Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Univérsité D'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

Rahmani Abdelkader

Thème

Problème de Cauchy avec impulsions

Soutenu publiquement le 02 /07 / 2019 devant le jury composé de :

Rahmane Mebrouk	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Président
Boudaoui Ahmed	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Examinateur
Roummani Bahya	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Encadreur

Année Universitaire : 2018-2019

Dédicace

Ce modeste travail est dédié :

À mes chèrs parents ma mère et mon père, pour leurs patiences, leurs amours, leurs soutiens et leurs encouragements.

À mes frères et soeurs, mes oncles et mes tantes.

À tous membres de ma grande famille " Rahmani ", chacun en son nom petit et grand.

À tous mes chèrs amis surtout "S. Mostapha " et mes compagnons de ce long chemin et tous les étudiants et étudiantes de ma promotion.

Remerciements

Je remercie Dieu de m'avoir aidé à accomplir ce travail, puis je veux exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour tant d'amours et de soutiens moraux.
J'adresse le grand remerciement à mon encadreur Dr.Roummani Bahia qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.
Je remercie aussi les professeurs de mathématiques et à tout ce qui m'ait enseigné au long de ma vie scolaire.
J'adresse mon sincère remerciement au secrétaire de notre département.
J'adresse aussi mon remerciements les plus vifs aux personnes qui m'aient apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction **7**

1 Préliminaires **9**

1.1 Définitions et notions fondamentales 9

1.2 Quelques théorèmes de point fixe 14

1.3 Quelques définitions d'analyse multivoque 17

1.4 Sélection 21

2 Problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires **25**

2.1 Équation différentielle ordinaire 25

2.2 Problème de Cauchy 26

2.3 Existence par méthodes théoriques 28

2.3.1 Théorème de Cauchy - Lipschitz 28

2.3.2 Théorème de Cauchy-Arzela-Peano 29

2.4 Méthodes numériques de résolution 31

2.4.1 Méthodes d'Euler 32

2.4.2 Méthodes de Taylor d'ordre p 33

2.4.3 Méthodes de type Runge-Kutta 34

3 Problème de Cauchy pour les équations différentielles impulsives **36**

3.1 L'espace des solutions 36

3.2 Résultats d'existence 39

3.2.1 Par théorème de Banach 39
3.2.2 Par l'Alternative non linéaire de Leray Schauder 41
3.2.3 Par théorème de Krasnoseleskii 47

4 Inclusions différentielles impulsives sur un intervalle compact 51

4.1 L'éxistence des solutions 51
4.1.1 Cas convexe 51
4.1.2 Cas non convexe 55

Conclusion 61

Bibliogrphie 62

Notations

$d(x, y)$	la distance entre x et y.
(E, d)	espace métrique E.
$(E, \\|.\\|)$	espace normé E.
$B(a, r)$	la boule ouverte de centre a et de rayon r.
$C(J, \mathbb{R})$	espace de fonctions continues de $J = [0, b]$ dans $\mathbb{R}$.
$L^1(J, \mathbb{R})$	espace des fonctions intégrable .
$AC(J, \mathbb{R})$	espace des fonctions absolument continues sur J.
$\overline{U}$	l'adhérence de U.
∂U	la frontière de U.
$conv(D)$	l'enveloppe convexe de D.
EDO	équation différentielle ordinaire.
H_d	la distance pseudo-métrique de Hausdorf

Introduction

La théorie des équations différentielles est un vaste domaine aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Celles-ci sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques comme pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste sans oublier la technique de datation par le C_{14} . Les équations différentielles définies sur la demi droite réelle positive modélisent beaucoup de phénomènes physique, par exemple dans l'étude du courant instable d'un gaz à travers un nuage [1] la physique du plasma [2] etc.

La théorie des équations différentielles ordinaires impulsives a été initialisée en 1960 par V. Milman et A. Myshkis et elle a été développée durant la période de 1960-1975 par certains chercheurs ukraniens et russes. Ensuite, de 1975 à 1990, le mérite du développement de cette théorie et de sa popularisation revient au mathématicien américain V. Lakshmikantham.
A partir de 1991, en plus de Lakshmikantham, d'autres mathématiciens comme L. Byszewski, D. Bainov contribuaient à l'enrichissement de la théorie des équations différentielles impulsives où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors [4].

D'autre part, les équations différentielles impulsives apparaient comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel.
Cependant, la situation est différente dans certains phénomènes physiques subisant des changements brusques au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, les systèmes biologiques (battements du coeur, flux du sang,...), la dynamique des

populations, la dynamique des cellules etc...
Les inclusions différentielles ordinaires impulsives et les inclusions différentielles fonctionnelles avec différentes conditions ont été intensément étudiées depuis plusieurs années.
En 1890, Peano [19] prouve que les problèmes de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires admet des solutions locales. Puis en 1923, Kneser [17] a montré que le théorème d'existence de Peano peut être formulé de telle manière que l'ensemble de toutes les solutions soit non seulement non vide mais est également compact et connexe.
Ce mémoire se compose de quatre chapitres, le premier chapitre sera consacré à des définitions et des notions générales dont on aura besoin dans les autres chapitres, le deuxième porte l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires du premier ordre par des méthodes théoriques et numériques,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in I \\ y\left(t_0\right) = y_0, \quad t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

où I un intervalle, $f : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction continue.
Le troisième chapitre traite quelques résultats théoriques d'existence et d'unicité des solutions pour un problème de Cauchy impulsives sur un intervalle compact.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)); & t \in J / \left\{t_1, \cdots, t_m\right\} \\ y\left(t_k^+\right) - y\left(t_k^-\right) = I_k\left(y\left(t_k\right)\right); & k = 1,2,3, \cdots, m \\ y(0) = a; & a \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2}$$

où $J = [0, b], \quad f : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction Carathéodory donnée, et $I_k \in C\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$, $y\left(t_k^+\right) = \lim_{h \to 0} y\left(t_k + h\right), y\left(t_k^-\right) = \lim_{h \to 0} y\left(t_k - h\right)$
Le dernier chapitre, traite l'existence des solutions d'un problème d'inclusion différentielle ordinaire impulsive du premier ordre sur un intervalle compact dans les deux cas, convexe et non convexe. :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in F(t, y(t)), & t \in J / \left\{t_1, \cdots, t_m\right\} \\ y\left(t_k^+\right) - y\left(t_k^-\right) = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right), & k = 1,2, \ldots, m \\ y(0) = a, & a \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

Oú $F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ est une multifonction , et $I_k \in C\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$, $\forall k = 1,2, \cdots, m$

Nous terminerons ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on introduit des notations, des définitions, des résultats qui serons nécessaire dans la suite.

1.1 Définitions et notions fondamentales

Définition 1.1. [5] Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant pour tout x, y dans E et α dans $\mathbb{K}$

i) $\|x\| = 0$ si seulement si $x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$(inégalité triangulaire).

Définition 1.2. Un espace vectoriel normé E est un espace de Banach s'il est complet. Autrement dit, E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

Exemple 1.1. $C\left([a, b], \mathbb{R}^n\right)$ avec a,$b \in \mathbb{R}^n$ est l'espace de toutes les fonctions y continues définient de $[a$,$b]$ dans $\mathbb{R}^n$. le nombre $\|y\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|y(t)\|$ défini une norme rendant $\left(C\left([a, b], \mathbb{R}^n\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ un espace de Banach.

On considère $C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de $J = [0, b]$ dans $\mathbb{R}$ avec la norme de Tchebychev

$$\|x\|_\infty = \sup\{\|x(t)\| : t \in J\},$$

et on considère $L^1(J,\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $x : J \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont Lebesgue intégrable avec la norme

$$\|x\|_1 = \int_0^b \|x(s)\| ds$$

On désigne par $AC(J,\mathbb{R})$: l'espace des fonctions absolument continues sur J. Notons $AC^i(J,\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui sont i-emme fois différentiables et dont la i-emme dérivée $y^{(i)}$ est absolument continue.

Définition 1.3. Soient $(\Omega_1,\mathfrak{F}_1)$ et $(\Omega_2,\mathfrak{F}_2)$ deux espaces mesurables. L'application $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est dite mesurable si pour tout $B \in \mathfrak{F}_2, f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}_1$.

Définition 1.4. (Fonction Carathéodory)
Soient X, Y deux espaces de Banach.
Une application $f : J \times X \longrightarrow Y$ est dite Carathéodory si f est vérifiée :
(1) $t \longrightarrow f(t,x)$ est mesurable pour tout $x \in X$
(2) $x \longrightarrow f(t,x)$ est continue pour tout $t \in J$
L'application f est dite L^1- Carathéodory si f est Carathéodory et on a $\forall q > 0$,
$\exists \ell_q \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$:

$$\|f(t,x)\| \leq \ell_q(t) \quad p.p \quad t \in J; \forall \|x\| \leq q$$

Exemple 1.2. Soient $h : J \longrightarrow Y$ une fonction mesurable et $g : X \longrightarrow Y$ une fonction continue, alors la fonction $f : J \times X \longrightarrow Y$ définie par $f(t,x) = h(t) + g(x)$ est Carathéodory.

