1 |u|^2 dx+lk_0\left\|w_x-l\varphi\right\|_2^2+\rho_1\operatorname{Re}\int_0^1 \omega\overline{v}dx+\rho_1 l\int_0^1 |\omega|^2 dx-lk\left\|\varphi_x+\psi+lw\right\|_2^2 \\
= \; &\rho_1\operatorname{Re}\int_0^1 f_2\overline{(w_x-l\varphi)}dx+\rho_1\operatorname{Re}\int_0^1 \omega\overline{f_3}dx\rho_1+\operatorname{Re}\int_0^1 f_6\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx \\
&-\rho_1 l\operatorname{Re}\int_0^1 u\overline{f_1}dx+\rho_1\operatorname{Re}\int_0^1 \omega\overline{f_{1x}}dx-\rho_1 l\operatorname{Re}\int_0^1 \omega\overline{f_5}dx+\rho_1\operatorname{Re}\int_0^1 u\overline{f_{5x}}dx.
\end{aligned}$$

On applique les inégalités de Cauchy-Schwarz et Young, alors

$$k_0 \|w_x - l\varphi\|^2 + \frac{\rho_1 l}{2} \|\omega\|^2 \leq \; lk \|\varphi_x + \psi + lw\|^2 + c\|v\|^2 + \rho_1 l \|u\|^2 + c\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Lemme 50 *Sous les notations ci-dessus, on a*

$$\rho_1(\|u\| + \|\omega\|) \leq c\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + c\|\psi_x\|^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_2^2 + c\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Preuve 51 *On multiple* $(3.1)_2$ *et* $(3.1)_6$ *respectivement par* $\overline{\varphi}$ *et* $\overline{w}$ *et on intégre sur* $(0,1)$ *on trouve*

$$\begin{cases} i\lambda\rho_1 \int_0^1 u\overline{\varphi}dx + k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)_x \overline{\varphi}dx + lk_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)\,\overline{\varphi}dx = \rho_1 \int_0^1 f_2\overline{\varphi}dx \\ i\lambda\rho_1 \int_0^1 \omega\overline{w}dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)_x\,\overline{w}dx - lk\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)\overline{w}dx = \rho_1 \int_0^1 f_6\overline{w}dx. \end{cases}$$

De $(3.1)_1$ *et* $(3.1)_5$, *on obtient*

$$\begin{cases} \rho_1 \int_0^1 u\overline{(u - f_1)}dx + k\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)_x \overline{\varphi}dx + lk_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)\,\overline{\varphi}dx = \rho_1 \int_0^1 f_2\overline{\varphi}dx \\ \rho_1 \int_0^1 \omega\overline{(\omega - f_5)}dx + k_0 \int_0^1 (w_x - l\varphi)_x\,\overline{w}dx - lk\int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)\overline{w}dx = \rho_1 \int_0^1 f_6\overline{w}dx. \end{cases}.$$

En additionnant les deux èquations précedentes, on trouve

$$\begin{aligned}
& \rho_1(\|u\|^2+\|\omega\|^2)-k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)(\overline{\varphi_x+\psi+lw})dx \\
& +k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx-k_0\int_0^1(w_x-l\varphi)\,\overline{(w_x-l\varphi)}dx \\
= \;& \rho_1\int_0^1 f_2\overline{\varphi}dx+\rho_1\int_0^1 f_6\overline{w}dx+\rho_1\int_0^1 u\overline{f_1}dx+\rho_1\int_0^1\omega\overline{f_5}dx.
\end{aligned}$$

A l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré, on voit que

$$\rho_1(\|u\|^2+\|\omega\|^2)\leq c\,\|\varphi_x+\psi+lw\|_2^2+c\,\|\psi_x\|^2+k_0\,\|w_x-l\varphi\|_2^2+c\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Lemme 52 *Sous les notations ci-dessus, on a*