Définition 1.5 (Fonction localement lipschitzienne). Soient J un intervalle, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : J \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. Soient $(t_0, y_0) \in I \times D$. Soit $U \subset D$ un voisinage du point y_0. On dit que f est lipschitzienne par rapport à la variable y dans le voisinage U s'il existe une constante $L > 0$ et il existe un voisinage $V \subset J$ du point t_0 tels que :

$$\|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))\| \leq L \|y_1(t) - y_2(t)\|$$

pour $y_1(t), y_2(t) \in U, t \in V$.

Exemple 1.3. La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$:

$$f(y) = \sqrt{y}$$

n'est pas lipschitzienne au voisinage de $y = 0$. En effet :

$$\lim_{(y_1,y_2)\to(0,0)} \frac{|f(y_1) - f(y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \infty$$

et par conséquence il ne peut pas exister aucune constante L vérifiant la condition de Lipschitz. Cependant f est Lipschitzienne sur tout intervalle $[a, b]$ avec $b > a > 0$. En effet pour tout $y_1(t), y_2(t) \in [a, b]$ on a :

$$\frac{\left|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}\right|}{|y_1 - y_2|} = \frac{1}{\left|\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}\right|} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Et donc la condition de Lipschitz est vérifiée avec $L = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Remarque 1.1.
- Si une fonction (d'une variable) est dérivable au voisinage d'un point et la dérivée est bornée dans ce voisinage, alors la fonction est localement lipschitzienne. La réciproque est fausse : il y a des fonctions lipschitziennes qui ne sont pas dérivables.
- Si une fonction est de classe C^1 alors elle est localement lipschitzienne.

Exemple 1.4. La fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$:

$$f(y) = |y|$$

est lipschitzienne au voisinage de tout $y \in \mathbb{R}$. En fait pour tout $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$|f(y_1) - f(y_2)| = ||y_1| - |y_2||$$

La condition de Lipschitz est donc vérifiée avec $L = 1$:

$$||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$$

Noter que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en $y = 0$. Cependant elle est lipshcitizienne.

Définition 1.6. Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Soit k un réel strictement positif. On dit que $f : X \to Y$ est Lipschitzienne de rapport k si

$$\forall x, y \in X : \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Si de plus $k < 1$, on dit que f est contractante.

Définition 1.7. Une partie M d'un espace métrique (E,d) est dite compacte si de toute suite d'élément de M, on peut extraire une sous suite convergente dans M.
M est relativement compacte si toute suite de M admet une sous suite convergente vers une limite appartenant à E (i.e si la fermeture de M est compact).

Définition 1.8. Soient E un espace vectoriel normé, Une partie C de E est dite convexe lorsque deux points quelconques appartient à C, le segment qui les joint est entièrement contenu dans C. c'est à dire

$$\forall x, y \in C, \quad \forall \theta \in [0{,}1] : \quad \theta x + (1-\theta)y \in C$$

Définition 1.9. (Enveloppe convexe) : Soit E un espace de Banach réel, pour tout partie finie $D \subset E$ on désigne par l'enveloppe convexe de D l'intersection de toutes les parties convexes contenant D, il est définit par la formule suivante :

$$\operatorname{conv}(D) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, t_i \geq 0, x_i \in D \right\}$$

avec

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$$

Lemme 1.1. *(Lemme de la projection de Schauder) : Soit K une partie compacte de E. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie D et une application $p : K \to \operatorname{conv}(D)$ continue telle que $\|p(x) - x\| < \varepsilon$ pour tout $x \in K$.*

Preuve Comme K est compact, il existe $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dans K tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. On dira que D est un εréseau de K. Pour tout $i = 1,...$ on définit les fonctions continues :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & \text{si } x \in B(x_i, \varepsilon) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i$. Alors $\phi(x) > 0$ pour tout $x \in K$ et on définit la projection de Schauder $p : K \to \operatorname{conv}(D)$ comme $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i$ alors

$$\|p(x) - x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} x_i - x \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi_i(x)}{\phi(x)} \|x_i - x\| < \varepsilon$$

Définition 1.10. Soient E et F deux espaces de Banach. on appelle opérateur borné toute application linéaire continue de E dans F.

Définition 1.11. (Opérateur complètement continu)
Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un ensemble relativement compact dans F.

Définition 1.12. (Ensemble uniformément borné)
On dit que $M \subset C(E, F)$ est uniformément borné s'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que :

$$\|x(t)\| \leq c, \forall x \in M$$

Définition 1.13. Soient (E, d) un espace métrique et F un un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $A(E; F)$ est équicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $f \in A$,on a

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } x, y \in E \quad \text{et } d(x, y) < \alpha(\varepsilon)$$

Théorème 1.2. *[5](Théorème d'Arzela-Ascoli)*
Soient E un espace métrique complet, et J un ensemble compact de $\mathbb{R}$, soit A un sous ensemble de $C(J, E)$; A est relativement compact dans $C(J, E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *L'ensemble A est uniformément borné i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :*

$$\|f(x)\| \leqslant K \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in A$$

2. *L'ensemble A est équicontinu i.e pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|t_1 - t_2| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A$$

3. *Pour tout* $x \in A$, *l'ensemble* $\{f(x); f \in A\} \subset E$ *est relativement compact.*

Lemme 1.3. *[5] Si* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace normé,* $M \subset E$ *et* $B : M \to E$ *une application contractante, alors* $(I - B)$ *est un homéomorphisme de* M *sur* $(I - B)M$.

Théorème 1.4. *[5](Convergence dominée de Lebesgue)*
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* (f_n) *une suite de fonctions de* L^1*. On suppose que*
$i)$ $f_n(x) \longrightarrow f(x)$*p.p sur* Ω.
$ii)$ *il existe une fonction* $g \in L^1$ *tel que pour chaque* n, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *p.p. sur* Ω.
Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L_1} \longrightarrow 0.$$

1.2 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 1.14. (Point fixe)
Un point fixe de $f : X \longrightarrow X$ est un point $x \in X$ qui est appliqué sur lui même, c.à.d. $f(x) = x$.

Théorème 1.5. *(Théorème du point fixe de Banach)*
Soit (E,d) un espace métrique complet non vide et soit $f : E \to E$ *une application contractante. Alors* f *possède un unique point fixe.*

Preuve (i) L'unicité :
On pose que $x,y \in E$ deux points fixes de f alors $f(x) = x, f(y) = y$

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

comme $0 < \alpha < 1$ donc $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
(ii)L'existence :
On choisit un point $x_0 \in E$ quelconque et on définit la suite $x_n = f(x_{n-1})$, on montre par récurrence que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on montre que la suite

$(x_n)_n$ est de Cauchy :

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_{n+p}\right) &\leq \sum_{n=0}^{p-1} d\left(x_{n+k}, x_{n+k+1}\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^{n+k} d\left(x_0, x_1\right) \\ &\leq \alpha^n \sum_{n=0}^{p-1} \alpha^k d\left(x_0, x_1\right) \\ &\leq \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} d\left(x_0, x_1\right) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d\left(x_0, x_1\right) \end{aligned}$$

et donc $d\left(x_n, x_{n+p}\right) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, ceci exprime le fait que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E, et comme E est un espace complet, il existe $x \in E$ tel que $x_n \rightarrow x$. Par continuité, $x_{n+1} = f\left(x_n\right) \rightarrow f(x)$, d'où $f(x) = x$. $\square$

Théorème 1.6. *[3] (Théorème du point fixe de Brouwer)*
Soit C un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.

Théorème 1.7. *[21](Théorème du point fixe de Schauder)*
Soit C un sous ensemble fermé et convexe d'un espace de Banach E et $f : C \rightarrow C$ une application continue telleque $f(C)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe.
Plus généralement, si C est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.

Preuve On note K l'adhérence de $f(C)$ i.e $K = \overline{f(C)}$ qui est par hypothèse un compact. $K \subset C$ car C est un fermé (si C est compact alors K = f(C) car f(C) est compact).
Pour chaque n, soit F_n un $\frac{1}{n}$réseau de K i.e $F_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset K$ telque $K \subset \cup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{1}{n}\right)$ et soit $P_n : K \rightarrow \operatorname{conv}\left(F_n\right)$ une projection de Schauder, comme C est convexe et F_n une partie de C alors $\operatorname{conv}\left(F_n\right) \subset C$ est un sous ensemble convexe et compact. On définit $f_n : \operatorname{conv}\left(F_n\right) \rightarrow \operatorname{conv}\left(F_n\right), f_n = P_n \circ f_{|\operatorname{conv}(F_n)}$. Par le théorème de Brouwer $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ possède au moins un point fixe y_n i.e $f_n(y_n) = y_n$. Or $\left(f\left(y_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ qui est compact et donc la suite $\left(f\left(y_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous suite convergente que nous

noterons de la même manière. On pose

$$y = \lim_{n\to\infty} f\left(y_n\right) \tag{1.1}$$

et on a $y = \lim_{n\to\infty} f\left(y_n\right) \in C$ car $\left(f\left(y_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset K \subset C$ fermé d'où contient les limites de tous ses suites convergentes.

Montrons $f(y) = y$. En effet :

$$\left\|f_n\left(y_n\right) - f\left(y_n\right)\right\| = \left\|P_n\left(f\left(y_n\right)\right) - f\left(y_n\right)\right\| < \frac{1}{n}$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} f\left(y_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n\left(y_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

D'aprés l'égalité (1.1) et par la continuité de f, on obtient : $f(y) = y$. Par conséquent f admet un point fixe. $\square$

Théorème 1.8. *[3] (Alternative non linéaire de Leray et Schauder)*
Soit E un e.v.n. et $B := \overline{B}(0, R)$ une boule fermée dans E.
Supposons que $f : B \longrightarrow E$ est une fonction continue , compacte. Alors

(a) ou bien f possède un point fixe dans B.

(b) ou bien il existe $x \in \partial B$ et $\lambda \in]0{,}1[$ tel que $x = \lambda f(x)$.

Théorème 1.9. *[21] (Théorème du point fixe de Krasnoselskii)*
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe et fermée de E. On suppose que $A, B : M \to E$ sont deux applications satisfaisant :

- *$Ax + By \in M, \forall x, y \in M$*
- *A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact,*
- *B est une contraction.*

Alors $\exists\, x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$.

Preuve Soient A, B deux applications vérifiant l'hypothèse, on a B est contractant alors $\exists\alpha$ telque $0 < \alpha < 1$ et

$$\|B(x) - B(y)\| \leq \alpha\|x - y\|, \forall x, y \in M.$$

D'aprés le lemme (1.3) :$(I-B) : M \to (I-B)M$ est un homeomorphisme alors $(I-B)^{-1}$ existe et continue sur $(I-B)M$. D'autre part, pour tout $y \in M$ l'équation $x = B(x)+A(y)$ admet unique solution $x \in M$ puisque l'application $x \mapsto Bx + Ay$ définit une contraction de M dans lui même grâce à théoreme de Banach. Ainsi $A(y) \in (I-B)M$ pour tout $y \in M$ et $(I-B)^{-1}A : M \to M$ est une application continue car elle est composée de deux applications continues. Comme A est une application compact alors
$(I-B)^{-1}A : M \to M$ est aussi compact car : si A est compact alors $AM \subset K$ avec K compact de E.
$(I-B)^{-1}(AM) \subset (I-B)^{-1}(K)$ avec $(I-B)^{-1}(K)$ compact car $(I-B)^{-1}$ est continue donc $(I-B)^{-1}A : M \to M$ est compact.
D'aprés le théorème de Schauder, $(I-B)^{-1}A$ possède un point fixe dans M. $\square$

1.3 Quelques définitions d'analyse multivoque

Pour un espace métrique (X, d) , les notations suivantes seront employées dans tout ce mémoire :

- $\mathcal{P}(X) = \{A \subset X : A \neq \phi\}$.
- $\{A \in \mathcal{P}(X) : A$ possede la proprieté $''p''\}$, avec p = f(fermé) , p = b(borné) , p = cp(compact), p = cv(convexe), etc. Alors,
- $\mathcal{P}_f(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ ferme}\}$
- $\mathcal{P}_{cp}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ compact}\}$.
- $\mathcal{P}_{cv}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ convexe}\}$, avec X muni d'une structure d'un espace vectoriel ,
- $\mathcal{P}_{cv,cp}(X) = \mathcal{P}_{cv}(X) \cap \mathcal{P}_{cp}(X)$, etc.

Définition 1.15. Une multifonction (ou application multivoque) (ou multi application) F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de Y . On notera $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ (les notations $F : X \longrightarrow 2^Y$ et $F : X \to \circ Y$ sont aussi utilisées dans la littérature).

Définition 1.16. On appelle graphe de la multifonction F , l'ensemble :

$$\text{Graph}(F) = \{(x; y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

F est $\grave{a}$ graphe fermé si $Graph(F)$ est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est fermée
.

Définition 1.17. On appelle image de F l'union des images $F(x)$:

$$\mathrm{Im}(F) = \cup_{x \in X} F(x)$$

et le domaine de F l'ensemble

$$DomF = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

Définition 1.18. Soit $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque. On dit que F est fortement mesurable si pour chaque fermé $U \subset Y$, l'ensemble $F^{-}(U) = \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est mesurable dans X .

Lemme 1.10. *[14]*
Soit X un espace normé séparable. L'application multivoque :
$F : J \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est mesurable si et seulement si pour chaque $x \in X$, la fonction $\varphi : J \longrightarrow [0, +\infty[$définie par

$$\varphi(t) = d(x, F(t)) = \inf\{\|x - y\| : y \in F(t)\}, t \in J$$

est Lebesgue mesurable.

Définition 1.19. Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $F : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une application multivoque.
On dit que F a un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in F(x)$.
L'ensemble des points fixes de F sera noté par $Fix(F)$.
On dit que F est à valeurs (fermées) convexes si $F(x)$ est (fermé) convexe pour tout $x \in X$ et F est totalement bornée si $F(A) = \cup_{x \in A} F(x)$ est borné dans E pour tout ensemble $A \subset E$, c.à.d.

$$\sup_{x \in A}\{\sup\{\|y\| : y \in F(x)\}\} < \infty$$

Définition 1.20. Soient (X, d), et (Y, ρ) deux espaces métriques et soit $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque.

On dit que F est semi-continu supérieurement (s.c.s) sur X si pour chaque $x_0 \in X$ l'ensemble $F(x_0)$ est un ensemble non vide, et si pour chaque sous ensemble ouvert N de Y contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage ouvert M de x_0 tel que $F(M) \subset N$ C'est-à-dire, si l'ensemble $F^{-}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$ est fermé pour n'importe quel ensemble fermé V dans Y. D'une manière équivalente , F est s.c.s si l'ensemble $F^{+}(V) = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ est ouvert pour chaque ouvert V dans Y.
La fonction F est semi-continue inférieurement (s.c.i) si l'image inverse de V par F

$$F^{-}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

est ouverte pour chaque ouvert V dans Y . D'une manière équivalente, F est s.c.i si le noyau de V par F

$$F^{+}(V) = \{x \in X : F(x) \subset V\}$$

est fermé pour n'importe quel ensemble fermé V dans Y.
En conclusion, pour une fonction à valeurs multiples $F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on prend

$$\|F(t,z)\|_{\mathcal{P}} := \sup\{\|v\|; v \in F(t,z)\}$$

.

Définition 1.21. Une fonction multivoque F est dite Carathéodory si :

(a) la fonction $t \longrightarrow F(t,z)$ est mesurable pour chaque $z \in \mathbb{R}^n$;

(b) pour tout $t \in J$ la fonction $z \longrightarrow F(t,z)$ est semi-continue supérieurement, p.p.

En outre, elle est L^1- Carathéodory si F est localement intégrablement bornée,
c.à.d. pour chaque nombre réel positif r , il existe $h_r \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|F(t,z)\|_{\mathcal{P}} \leq h_r(t) \quad p.p \quad t \in J, \forall \|z\| \leq r$$

Lemme 1.11. *Soit X un espace de Banach. Soit $F : [0,b] \times X \to \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ une multifonction L^1-Carathéodory avec $S_{F,y} \neq 0$ et soit Γ un opérateur linéaire continu de $L^1([0,b],X)$ dans $C([0,b],X)$, alors l'opérateur*

$$\Gamma \circ S_F : C([0,b],X) \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(C([0,b],X))$$
$$y \longrightarrow (\Gamma \circ S_F)(y) := \Gamma(S_{F,y})$$

est à graphe fermé dans $C([0,b],X) \times C([0,b],X)$, où

$$S_{F,y} = \left\{v \in L^1([0,b],X) : v(t) \in F(t,y(t)); t \in [0,b]\right\}$$

Définition 1.22. On considère la distance pseudo-métrique de Hausdorf :

$$H_d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

définie par

$$H_d(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(A,b)\right\}$$

où $d(A,b) = \inf_{a\in A} d(a,b), d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b)$. Donc $(\mathcal{P}_{b,f}(\mathbb{R}^n), H_d)$ est un espace métrique et $(\mathcal{P}_f(\mathbb{R}^n), H_d)$ est un espace métrique généralisé. D'ailleurs, H_d satisfait l'inégalité triangulaire. Et si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$d(x_0, A) = \inf_{x\in A} d(x_0, x) \text{ et } H_d(\{x_0\}, A) = \sup_{x\in A} d(x_0, x)$$

Définition 1.23. Une multifonction $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ s'appelle :

(a) $k-$Lipschitz s'il existe $k > 0$ telle que

$$H_d(F(x), F(y)) \leq kd(x,y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

(b) Une contraction s'il est $k-$Lipschitz avec $k < 1$.

Lemme 1.12. *[21] Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $F : X \to \mathcal{P}_f(X)$ est contractante, alors* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

Lemme 1.13. *[21] Pour une multifonction $F : X \to \mathcal{P}_{cp}(Y)$ s.c.s. on a*

$$\forall x_0 \in X, \lim_{x\to x_0} \sup F(x) = F(x_0)$$

Lemme 1.14. *[21] Soit $(K_n)_n \subset K$ tel que K est un sous ensemble compact de X, et X est un espace de Banach separable. Alors*

$$\overline{co}\left(\lim_{n\to\infty} \sup K_n\right) = \cap_{N>0}\overline{co}\left(\cup_{n\geq N} K_n\right)$$

Où co désigne l'enveloppe convexe.

1.4 Sélection

Définition 1.24. (Sélection)
Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite sélection de l'application multivoque $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ si,

$$f(x) \in F(x); \forall x \in X$$

Définition 1.25. (Sélection continue (mesurable))
Une sélection $f : X \longrightarrow Y$ d'une application multivoque $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite sélection continue(mesurable), si f est continue(mesurable).