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}\,\|\varphi_x+\psi+lw\|^2 \;\leq\; & \frac{b}{\gamma\tau}\zeta\int_0^1\theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx+\varepsilon\,\|w_x-l\varphi\|^2+\eta\,\|\omega\|^2 \\
& +\frac{2b^2l^2}{k_0}\,\|\psi_x\|^2+c_\eta\,\|v\|^2+c_\varepsilon\,\|\theta\|^2+c\,\|q\ \|^2 \\
& +c\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}\,,
\end{aligned}$$

Preuve 53 *En multipliant l'équation* $(3.1)_4$ *par* $\overline{\chi}$ *et en intégrant sur* $(0,1)$*, Puis, on* *utilise* $(3.1)_1$, $(3.1)_3$, $(3.1)_5$, $(3.1)_7$ *et* $(3.1)_8$, *on conclut que*

$$\begin{aligned}
k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\chi}dx &= i\lambda\rho_2\int_0^1 v\overline{\chi}dx+b\int_0^1\psi_{xx}\overline{\chi}dx-\gamma\int_0^1\theta_x\overline{\chi}dx-\rho_2\int_0^1 f_4\ \overline{\chi}dx\\
&= -\rho_2\int_0^1 v\overline{f_{1x}}dx-\rho_2\int_0^1 v\overline{f_3}\ dx-l\rho_2\int_0^1 v\overline{f_5}dx-\rho_2\int_0^1 f_4\ \overline{\chi}dx\\
&\quad -\rho_2\int_0^1 v_x\overline{u}dx+\rho_2\int_0^1 v\overline{v}\ dx+l\rho_2\int_0^1 v\overline{\omega}dx\\
&\quad +b\int_0^1\psi_{xx}\overline{\chi}dx-\gamma\int_0^1\theta_x\overline{\chi}dx,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\chi}dx &= -\rho_2\int_0^1 v\overline{f_{1x}}dx-\rho_2\int_0^1 v\overline{f_3}\ dx-l\rho_2\int_0^1 v\overline{f_5}dx-\rho_2\int_0^1 f_4\ \overline{\chi}dx+\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 f_7\overline{u}dx\\
&\quad -\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\overline{f_{1x}}dx-\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 f_8\ \overline{\varphi_x}dx-\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}i\lambda\int_0^1\theta\overline{u}dx-\frac{\rho_2\beta}{\gamma\tau}\int_0^1 q\ \overline{\varphi_x}dx\\
&\quad -\frac{\rho_2}{\gamma\tau}\int_0^1\theta_x\overline{\varphi_x}dx-\rho_2\int_0^1 v\overline{v}\ dx+l\rho_2\int_0^1 v\overline{\omega}dx-b\int_0^1\psi_x\ \overline{\chi}_xdx-\gamma\int_0^1\theta_x\overline{\chi}dx.
\end{aligned}$$

On multiple $(3.1)_2$ *par* $\frac{b}{k}\ \overline{\psi_x}$ *et on intégre sur* (0.1), *on obtient*

$$i\lambda\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 u\overline{\psi_x}dx+b\int_0^1\chi_x\overline{\psi_x}dx+\frac{blk_0}{k}\int_0^1(w_x-l\varphi)\,\overline{\psi_x}dx-\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 f_2\overline{\psi_x}dx=0.$$

La sommation des deux équations précedentes donne

$$
\begin{aligned}
& k\int_0^1 (\varphi_x+\psi+lw)\overline{\chi}dx \\
= \quad & -\rho_2\int_0^1 v\overline{f_{1x}}dx-\rho_2\int_0^1 v\overline{f_3}\,dx-l\rho_2\int_0^1 v\overline{f_5}dx-\rho_2\int_0^1 \ \overline{\chi}f_4dx \\
& +\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \overline{u}f_7dx-\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\overline{f_{1x}}dx-\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 \overline{\psi_x}f_2dx-\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 \ \overline{\varphi_x}f_8dx \\
& -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}i\lambda\int \theta\overline{u}dx-\frac{\rho_2\beta}{\gamma\tau}\int_0^1 q\ \overline{\varphi_x}dx-\frac{\rho_2}{\gamma\tau}\int_0^1 \theta_x\overline{\varphi_x}dx \\
& -\rho_2\int_0^1 v\overline{v}\,dx+l\rho_2\int_0^1 v\overline{\omega}dx+2bi\operatorname{Im}\int_0^1 \chi_x\overline{\psi_x}dx-\gamma\int_0^1 \theta_x\overline{\chi}dx \\
& +\frac{b\rho_1}{k}i\lambda\int_0^1 u\overline{\psi_x}dx+\frac{blk_0}{k}\int_0^1 (w_x-l\varphi)\,\overline{\psi_x}dx.
\end{aligned}
$$