Théorème 1.15. *(Kuratowski-Ryll Nardzewski)*
Soit (Ω, Σ) un espace mesurable , soit $F : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ une multi-fonction mesurable à valeurs fermées non vides et supposons X séparable. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans X . Pour tout $\omega \in \Omega$, il existe $n \in \mathbb{R}$ telle que

$$F(\omega) \cap B(x_n, 1) \neq \emptyset$$

On pose que $f_0(\omega) = x_n$, où n est le plus petit entier dont la distance à $F(\omega)$ est strictement inférieure à 1. On va vérifier que f_0 et mesurable . Soit V un ouvert dans X , alors il suffit de montrer que

$$f_0^{-1}(V) = \{\omega \in \Omega : f_0(\omega) \in V\} \in \Sigma$$

Par définition de f_0, on a

$$f_0^{-1}(x_n) = F^-(B(x_n, 1)) \setminus \cup_{m<n} F^-(B(x_m, 1))$$

D'oú

$$f_0^{-1}(V) = F^-(B(x_n, 1) \cap V) \setminus \cup_{m<n} F^-(B(x_m, 1) \cap V) \in \Sigma$$

Donc f_0 est mesurable. Comme X est séparable , alors on peut vérifier facilement qu'il existe $x_m \in X$ telle que

$$F(\omega) \cap B(x_n, 1) \cap B(x_m, 1/2) \neq \emptyset, \quad \forall \omega \in \Omega$$

Soit $f_1(\omega) = x_r$, où r est le plus petit entier naturel tel que pour $\omega \in \Omega$,

$$d\left(f_0(\omega), F(\omega)\right) < 1 \text{ et } d\left(f_0(\omega), f_1(\omega)\right) < 1/2$$

On suppose que

$$d\left(f_k(\omega), F(\omega)\right) < \frac{1}{2^k} \quad 0 \leq k \leq m, \forall \omega \in \Omega$$

et

$$d\left(f_k(\omega), f_{k+1}(\omega)\right) < \frac{1}{2^{k+1}} \quad 0 \leq k \leq m-1, \forall \omega \in \Omega$$

On montre qu'il existe f_{m+2} vérifiant

$$d\left(f_{m+1}(\omega), F(\omega)\right) < \frac{1}{2^{m+1}}, \forall \omega \in \Omega$$

et

$$d\left(f_{m+1}(\omega), f_{m+2}(\omega)\right) < \frac{1}{2^m}, \forall \omega \in \Omega$$

D'après la construction de f_m et f_{m+1} , on utilise la séparabilité de X pour définir f_{n+m+2}

$$F(\omega) \cap B\left(x_n, 1\right) \cap B\left(x_{n+1}, \frac{1}{2}\right) \cap \ldots \cap B\left(x_{n+m}, \frac{1}{2^m}\right) \cap B\left(x_{n+m+1}, \frac{1}{2^{m+1}}\right) \neq \emptyset, \forall \omega \in \Omega$$

où $f_{m+2}(\omega) = x_{n+m+1}$ et $n+m+1$ est le plus petit entier naturel vérifiant l'inégalité ci-dessus et

$$d\left(f_{n+m}(\omega), f_{n+m+1}(\omega)\right) < \frac{1}{2^m}, \forall \omega \in \Omega$$

On en déduit que

$$d\left(f_{m+1}(\omega), F(\omega)\right) < \frac{1}{2^{m+1}}, \forall \omega \in \Omega$$

et

$$d\left(f_{m+1}(\omega), f_{m+2}(\omega)\right) < \frac{1}{2^m}, \forall \omega \in \Omega$$

On pose que

$$S_n = \{\omega \in \Omega : f_k(\omega) = x_n\} = f_k^{-1}\left(x_n\right) \in \Sigma$$

Alors les ensembles $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ forment une partition de Ω en ensembles mesurables. Soit $\omega \in \Omega$. Alors il existe $n, k \in \mathbb{N}$ tel que $F(\omega) \cap B\left(x_n, 2^{-k}\right)$ (qui est non vide par hypothèse) ; de plus il existe un plus petit entier r tel que la distance entre x_r et $F(\omega) \cap B\left(x_n, 2^{-k}\right)$ soit inférieure strictement à $2^{-(k+1)}$. On pose que $f_{k+1}(\omega) = x_r$.

$$d\left(f_k(\omega), F(\omega)\right) \leq d\left(f_k(\omega), F(\omega) \cap B\left(x_n, 2^{-k}\right)\right) < 2^{-k}$$

et pour tout $z \in F(\omega)$

$$d\left(f_k(\omega), f_{k+1}(\omega)\right) \leq d\left(f_k(\omega), z\right) + d\left(z, f_{k+1}(\omega)\right) < 2^{-k} + 2^{-(k+1)} < 2^{-k+1}$$

Donc

$$\cup_{n\geq 1} S_n = \Omega$$

Pour tout ω , la suite $(f_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ st de Cauchy dans X , et donc converge vers un certain élément $f(\omega) \in X$ Alors f est mesurable (car f est une limite simple de fonctions mesurables). De plus, par

$$d\left(f_k(\omega), F(\omega)\right) < \frac{1}{2^k}$$

et du fait que F est à image fermée ,

$$f(\omega) \in F(\omega) \text{ pour tout } \omega \in \Omega$$

c'est-à-dire que f est une sélection mesurable de F. □

Théorème 1.16. *[12] Soit X un espace métrique séparable, et $F : X \longrightarrow \mathcal{P}_f(Y)$ une application multivoque . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) F est mesurable ;

(2) pour chaque $x \in X$, la fonction $\omega \longrightarrow h(\omega) := d(x, F(\omega))$ est mesurable ;

(3) F admet des sélections mesurables $f_n, n \in \mathbb{N}$ telles que

$$F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}}$$

Définition 1.26. [13] Un sous-ensemble $A \subset L^1(J, E)$ est décomposable si pour tout $u, v \in A$ et pour tout sous-ensemble Lebesgue mesurable $I \subset J$ on a :

$$u\chi_I + v\chi_{J\setminus I} \in A$$

où χ est la fonction caratéristique.

Définition 1.27. Soit $F : J \times E \to \mathcal{P}(E)$ une multi-application à valeurs fermées non vides, à F on associe l'opérateur multivoque $\mathcal{F} : C(J, E) \to \mathcal{P}\left(L^1(J, E)\right)$ défini par $\mathcal{F}(y) = S_{F,y}$. L'opérateur v est appelé opérateur de Nemyts'kii associé à F.

Définition 1.28. Soit une multi-application à valeurs compactes non vides. On dit que F est de type s.c.i. (t.s.c.i.) si l'opérateur de Nemyts'kii associé à F est s.c.i. et est à valeurs non vides et décomposables.

Une condition sufisante d'existence des fonctions de type s.c.i. est assurée par le résultat suivant :

Lemme 1.17. *[13]*
Soit $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ une multi-fonction intégrablement bornée vérifiant la condition suivante :

$$\begin{cases} (a) \quad (t,x) \mapsto F(t,x) \text{ est } \mathcal{L} \otimes \mathcal{B} \text{ mesurable.} \\ (b) \quad x \mapsto F(t,x) \text{ est } s.c.i.p.p.t \in J \end{cases}$$

Alors F est de type s.c.i.

Théorème 1.18. *[7] (théorème de sélection de Bressan-Colombo) Soit X un espace métrique séparable et E un espace de Banach. Alors tout opérateur s.c.i. $N : X \to \mathcal{P}_f\left(L^1(J,E)\right)$ à valeurs décomposables fermées possède une sélection continue,*
i.e. il existe une fonction univoque continue $f : X \to L^1(J,E)$ telle que $f(x) \in N(x)$ pour tout $x \in X$.

Lemme 1.19. *[7] Soient X un espace de Banach, C un sous ensemble convexe de X , U un sous ensemble ouvert de C, et $F : U \to \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ une multifonction s.c.s et compacte, alors :*

(a) ou bien $\exists u \in \partial U; \exists \lambda \in]0,1[$ tel que $u \in \lambda F(u)$,

(b) ou bien F admet un point fixe dans $\overline{U}$.

Chapitre 2

Problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires

Dans ce chapitre, on va donner quelques résultats d'existence et unicité d'un problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires du premier ordre par des méthodes théoriques et numériques.

2.1 Équation différentielle ordinaire

Une équation différentielle ordinaire, c'est une équation définie en termes d'une variable $t \in I$, I intervalle réel, une fonction inconnue $y : I \mapsto \mathbb{R}^n$ et ses dérivées par rapport à t, en formule :

$$\mathcal{F}\left(t, y(t), y'(t), y''(t), \cdots\right) = 0$$

Une fonction y qui vérifie $\mathcal{F}\left(t, y(t), y'(t), y'(t), \cdots\right) = 0$ s'appelle solution de l'EDO .
Une EDO est d'ordre k si elle contient les dérivées de y jusqu'à l'ordre k.

Exemple 2.1. Les équations :

$$y'(t) - t = 0$$
$$y^{(2)}(t) - y(t) = 0$$
$$e^{y^{(2)}(t)} - t^2 + y = 0$$

sont des équations différentielles ordinaires.

Si $n = 1$ on parle d'équation différentielle scalaire. Si $n > 1$ on parle d'équation différentielle vectorielle. Par exemple l'équation pour l'inconnue $y(t) = (y_1(t), y_2(t))) \in \mathbb{R}^2$:

$$y\prime(t) = \|y\|^2 y,$$

est un premier exemple simple d'équation vectorielle.

Exemple 2.2. L'*EDO* d'ordre 2 la plus célèbre est la deuxième loi de Newton :

$$F(x) = mx\prime\prime(t)$$

qui décrit par exemple la dynamique d'un point matérielle soumis à la résultante des forces F.

On peut écrire la loi de Newton en termes du système :

$$\begin{cases} x\prime(t) = v \\ v\prime(t) = \frac{1}{m}F(x) \end{cases}$$

de deux équations d'ordre 1.

En general une équation scalaire d'ordre k peut être écrite comme un système de k équations d'ordre 1 .
Dans la suite on va considérer des équations différentielles d'ordre k sous la forme normale :

$$y^{(k)} = f\left(t, y, \cdots, y^{(k-1)}\right) \quad , \; k \in \mathbb{N}.$$

2.2 Problème de Cauchy

Soit I un intervalle, $f : I \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. On considère l'*EDO*

$$y\prime(t) = f(t, y(t)),$$

on peut penser à cette équation comme un phénomène évolutif en temps (la variable t). Comme le problème de déterminer toutes les primitives d'une fonction donnée, cette problème admet en genéral un nombre infini de solutions. Pour choisir une solution particulière on impose une condition initiale, c'est à dire

$$y\left(t_0\right) = y_0$$

ce qui veut dire que à l'instant initial t_0 la loi evolutive vaut y_0.

Définition 2.1. On appelle problème de Cauchy le problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in I \\ y\left(t_0\right) = y_0, \quad t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Définition 2.2. On appelle solution du probleme de Cauchy toute fonction $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $J \subset I, t_0 \in J$ qui vérifie :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in I \\ y\left(t_0\right) = y_0, \quad t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Notation : On note $(J; y)$ une solution telle que ci-dessus.

Définition 2.3. Forme integrale du solution
Un couple $(J; y)$ est solution du Problème de Cauchy si, et seulement si, l'equation integrale suivante est verifiee :

$$\forall t \in J, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$$

Définition 2.4. $(J; y)$ solution locale si $(J; y)$ solution et J voisinage de t_0 dans I.
-Prolongement de solution locale : si $(J; y)$ et $(\tilde{J}; \tilde{y})$ sont des solutions locales, on dit que $(\tilde{J}; \tilde{y})$ prolonge $(J; y)$ si $\tilde{J}$ contient J et y coincide avec $\tilde{y}$ sur J ; dans ce cas on dit aussi que $(J; y)$ est restriction de $(\tilde{J}; \tilde{y})$.
-Solution maximale : une solution locale $(J; y)$ est dite maximale si elle n'a pas d'autre prolongement.
-Solution globale : une solution locale $(J; y)$ est dite globale si elle est definie partout, ie. si $I = J$

2.3 Existence par méthodes théoriques

2.3.1 Théorème de Cauchy - Lipschitz

Théorème 2.1. *[9]Cauchy - Lipschitz*
Soient I un intervalle, D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times D \mapsto \mathbb{R}^n$. Soient $(t_0, y_0) \in I \times D$. Si f est continue et lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable dans un voisinage du point y_0, alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y\prime(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0, & t_0 \in I, y_0 \in D \end{cases}$$

admet une unique solution $\overline{y}$ définie dans un voisinage du point t_0.
De plus la solution est de classe C^1 dans ce voisinage.

Preuve -Cylindre de sécurité
Comme I et D sont ouverts, il existe $S_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ un cylindre inclus dans $I \times D$.

Comme f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, on peut choisir r_0 assez petit pour que f soit k -lipschitzienne sur S_0.
De plus, sur S_0, f est bornée par une constante M.
Soit $T \leqslant T_0$, et y une solution du problème de Cauchy définie au moins sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$. Supposons qu'elle sorte du cylindre $S = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ au temps $\tau \in [t_0 - T, t_0 + T]$ alors, par continuité,

$$r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u) \mathrm{d}u \right\| \leqslant TM$$

Donc si $T \leqslant \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$, alors toute solution définie sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$.
On nommera cylindre de sécurité l'ensemble $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$.
- Application du théorème de point fixe de Banach
On note $\mathcal{F} = C\left([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0)\right)$ et pour $y \in \mathcal{F}$, on appelle $\phi(y)$ la fonction définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ comme suit :

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) \mathrm{d}u$$

Comme $\mathcal{F}$ muni de la norme uniforme est une partie complète, et comme $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, on va appliquer un théorème de point fixe de Banach.
Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
|\phi(y_1) - \phi(y_2)|(t) &= \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(u, y_1(u)) - f(u, y_2(u)) \right) \mathrm{d}u \right| \\
&\leqslant k \int_{t_0}^{t} |y_1(u) - y_2(u)| \,\mathrm{d}u \\
&\leqslant kT \|y_1 - y_2\|
\end{aligned}$$

Donc $\|\phi(y_1) - \phi(y_2)\| \leqslant kT \|y_1 - y_2\|$. Et en particulier, si on choisit $T < \frac{1}{k}$, alors ϕ est contractante.
On a donc existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.
-

2.3.2 Théorème de Cauchy-Arzela-Peano

Si f est seulement continue, le théorème de Cauchy-Arzela-Peano donne l'existence d'une solution.

Théorème 2.2. *[22]*
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue.
Alors, si $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème suivant admet au moins une solution y de classe C^1 définie sur un certain intervalle dans I de la forme $[t_0 - T, t_0 + T]$ avec $T > 0$.

$$(P) : \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Preuve -Cylindre de sécurité
Comme I et Ω sont ouverts, il existe $S_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ un cylindre inclus dans $I \times \Omega$.
S_0 est compact donc f est bornée sur S_0 par une constante M.
Soit $T \leqslant T_0$, et y une solution du problème définie au moins sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$. Supposons qu'elle sorte du cylindre $S = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ au temps $\tau \in [t_0 - T, t_0 + T]$

alors, par continuité,

$$r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u)\mathrm{d}u \right\| \leqslant TM$$

Donc si $T \leqslant \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$, alors toute solution définie sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste dans la boule $\overline{B}\,(y_0, r_0)$. On nommera cylindre de sécurité l'ensemble $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}\,(y_0, r_0)$.

-Application du théorème de point fixe de Schauder

On note $E = C\left([t_0 - T, t_0 + T], \mathbb{R}^n\right)$ et $F = C\left([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}\,(y_0, r_0)\right)$. Alors E est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel normé et F est un convexe fermé non vide.

Pour $y \in F$, on appelle $\phi(y)$ la fonction définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ comme suit :

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u$$

Par convergence dominée, ϕ est continue, puis comme $MT \leqslant r_0$, on a $\phi : F \to F$.

Supposons que $\phi(F)$ est relativement compacte, alors par le théorème de Schauder, on a existence d'un point fixe dans F de ϕ, c'est à dire une solution à notre équation différentielle définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

- $\phi(F)$ est relativement compacte

$[t_0 - T, t_0 + T]$ est compact.

-On a

$$\begin{aligned} \| \phi(y)(t) \| &= \| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u \| \\ &\leq \| y_0 \| + \int_{t_0}^{t} \| f(u, y(u)) \| \,\mathrm{d}u \\ &\leq \| y_0 \| + TM. \end{aligned}$$

D'où $\phi(F)$ est uniformement bornée.

-Puis si $y \in C$ et $t_1, t_2 \in [t_0 - T, t_0 + T]$ alors

$$\|\phi(y)(t_1) - \phi(y)(t_2)\| = \| \int_{t_2}^{t_1} f(u, y(u)))\mathrm{d}u\| \leqslant M\,|t_1 - t_2|$$

On en déduit que les fonctions de $\phi(F)$ sont $M-$ lipschitziennes sur $[t_0 - T, t_0 + T]$, donc forment une famille équicontinue. Le théorème d'Ascoli permet alors de dire que $\phi(F)$ est relativement compacte. $\square$

2.4 Méthodes numériques de résolution

Pour des problèmes de Cauchy d'un intérêt pratique, on trouve rarement la solution y(t) exprimée avec une formule exacte. On a vu qu'une solution de problèmes de Cauchy est obtenue en intégrant de t_0 à t :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$$

Le problème avec cette solution est que l'inconnue y se trouve sous l'intégrale.
On reprend les notations précédentes concernant un cylindre de sécurité, et on ne s'occupe pour simplifier que des solutions à droite c'est à dire sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.
on supposera que f satisfait aux conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz. Ceci assure que le problème de Caushy admet une unique solution.On notera $t \mapsto y(t)$ la solution unique du problème sur $[t_0, t_0 + T]$ dont le graphe est contenu dans un cylindre de sécurité $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$
Nous avons choisi ici d'exposer le cas des équations unidimensionnelles dans le seul but de simplifier les notations ; le cas des systèmes dans $\mathbb{R}^n$ est tout à fait identique, à condition de considérer y et f comme des fonctions vectorielles.
Etant donné une subdivision $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ de $[t_0, t_0 + T]$; on cherche à déterminer des valeurs approchées y_n des valeurs $y(t_n)$; prises par la solution exacte y.
On notera les pas successifs

$$h_n = t_{n+1} - t_n, \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

et

$$h_{\max} = \max_n (h_n)$$

le maximum du pas.