On multiple $(3.1)_6$ *par* $\frac{bl}{k_0}\overline{\psi}$ *et on intégre sur* (0.1)*, on obtient*

$$
i\lambda\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 \omega\overline{\psi}dx-bl\int_0^1 (w_x-l\varphi)\,\overline{\psi}_xdx-\frac{bl^2k}{k_0}\int_0^1 (\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx-\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 f_6\overline{\psi}dx=0,
$$

par conséquent

$$
\begin{aligned}
k\int(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\chi} \quad = \quad & -\rho_2\int_0^1 v\overline{f_{1x}}dx-\rho_2\int_0^1 v\overline{f_3}\,dx-l\rho_2\int_0^1 v\overline{f_5}dx-\rho_2\int_0^1 \overline{\chi}f_4dx \\
& -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 f_7\overline{u}dx+\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\overline{f_{1x}}dx-\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1\overline{\psi_x}f_2dx-\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1\overline{\varphi_x}f_8dx \\
& -\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1\omega\overline{f_3}dx-\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 f_6\overline{\psi}dx-\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}i\lambda\int_0^1\theta\overline{u}dx \\
& -\frac{\rho_2\beta}{\gamma\tau}\int_0^1 q\;\overline{\varphi_x}dx-\frac{\rho_2}{\gamma\tau}\int_0^1\theta_x\overline{\varphi_x}dx-\rho_2\int_0^1 v\overline{v}\,dx+l\rho_2\int_0^1 v\overline{\omega}dx \\
& +2bi\,\mathrm{Im}\int_0^1\chi_x\overline{\psi_x}dx-\gamma\int_0^1\theta_x\overline{\chi}dx+\frac{b\rho_1}{k}i\lambda\int_0^1 u\overline{\psi_x}dx \\
& +bl\left(\frac{k_0}{k}-1\right)\int_0^1(w_x-l\varphi)\,\overline{\psi}_xdx+\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1\omega\overline{v}dx-\frac{bl^2k}{k_0}\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx
\end{aligned}
$$

On multiple $(3.1)_4$ *par* $-\frac{bl^2}{k_0}\overline{\psi}$ *et on intégre sur* (0.1), *on obtient*