Définition 2.5. Une méthode (ou schéma) à un pas explicite est une équation de récurrence de la forme

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n), \quad 0 \leq n \leq N - 1 \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

Le domaine de définition de Φ contient au moins $U \times [0, \delta], \delta > 0$

Définition 2.6. Un schéma à un pas est dit implicite s'il est de la forme

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \Phi\left(t_n, y_n, y_{n+1}, h_n\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ t_{n+1} = t_n + h_n \end{cases}$$

C'est-à-dire si Φ dépend non linéairement de y_{n+1}

Pour ce type de méthodes il s'agira le plus souvent de s'assurer que l'équation

$$y = y_n + h\Phi\left(t_n, y_n, y, h\right)$$

a une unique solution du moins pour tout h, assez petit. Dans les cas les plus courants cela résultera du théorème des fonctions implicites.

2.4.1 Méthodes d'Euler

Une façon d'obtenir une multitude de schémas, est d'intégrer le problème sur $[t_n, t_{n+1}]$

$$y\left(t_{n+1}\right) - y\left(t_n\right) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$$

et ensuite d'approcher l'intégrale.

Par exemple

- Intégration par la méthode des rectangles à gauche

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx h_n f\left(t_n, y\left(t_n\right)\right)$$

ce qui donne le schéma d'Euler explicite.

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_{n+1}, y_{n+1}\right)$$

- Intégration par la méthode des rectangles à droite

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx h_n f\left(t_{n+1}, y\left(t_{n+1}\right)\right)$$

ce qui donne le schéma d'Euler implicite

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(t_{n+1}, y_{n+1}\right)$$

-Intégration par la méthode du point milieu :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \approx h_n f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\right)$$

ici, on connaît uniquement la valeur de y_n ; et pour donner une approximation de la solution au point $t_n + \frac{h_n}{2}$; on utilise le schéma d'Euler explicite

$$y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right) \approx y\left(t_n\right) + \frac{h_n}{2} f\left(t_n, y\left(t_n\right)\right)$$

ce qui donne le schéma d'Euler modifié

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left(f\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f\left(t_n, y_n\right)\right)\right)$$

Exemple 2.3. on considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

dans l'intervalle temps $[0; T]$: La solution exacte est clairement donnée par $y(t) = e^{-t}$: On suppose que les pas de temps sont constants, c'est-à-dire $h_n = h = \frac{T}{N}, 0 \leq n \leq N-1$: Le schéma d'Euler explicite s'écrit dans ce cas :

$$y_{n+1} = y_n - hy_n = (1-h)y_n$$

et donc

$$y_{n+1} = (1-h)^n$$

d'où

$$y_N = (1-h)^{\frac{T}{h}} \to e^{-T} \text{ quand } h \to 0$$

2.4.2 Méthodes de Taylor d'ordre p

Supposons maintenant que f soit de classe C^p ; on a vu alors que la solution exacte y de problème est de classe C^{p+1} et on a défini des fonctions $f^{(k)}$ construites par récurrence à partir de f et de ses dérivées partielles telles que $y^{(k)}(t) = f^{[k-1]}(t, y(t))$; pour $k = 1, \ldots, p+1$: La formule de Taylor d'ordre p donne

$$y\left(t_n + h_n\right) = y\left(t_n\right) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} h_n^k f^{[k-1]}\left(t_n, y\left(t_n\right)\right) + o\left(h_n^p\right)$$

ou avec la formule de Taylor avec reste de Lagrange :

$$y\left(t_n+h_n\right)=y\left(t_n\right)+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}h_n^k f^{[k-1]}\left(t_n,y\left(t_n\right)\right)+\frac{1}{(p+1)!}h_n^{p+1}f^{[p]}\left(t_n+\theta h_n,y\left(t_n+\theta h_n\right)\right),\theta\in]0,1[$$

On est donc amené à considérer l'algorithme suivant, appelé méthode de Taylor d'ordre p

$$(\mathcal{T}_p)\qquad\left\{\begin{array}{l} y_{n+1}=y_n+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}h_n^k f^{[k-1]}\left(t_n,y_n\right)\\ t_{n+1}=t_n+h_n\end{array}\right.$$

D'après la définition 2.5, cet algorithme correspond au choix $\Phi(t,y,h)=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}h^{k-1}f^{[k-1]}(t,y(t))$:
On peut remarquer facilement que la méthode d'Euler n'est autre que la méthode de Taylor $(\mathcal{T}_1)$.
Remarque : La méthode de Taylor n'est en général pas utilisée en pratique car le calcul des valeurs $f^{[k]}$ est trop coûteux.

2.4.3 Méthodes de type Runge-Kutta

Les méthodes de type Runge-Kutta permettent d'obtenir une plus grande précision que les méthodes d'Euler (dans le sens où elles donnent en général des solutions numériques plus proches des solutions analytiques que les méthodes d'Euler). Cette précision est obtenue par l'utilisation d'un pas de calcul intermédiare. Les deux méthodes de Runge-Kutta les plus employées sont l'algorithme dit $(RK2)$ à deux pas de calcul et l'algorithme dit $(RK4)$ à quatre pas de calcul.

Description de la méthode

On considère comme d'habitude le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{ll} y'(t)=f(t,y(t)) & (E)\\ y\left(t_0\right)=y_0 & (I)\end{array}\right.$$

avec une solution exacte $y(t)$ sur $[t_0;t_0+T]$ et une subdivision $t_0<t_1<\ldots<t_N=t_0+T$
L'idée est de calculer par récurrence les points $(t_n;y_n)$ en utilisant des points intermédiaires $(t_{n,i},y_{n,i})$ avec

$$t_{n,i}=t_n+c_ih_n,\quad 1\leq i\leq q,\quad c_i\in[0,1]$$

A chacun de ces points on associe la pente correspondante

$$p_{n,i} = f\left(t_{n,i}, y_{n,i}\right)$$

Soit y la solution exacte de l'équation (E) : On a

$$\begin{aligned} y\left(t_{n,i}\right) &= y\left(t_n\right) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t)) dt \\ &= y\left(t_n\right) + h_n \int_0^{c_i} f\left(t_n + uh_n, y\left(t_n + uh_n\right)\right) du \end{aligned}$$

grâce au changement de variable $t = t_n + uh_n$: De même

$$y\left(t_{n+1}\right) = y\left(t_n\right) + h_n \int_0^1 f\left(t_n + uh_n, y\left(t_n + uh_n\right)\right) du$$

On se donne alors pour chaque $i = 1,2, \ldots, q$ une méthode d'intégration approchée

$$\int_0^{c_i} g(t) dt \simeq \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} g\left(c_j\right), \quad \left(M_i\right)$$

ces méthodes pouvant être différentes. On se donne également une méthode d'intégration approchée sur $[0; 1]$

$$\int_0^1 g(t) dt \simeq \sum_{j=1}^{q} b_j g\left(c_j\right)$$

En appliquant ces méthodes d'intégration à $g(u) = f\left(t_n + uh_n, y\left(t_n + uh_n\right)\right)$,il vient

$$y\left(t_{n,i}\right) \simeq y\left(t_n\right) + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f\left(t_{n,j}, y\left(t_{n,j}\right)\right)$$

$$y\left(t_{n+1}\right) \simeq y\left(t_n\right) + h_n \sum_{j=1}^{q} b_j f\left(t_{n,j}, y\left(t_{n,j}\right)\right)$$

La méthode de Runge-Kutta correspondante est définie par l'algorithme

$$\begin{cases} t_{n,i} = t_n + c_i h_n \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} p_{n,j} \\ p_{n,i} = f\left(t_{n,i}, y_{n,i}\right), \quad 1 \leq i \leq q \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{q} b_j p_{n,j} \end{cases}$$

Chapitre 3

Problème de Cauchy pour les équations différentielles impulsives

Ce chapitre traîte l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy sur les équations différentielles ordinaires impulsives de premier ordre sur un intervalle compact.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)); & t \in J/\left\{t_1, \cdots, t_m\right\} \\ y\left(t_k^+\right) - y\left(t_k^-\right) = I_k\left(y\left(t_k\right)\right); & k = 1{,}2{,}3, \cdots, m \\ y(0) = a; & a \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

où $J = [0, b]$, $\quad f : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction Carathéodory donnée, et $I_k \in C\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$, $y\left(t_k^+\right) = \lim_{h \to 0} y\left(t_k + h\right), y\left(t_k^-\right) = \lim_{h \to 0} y\left(t_k - h\right)$

3.1 L'espace des solutions

soient $J_k =]t_k, t_{k+1}], k = 1, \cdots, m; J_0 = [0, t_1]; 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} = b$ et soit y_k la restriction de la fonction y sur J_k. On considére l'espace :

$PC = \Big\{y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n / y_k \in C\left(J_k, \mathbb{R}^n\right), k = 0{,}1, \cdots, m,$ et $y\left(t_k^-\right)$ et $y\left(t_k^+\right)$ existent et satisfaint $y\left(t_k^-\right) = y\left(t_k\right), \forall k = 1{,}2, \cdots, m\Big\}$

muni de la norme :

$$\|y\|_{PC} = \max\left\{\|y\|_{J_k} : k = 0{,}1, \cdots, m\right\} = \sup_{t \in [0, b]} \|y(t)\|$$

oú

$$\|y\|_{J_k} = \sup_{t\in J_k} \|y(t)\|$$

Lemme 3.1. *[20] L'espace $(PC, \|\cdot\|_{PC})$ est un espace de Banach.*

Preuve Soit $(y_q)_q$ une suite de Cauchy dans PC , alors

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN, \forall q_0, q_1 \geq n_0 \Longrightarrow \|y_{q_0} - y_{q_1}\|_{PC} \leq \varepsilon$$

tq

$$\|y_{q_0} - y_{q_1}\|_{PC} = \sup_{t\in[0,b]} \|y_{q_0}(t) - y_{q_1}(t)\|$$

Comme $y_q \in PC$ alors $y_q \in C(J_0, \mathbb{R}^n)$, et on a

$$\|y_q - y_{q_1}\|_{J_0} \leq \|y_q - y_{q_1}\|_{PC} \leq \varepsilon$$

donc $(y_q)_q$ est une suite de Cauchy dans $C(J_0, \mathbb{R}^n)$ alors on a $\exists y_0 \in C(J_0, \mathbb{R}^n)$ tq

$$\|y_q - y_{q_0}\|_{J_0} \longrightarrow 0 \text{ quand } q \longrightarrow \infty$$