$$
\begin{aligned}
0 \quad = \quad & -i\lambda\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1 v\overline{\psi}dx-\frac{b^2l^2}{k_0}\int_0^1\psi_{xx}\overline{\psi}dx \\
& +\frac{bl^2k}{k_0}\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\psi}dx+\frac{\gamma bl^2}{k_0}\int_0^1\theta_x\overline{\psi}dx+\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1\overline{\psi}f_4dx,
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
& k\int_0^1 (\varphi_x+\psi+lw)\overline{\chi}dx \\
= \quad & -\rho_2\int_0^1 v\overline{f_{1x}}dx-\rho_2\int_0^1 v\overline{f_3}\,dx-l\rho_2\int_0^1 v\overline{f_5}dx-\rho_2\int_0^1 f_4\ \overline{\chi}dx-\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 f_7\overline{u}dx \\
& +\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\overline{f_{1x}}dx-\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 f_2\overline{\psi_x}dx-\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 \overline{\psi}f_6dx-\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1 v\overline{f_3}dx \\
& +\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1 f_4\overline{\psi}dx-\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 \omega\overline{f_3}dx-\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 \ \overline{\varphi_x}f_8dx-\frac{b\rho_1\rho_3}{k\gamma}\int_0^1 u\overline{f_7}dx \\
& +\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 \theta\overline{f_2}dx-\frac{b\rho_1}{k\gamma}\int_0^1 \overline{q_x}f_1dx-\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 u\overline{f_{3x}}dx+2bi\operatorname{Im}\int_0^1 \chi_x\overline{\psi_x}dx \\
& +\frac{k\rho_2\rho_3}{\gamma\rho_1}\int_0^1 \theta_x\overline{\chi}dx-\gamma\int_0^1 \theta_x\overline{\chi}dx-\frac{lk_0\rho_2\rho_3}{\gamma\rho_1}\int_0^1 \theta\overline{(w_x-l\varphi)}dx \\
& -\frac{\rho_2\beta}{\gamma\tau}\int_0^1 q\ \overline{\varphi_x}dx-\frac{\rho_2}{\gamma\tau}\int_0^1 \theta_x\overline{\varphi_x}dx \\
& +\rho_2\left(\frac{bl^2}{k_0}-1\right)\int_0^1 v\overline{v}dx+l\rho_2\int_0^1 v\overline{\omega}dx-\frac{b\rho_3\rho_1}{k\gamma}i\lambda\int_0^1 u\overline{\theta}dx+\frac{b\rho_1}{k\gamma}i\lambda\int_0^1 \varphi\overline{q_x}dx \\
& +bl\left(\frac{k_0}{k}-1\right)\int_0^1 (w_x-l\varphi)\,\overline{\psi}_xdx+\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1 \omega\overline{v}dx+\frac{b^2l^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x\overline{\psi_x}dx-\frac{\gamma bl^2}{k_0}\int_0^1 \theta\overline{\psi}_xdx.
\end{aligned}
$$

On utilise $(3.1)_2\,,(3.1)_8\,,$ *on voit que*

$$
\begin{aligned}
& k\int_0^1(\varphi_x+\psi+lw)\overline{\chi}dx \\
= & -\rho_2\int_0^1 v\overline{f_{1x}}dx-\rho_2\int_0^1 v\overline{f_3}\,dx-l\rho_2\int_0^1 v\overline{f_5}dx-\rho_2\int_0^1 f_4\;\overline{\chi}dx-\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1 f_7\overline{u}dx \\
& +\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1 q\overline{f_{1x}}dx-\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 f_2\overline{\psi_x}dx-\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1\overline{\psi}f_6dx-\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1 v\overline{f_3}dx \\
& +\frac{bl^2\rho_2}{k_0}\int_0^1 f_4\overline{\psi}dx-\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1\omega\overline{f_3}dx-\frac{\rho_2}{\gamma}\int_0^1\;\overline{\varphi_x}f_8dx-\frac{b\rho_1\rho_3}{k\gamma}\int_0^1 u\overline{f_7}dx \\
& -\frac{\rho_2\rho_3}{\gamma}\int_0^1\theta\overline{f_2}dx-\frac{b\rho_1}{k\gamma}\int_0^1\varphi\overline{f_{8x}}dx+\frac{b\rho_3\rho_1}{k\gamma}\int_0^1\overline{\theta}f_2dx-\frac{b\rho_1}{k}\int_0^1 u\overline{f_{3x}}dx \\
& -\frac{b\rho_1}{k\gamma}\int_0^1\overline{q_x}f_1dx+2bi\operatorname{Im}\int_0^1\chi_x\overline{\psi_x}dx+\frac{k\rho_2\rho_3}{\gamma\rho_1}\int_0^1\theta_x\overline{\chi}dx-\gamma\int_0^1\theta_x\overline{\chi}dx-\frac{b\rho_3}{\gamma}\int_0^1\chi\overline{\theta_x}dx \\
& -\frac{lk_0\rho_2\rho_3}{\gamma\rho_1}\int_0^1\theta\overline{(w_x-l\varphi)}dx-\frac{\rho_2\beta}{\gamma\tau}\int_0^1 q\;\overline{\varphi_x}dx-\frac{\rho_2}{\gamma\tau}\int_0^1\theta_x\overline{\varphi_x}dx+\frac{b\rho_1}{\tau k\gamma}\int_0^1\varphi_x\overline{\theta}_xdx \\
& +\rho_2\left(\frac{bl^2}{k_0}-1\right)\int_0^1 v\overline{v}dx+l\rho_2\int_0^1 v\overline{\omega}dx+\frac{blk_0\rho_3}{k\gamma}\int_0^1(w_x-l\varphi)\,\overline{\theta}dx-\frac{b\beta\rho_1}{\tau k\gamma}\int_0^1\varphi\overline{q_x}dx \\
& +bl\left(\frac{k_0}{k}-1\right)\int_0^1(w_x-l\varphi)\,\overline{\psi}_xdx+\frac{bl\rho_1}{k_0}\int_0^1\omega\overline{v}dx+\frac{b^2l^2}{k_0}\int_0^1\psi_x\overline{\psi_x}dx-\frac{\gamma bl^2}{k_0}\int_0^1\theta\overline{\psi}_xdx,
\end{aligned}
$$

ceci implique que

$$k\left\|\varphi_x+\psi+lw\right\|^2 \leq c\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}}+2bi\operatorname{Im}\int_0^1 \chi_x\overline{\psi_x}dx+\frac{2b\rho_3}{\gamma}i\operatorname{Im}\int_0^1 \theta_x\overline{\chi}dx$$

$$+\frac{2b\rho_1}{\tau k\gamma}i\operatorname{Im}\int_0^1 \varphi_x\overline{\theta_x}dx+\frac{b}{\gamma\tau}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta\overline{\psi}_xdx+\frac{b}{\gamma\tau}\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{l\rho_2}{b}\right)\int_0^1 \theta\overline{w}_xdx$$

$$+\frac{b}{\gamma\tau}\left[\left(1-\frac{\tau\rho_3 k}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_1}{k}-\frac{\rho_2}{b}\right)-\frac{\gamma^2\tau}{b}\right]\int_0^1 \theta_x\overline{\chi}dx-\frac{lk_0\rho_2\rho_3}{\gamma\rho_1}\int_0^1 \theta\overline{(w_x-l\varphi)}dx$$

$$-\frac{\rho_2\beta}{\gamma\tau}\int_0^1 q\ \overline{\varphi_x}dx+\rho_2\left(\frac{bl^2}{k_0}-1\right)\int_0^1 v\overline{v}dx+l\rho_2\int_0^1 v\overline{\omega}dx+\frac{l\rho_2 b}{k_0}\int_0^1 \omega\overline{v}dx$$

$$+\frac{blk_0\rho_3}{k\gamma}\int_0^1 \left(w_x-l\varphi\right)\overline{\theta}dx+\frac{b\beta\rho_1}{\tau k\gamma}\int_0^1 \varphi_x\overline{q}dx+bl\left(\frac{k_0}{k}-1\right)\int_0^1 \left(w_x-l\varphi\right)\overline{\psi}_xdx$$

$$+\frac{b^2l^2}{k_0}\int_0^1 \psi_x\overline{\psi_x}dx-\frac{\gamma bl^2}{k_0}\int_0^1 \theta\overline{\psi}_xdx$$

En passant à la partie réelle, les inégalités de Young, Cauchy-Schwarz et Poincaré avec la condition $k=k_0$ donnent

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}\left\|\varphi_x+\psi+lw\right\|^2 &\leq \frac{b}{\gamma\tau}\zeta\int_0^1 \theta_x\overline{(\varphi_x+\psi+lw)}dx+\varepsilon\left\|w_x-l\varphi\right\|^2+\eta\left\|\omega\right\|^2\\ &+\frac{2b^2l^2}{k_0}\left\|\psi_x\right\|^2+c_\eta\left\|v\right\|^2+c_\varepsilon\left\|\theta\right\|^2+c\left\|q\ \right\|^2\\ &+c\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

d'où le resultat voulu.

Maintenant on enonce le théorème principale .