On a aussi $y_q \in C(J_1, \mathbb{R}^n)$, on considére la suite des fonctions :

$$\widetilde{y}_q(t) = \begin{cases} y_q(t); t \in]t_1, t_2] \\ y_q\left(t^+\right); t = t_1 \end{cases}$$

alors $(\widetilde{y}_q)_q$ est une suite de Cauchy dans $C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, donc $\exists y_1 \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$ tq $\lim_{q\to\infty} \widetilde{y}_q = y_1$

$$\lim_{q\to\infty} y_q = y_1; \quad \forall t \in]t_1, t_2]; \quad \lim_{q\to\infty} \widetilde{y}_q(t_1) = \lim_{q\longrightarrow\infty} y_q\left(t_1^+\right) = y_1(t_1)$$

Donc $\|y_q - y_1\|_{J_1} \longrightarrow 0$ quand $q \to \infty$

Par analogie, on peut continuer la démonstration jusqu'à l'étape "m", d'oú $\lim_{q\to\infty} \|y_q - y\|_{PC} = 0$; tq :

$$y(t) = \begin{cases} y_0(t); & t \in J_0 \\ y_1(t); & t \in J_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_m(t); & t \in J_m \end{cases}$$

Définition 3.1. Une fonction $y \in PC$ est dite solution du (3.1) si

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)), t \in J \\ y\left(t_k^+\right) - y\left(t_k^-\right) &= I_k\left(y\left(t_k\right)\right), k = 1{,}2, \cdots, m \end{aligned}$$

et

$$y(0) = a$$

.

Lemme 3.2. *[20]*
Une fonction $y \in PC \cap \cup_{k=1}^{m} AC\left(J_k, IR^n\right)$ est une solution du problème (3.1) si et seulement si :

$$y \in PC \cap \cup_{k=1}^{m} AC\left(J_k, IR^n\right), y(t) = a + \int_0^t f(s, y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k\left(y\left(t_k\right)\right), \quad t \in [0, b] \tag{3.2}$$

Preuve Soit $t \in J$
-si $t \in [0, t_1]$on a $y(t) = a + \int_0^t f(s, y(s))ds$.
-si $t \in [t_1, t_2]$, la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y\left(t_1^+\right) = y\left(t_1^-\right) + I_1\left(y\left(t_1\right)\right) \end{cases}$$

est donnée comme :

$$\begin{aligned} y(t) &= y\left(t_1^+\right) + \int_{t_1}^t f(s, y(s))ds \\ &= \left(y\left(t_1\right) + I_1\left(y\left(t_1\right)\right)\right) + \int_{t_1}^t f(s, y(s))ds \\ &= y\left(t_1\right) + \int_t^{t_1} f(s, y(s))ds + I_1\left(y\left(t_1\right)\right) \\ &= \left(a + \int_0^{t_1} f(s, y(s))ds\right) + \int_{t_1}^t f(s, y(s))ds + I_1\left(y\left(t_1\right)\right) \\ &= a + \int_0^t f(s, y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k\left(y\left(t_k\right)\right) \end{aligned}$$

et ainsi de suite

.

.

.

-si $t \in [t_m, b]$ on trouve aussi :

$$y(t) = a + \int_0^t f(s, y(s)) + \sum_{0<t_k<t} I_k\left(y\left(t_k\right)\right)$$

Inversement il est facile de démontrer que si y est une solution de l'équation integrale (3.2) alors y est solution du problème (3.1). □

3.2 Résultats d'existence

On utilisons trois méthodes pour montrer l'existence des solutions :

3.2.1 Par théorème de Banach

Théorème 3.3. *[18] Supposons qu'il existe une fonction $\ell \in L^1\left([0, b], \mathbb{R}^+\right)$ telle que :*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| < \ell(t)\|x - y\|; \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Alors le problème (3.1) admet une solution unique.

1.L'existence :

On considére le problème (3.1) sur $[0, t_1]$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)); \quad t \in J_0 = [0, t_1] \\ y(0) = a \end{cases} \tag{3.3}$$

On considére l'opérateur N_1 définie par

$$\begin{gathered} N_1 : C\left([0, t_1]; \mathbb{R}^n\right) \longrightarrow C\left([0, t_1]; \mathbb{R}^n\right) \\ y \quad \longrightarrow \quad N_1 y \\ N_1 y(t) = a + \int_0^t f(s, y(s)) ds; \quad t \in [0, t_1] \end{gathered}$$

Soient $x, y \in C\left([0, t_1]; \mathbb{R}^n\right)$, et $t \in [0, t_1]$

$$
\begin{aligned}
\|N_1x(t)-N_1y(t)\| &\leq \int_0^t \ell(s)\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\leq \frac{1}{\tau}\int_0^t \tau\ell(s)e^{\tau L(s)}ds\|x-y\|_{BC}; \quad L(t)=\int_0^t \ell(s)ds \\
&\leq \frac{1}{\tau}e^{\tau L(t)}\|x-y\|_{BC}
\end{aligned}
$$

Donc

$$e^{-\tau L(t)}\left\|N_1x(t)-N_1y(t)\right\| \leq \frac{1}{\tau}\|x-y\|_{BC}; t\in[0,t_1]$$

Alors

$$\left\|N_1x-N_1y\right\|_{BC} \leq \frac{1}{\tau}\|x-y\|_{BC}$$

oú , $\|y\|_{BC}=\sup_{t\in[0,t_1]} e^{-\tau L(t)}\|y(t)\|$.

pour $\tau\in[1,+\infty|; N_1$ est contractant, donc

$$\exists! y_0\in C\left([0,t_1];\mathbb{R}^n\right): N_1y_0=y_0$$

D'oú y_0 est la solution de (3.3).

- On considére le problème (3.1) sur $|t_1,t_2]$

$$\left\{\begin{array}{c}\dot{y}(t)=f(t,y(t)); \\ y\left(t_1^+\right)=y_0\left(t_1\right)+I_1\left(y_0\left(t_1\right)\right)\end{array}\right. \quad t\in J_1=]t_1,t_2] \tag{3.4}$$

On considére l'espace $C_*=\left\{y\in C\left(J_1,\mathbb{R}^n\right) \quad / y\left(t_1^+\right) \quad \text{existe}\right\}$, $(C_*;\|\cdot\|_{J_1})$ est un espace de Banach.

Soit

$$
\begin{aligned}
N_2: C_* &\longrightarrow C_* \\
y \quad &\longrightarrow N_2y
\end{aligned}
$$

$$N_2y(t)=y_0\left(t_1\right)+I_1\left(y_0\left(t_1\right)\right)+\textstyle\int_{t_1}^t f(s,y(s))ds; \quad t\in]t_1,t_2]$$

Soient $x,y\in C_*$, et $t\in[t_1,t_2]$

$$
\begin{aligned}
\|N_2x(t)-N_2y(t)\| &\leq \int_{t_1}^t \ell(s)\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\leq \frac{1}{\tau}\int_{t_1}^t \tau\ell(s)e^{\tau L(s)}ds\|x-y\|_{BC}; \quad L(t)=\int_{t_1}^t \ell(s)ds \\
&\leq \frac{1}{\tau}e^{\tau L(t)}\|x-y\|_{BC}
\end{aligned}
$$

Alors
$$e^{-\tau L(t)}\left\|N_2x(t)-N_2y(t)\right\|\leq\frac{1}{\tau}\|x-y\|_{BC};t\in]t_1,t_2]$$
Donc
$$\|N_2x-N_2y\|_{BC}\leq\frac{1}{\tau}\|x-y\|_{BC}$$
Alors pour $\tau\in[1,+\infty[;N_2$ est contractant, donc

$$\exists!y_1\in C(|t_1,t_2];\mathbb{R}^n):N_2y_1=y_1$$

et on a

$$y_1\left(t_1^+\right)=N_2y_1\left(t_1^+\right)=y_0\left(t_1\right)+I_1\left(y_0\left(t_1\right)\right)+\lim_{t\to t_1}\int_{t_1}^t f(s,y(s))ds$$

Donc y_1 est la solution de (3.4). Par suite, la solution du problème (3.1) est donnée par :
$$y_*(t)=\begin{cases}y_0(t), & t\in[0,t_1]\\ y_1(t), & t\in[t_1,t_2]\\ \vdots & \vdots\\ y_m(t), & t\in]t_m,b]\end{cases}$$

2. L'unicité :

Soient y_*,y_{**} deux solutions du problème de Cauchy (3.1) ; on va montrer que :
$y_*(t)=y_{**}(t),\forall t\in J=[0,b]$
Si $t\in J_0=[0,t_1]$ alors $y_*(t)=y_{**}(t),\forall t\in[0,t_1]$
Si $t\in J_i=|t_i,t_{i+1}]$ donc $y_*(t)=y_{**}(t),\forall t\in]t_i,t_{i+1}\};\quad y_*\left(t_i^+\right)=y_{**}\left(t_i^+\right),i\in\{1,2,\cdots,m\}$?
on a :$y_*\left(t_i^+\right)-y_*\left(t_i^-\right)=I_i\left(y_*\left(t_i\right)\right)$ implique que :
$y_*\left(t_i^+\right)=y_*\left(t_i^-\right)+I_i\left(y_*\left(t_i\right)\right)=y_{**}\left(t_i\right)+I_i\left(y_{**}\left(t_i\right)\right)=y_{**}\left(t_i^+\right)$

3.2.2 Par l'Alternative non linéaire de Leray Schauder

Lemme 3.4. *Soit M un sous ensemble de PC, M est relativement compact si :*

1) M est équicontinu

2) M est uniformement borné.