Théorème 54 *Sous les hypothéses $k=k_0,\zeta=0$ et l est assez petit , le systéme* (3.1) *est exponentiellement stable.*

Preuve 55 - *On a montré dans le théorème d'existence et unicité que l'opérateure $\mathcal{A}$ est* *maximale monotone. Par conséquent, pour montrer que* $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A})$ *il suffit de montrer que* $\mathcal{A}$ *est injective c-à-d* $i\lambda\Phi - \mathcal{A}\Phi = 0$ *implique que* $\Phi = 0$. *En effet, de* (3.3) *on déduit que* $\|q\| = 0$ *et d'où* $q = 0$, *ensuite on utilise* $(3.1)_8$ *et la condition au bord sur* θ, *on trouve que* $\theta = 0$. *De même façon on trouve* $V = \psi = 0$.

On utilise $(3.1)_1$, $(3.1)_2$, $(3.1)_5$ *et* $(3.1)_6$, *pour trouver*

$$\rho_1\lambda^2\varphi + lk_0\left(w_x - l\varphi\right) = 0 \text{ et } \rho_1\lambda^2 w + k_0\left(w_x - l\varphi\right)_x = 0,$$

ce que implique que $\varphi_x - lw = 0$ *et d'autre part* $(3.1)_4$ *implique que* $\varphi_x + lw = 0$.

Alors $\varphi = w = \omega = u = 0$. *d'où* $\Phi = 0$.

- *On multiple l'équation de lemme 46 par* $\frac{b}{4k}$, *on a donc*

$$\frac{b^2}{8k}\left\|\psi_x\right\|^2 \leq \frac{\rho_2 b}{4k}\left\|v\right\|^2 + \frac{k}{4}\left\|\varphi_x + \psi + lw\right\|^2 + c\left\|\theta\right\|^2 + c\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}}.$$

On ajoute la dérnière égalité de lemme 52, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{k}{4}\left\|\varphi_x + \psi + lw\right\|^2 + \frac{b^2}{8k}(1 - 16l^2)\left\|\psi_x\right\|^2 \quad \leq \quad & \varepsilon\left\|w_x - l\varphi\right\|^2 + \eta\left\|\omega\right\|^2 \\ & + c_\eta\left\|v\right\|^2 + c_\varepsilon\left\|\theta\right\|^2 + c\left\|q\right\|^2 \\ & + c\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}},\end{aligned} \tag{3.6}$$

On additionne (3.6) *et le lemme 48, on voit que*

$$\begin{aligned}& \frac{k}{4}\left(1 - 4l\right)\left\|\varphi_x + \psi + lw\right\|^2 + \frac{b^2}{8k}(1 - 16l^2)\left\|\psi_x\right\|^2 + \left(k_0 - \varepsilon\right)\left\|w_x - l\varphi\right\|^2 + \frac{\rho_1 l}{2}\left\|\omega\right\|^2 \\ \leq \quad & \rho_1 l\left\|u\right\|^2 + \eta\left\|\omega\right\|^2 + \frac{c_\eta}{|\lambda|}\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\theta\right\|_{\mathcal{H}} + c\left(1 + \frac{1}{|\lambda|}\right)\left\|q\right\|^2 \\ & + c_\eta\left(1 + \frac{1}{|\lambda|}\right)\left\|\Phi\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\mathcal{F}\right\|_{\mathcal{H}} + c_\varepsilon\left\|\theta\right\|^2\end{aligned} \tag{3.7}$$

ici, on choisit ε, l *et* η *sont assez petits tels que* $k_0 > \varepsilon > 0$, $\frac{1}{4} > l > 0$ *et* $l > \eta > 0$

alors, il résult que

$$
\begin{aligned}
& \|\varphi_x+\psi+lw\|^2+\|\psi_x\|^2+\|w_x-l\varphi\|^2+c\,(l-\eta)\,\|\omega\|^2 \\
\leq\ & c_0 l\,\|u\|^2+\frac{c_\eta}{|\lambda|}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\theta\|_{\mathcal{H}}+c\left(1+\frac{1}{|\lambda|}\right)\|q\|^2 \\
& +c_\eta\left(1+\frac{1}{|\lambda|}\right)\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}+c\,\|\theta\|^2
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

D'autre part de (3.8) *et le lemme 50 , on a*

$$
\begin{aligned}
(\rho_1-c_0 l)\,\|u\|+\rho_1\,\|\omega\| \ \leq\ & \frac{c_\eta}{|\lambda|}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\theta\|_{\mathcal{H}}+c\left(1+\frac{1}{|\lambda|}\right)\|q\|^2 \\
& +c_\eta\left(1+\frac{1}{|\lambda|}\right)\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}}+c\,\|\theta\|^2 .
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

En additionnant (3.8) *et* (3.9), *en choisissant* l, ϵ *et* η *assez petits, on déuit*

$$
\|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{c_\eta}{|\lambda|}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\theta\|_{\mathcal{H}}+c\left(1+\frac{1}{|\lambda|}\right)\|q\|^2+c\left(1+\frac{1}{|\lambda|}\right)\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} .
$$

On en déduit

$$
\|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{c}{|\lambda|}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\theta\|_{\mathcal{H}}+c\left(1+\frac{1}{|\lambda|}\right)\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} .
$$

lorsque $|\lambda|\to+\infty$, *la dérniere inégalité devient*

$$
\|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} .
$$

implique que

$$
\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \leq c\,\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}} .
$$

Ceci termine la démonstration

Remarque 56 *Les conditions* $k=k_0$ *et* $\zeta=0$ *sont aussi nécessaires pour le résultat de* *stabilité exponnentielle. voir [7]*

Résumé

Dans cette mémoire, on étude le comportement asymptotique d'un système de Bresse undimensionnel, où le flux de la chaleur est donnè par la loi de Cattaneo agissant à la rotation angulaire, où on trouve un rèsultat d'exictence et unicité et on prouve que le système est exponentiellement stable en fonction des certaines paramètres du système.

Abstract

In this memory we study the long time behavior asymptotic stability of a one dimensiona Bresse system where the heat conduction is given by Cattaneo law effective in the shear angle displacements, we on trouve the well-posedness of the system and prove that the system is exponentially stabl depending on some paramaters of the system.

Bibliographie

[1] Alabau-Boussouira F., Muñoz Rivera J. E., and Almeida Júnior D. S., Stability to weak dissipative Bresse system, J. Math. Anal. Appl., **374** (2), 481-498 (2011).

[2] Bresse J., Cours de mecanique appliquée par M. Bresse : Rsistance des matriaux et stabilit des constructions, (1859).

[3] Brezis.H, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Dunod, Paris (1999).

[4] Ferdjani R. et Maiza A., Mémoire master académique Sur la stabilité exponentielle des C_0-semi groupes Application a un système de type Timoshenko, université Hamma Lakhdar El oued, (2015).

[5] Guesmia A. and Kafini M., Bresse system with infnite memories, Math. Methods Appl.Sci., **38** (11), 2389-2402 (2015).

[6] Keddi A.,These de doctora, comportement asymptotique de quelques systémes thermoèlastique, université Djilali Liabes Sidi Bel Abbas, (2018).

[7] Keddi A. et al., Bresse system with second sound, applied mathematics and optimization , (2014).

[8] Liu Z. and Rao B., Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system, Zeitschrift fr Angew. Math. und Phys., **60** (1), 54-69 (2008).

[9] Liu Z. et Zheng S., Semi groups associated with dissipative systems, Chapman Hall/CRC, London, 398, (1999).

[10] Pazy A., semigroups of linear operators and application to partial differential equatios, Springer-Verlag, New York

[11] Santos M. L. and Almeida Junior, D.S., Numerical exponential decay to dissipative Bresse system, J. Appl. Math., 1-17 (2010).

[12] Soriano J. A., Charles W., and Schulz R., Asymptotic stability for Bresse systems, J. Math.Anal. Appl., **412** (1), 369-380 (2014).