Preuve Supposons que

1) M est équicontinu

2) M est uniformement borné. □

Soit $(y_n)_n$ une suite de M, alors

- par hypothèse on a $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ équicontinue et uniformement borné dans $C([0, t_1], \mathbb{R}^n)$, donc d'aprés le théorème d'(Arzela-Ascoli) l'ensemble $\overline{\{y_n, n \in \mathbb{N}\}}$ est compacte dans $C([0, t_1], \mathbb{R}^n)$, alors

$$\exists (y_{n_k}) : y_{n_k} \longrightarrow y_0 \text{ dans } C([0, t_1], \mathbb{R}^n)$$

-Posons

$$\tilde{y}_n(t) = \begin{cases} y_n(t), t \in]t_1, t_2] \\ y_n\left(t_1^+\right), t = t_1 \end{cases}$$

donc $\{\widetilde{y}_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue et uniformement bornée dans $C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, et par le théorème d' (Arzela-Ascoli) l'ensemble $\overline{\{\widetilde{y}_n, n \in IN\}}$ est compacte dans $C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, on a alors

$$\exists (\widetilde{y}_{n_k}) : \widetilde{y}_{n_k} \longrightarrow y_1 \text{ dans } C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$$

Et ainsi de suite, on continue

.

.

. D'oú, il existe une sous suite de $(y_n)_n$ qui converge vers y dans $\overline{M}$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} y_0(t), & t \in [0, t_1] \\ y_1(t), & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \vdots \\ y_m(t), & t \in]t_m, b] \end{cases}$$

Théorème 3.5. *[20] Supposons qu'il existe une fonction continue $\psi : [0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$ croissante et $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\|f(t, y)\| \leq p(t)\psi(\|y\|); \forall t \in J, \forall y \in \mathbb{R}^n$$

avec

$$\int_0^b p(s)ds < \int_{\|a\|}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}$$

Alors le problème (3.1) admet au moins une solution.

Preuve Pour la démonstration nous utilisons "l'alternative non linéaire de "Leray et Schauder". On transforme le problème (3.2) en un problème de point fixe. On considére l'opérateur

$$N : PC\left(J, \mathbb{R}^n\right) \longrightarrow PC\left(J, \mathbb{R}^n\right)$$

défini par

$$Ny(t) = a + \int_0^t f(s, y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k\left(y\left(t_k\right)\right)$$

D'après le lemme (3.2) le point fixe de N est la solution du problème (3.1). On va montrer que N est complètement continu, la démonstration est donnée en 4 étapes.

Etape1 : N est continu :

Soit $(y_n)_n$ une suite dans $PC\left(J, \mathbb{R}^n\right)$ telle que $y_n \longrightarrow y$, il suffit de montrer que $Ny_n \longrightarrow Ny$ Pour tout $t \in J$. on a :

$$Ny_n(t) = a + \int_0^t f\left(s, y_n(s)\right) ds + \sum_{0<t_k<t} I_k\left(y_n\left(t_k\right)\right)$$

Alors

$$\begin{aligned} \left\|Ny_n(t) - Ny(t)\right\| \leq & \int_0^t \left\|f\left(s, y_n(s)\right) - f(s, y(s))\right\| ds \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left\|I_k\left(y_n\left(t_k\right)\right) - I_k\left(y\left(t_k\right)\right)\right\| \end{aligned}$$

Comme les $I_k, k = 1, \cdots, m$, sont des fonctions continues, et f est une fonction L^1-Carathéodory, et par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on a

$$\begin{aligned} \left\|Ny_n - Ny\right\|_{PC} \leq & \int_0^b \left\|f\left(s, y_n(s)\right) - f(s, y(s))\right\| ds \\ & + \sum_{k=1}^{m} \left\|I_k\left(y_n\left(t_k\right)\right) - I_k\left(y\left(t_k\right)\right)\right\| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Donc N est continu.

Etape2 : N transforme chaque ensemble borné en un ensemble borné dans l'espace $PC\left(J, \mathbb{R}^n\right)$:

Il suffit de montrer que pour chaque $q > 0, \exists \ell > 0$ tel que pour tout $y \in \mathcal{B}_q = \left\{y \in PC\left(J, \mathbb{R}^n\right) : \|y\|_{PC} \leq q\right\}$ on a

$$\|Ny\|_{PC} \leq \ell$$

Soit $y \in \mathcal{B}_q$, on a

$$\begin{aligned}\|Ny\|_{PC} &\leq \|a\| + \int_0^b \|f(s,y(s))\|ds + \sum_{k=1}^{m} \|I_k(y(t_k))\| \\ &\leq \|a\| + \int_0^b p(t)\psi(\|y\|_{PC})\,dt + \sum_{k=1}^{m} \|I_k(y(t_k))\| \\ &\leq \|a\| + \int_0^b p(t)\psi(q)dt + \sum_{k=1}^{m} \sup_{x\in B(0,q)} \|I_k(x)\| := \ell\end{aligned}$$

Etape3 : N a transformé chaque ensemble borné en un ensemble équicontinu dans l'espace $PC(J,\mathbb{R}^n)$:

Soit $\tau_1,\tau_2 \in J, \tau_1 < \tau_2$ et B_q la boule qui est définie dans l'étape (2), et soit $y \in B_q$, alors

1. I . Si $\tau_1 \neq t_i\,(ou$ bien $\tau_2 \neq t_i)\,, \forall i \in \{1{,}2,\cdots,m\},$ on a

$$\begin{aligned}\|Ny(\tau_2) - Ny(\tau_1)\| \leq &\int_{\tau_1}^{\tau_2} p(s)\psi(q)ds \\ &+ \sum_{\tau_1\leq t_k<\tau_2} \sup_{x\in\overline{B}(0,q)} \|I_k(x)\| \longrightarrow 0 \quad quand \quad \tau_1 \longrightarrow \tau_2\end{aligned}$$

2. Si $\tau_1 = t_i^-$, on considère $\delta_1 > 0$ tel que $\{t_k, k\neq i\} \cap [t_i-\delta_1, t_i+\delta_1] = \emptyset$ pour $0 < h < \delta_1$on a

$$\|Ny(t_i) - Ny(t_i-h)\| \leq \int_{t_i-h}^{t_i} p(s)\psi(q)ds \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0$$

3. Si $\tau_2 = t_i^+$, on considère $\delta_2 > 0$ tel que $\{t_k, k\neq i\} \cap [t_i-\delta_2, t_i+\delta_2] = \emptyset$, donc pour $0 < h < \delta_2$ on a :

$$\|Ny(t_i+h) - Ny(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_i+h} p(s)\psi(q)ds \longrightarrow 0 \quad quand \quad h \longrightarrow 0$$

Donc d'après les étapes 1, 2 et 3, et par "Arzela-Ascoli" on conclut que l'opérateur N est complètement continu.

Etape 4 : Estimation à priori :

Soit $y \in PC(J,\mathbb{R}^n)$ tel que $y = \lambda Ny,$ et $0 < \lambda < 1$

Alors pour tout $t \in [0,t_1]$ on a

$$y(t) = \lambda a + \lambda \int_0^t f(s,y(s))ds$$

donc

$$\|y(t)\| \leq \|a\| + \int_0^t p(s)\psi(\|y(s)\|)ds, \quad t \in [0, t_1]$$

Considérons l'application ϑ telle que

$$\vartheta(t) = \|a\| + \int_0^t p(s)\psi(\|y(s)\|)ds, \quad t \in [0, t_1]$$

Donc on a

$$\vartheta(0) = \|a\|, \quad \|y(t)\| \leq \vartheta(t), \quad t \in [0, t_1]$$

et

$$\dot{\vartheta}(t) = p(t)\psi(\|y(t)\|), \quad t \in [0, t_1]$$

Utilisons le fait que ψ soit croissante, on obtient

$$\dot{\vartheta}(t) \leq p(t)\psi(\vartheta(t)), \quad t \in [0, t_1]$$

Ce qui implique que pour chaque $t \in [0, t_1]$, on a

$$\int_{\vartheta(0)}^{\vartheta(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq \int_0^{t_1} p(s)ds$$

L'application $\Gamma_0(z) = \int_{\vartheta(0)}^{z} \frac{du}{\psi(u)}$ est continue croissante , alors Γ_0^{-1} existe et croissante et on a :

$$\vartheta(t) \leq \Gamma_0^{-1}\left(\int_0^{t_1} p(s)ds\right) := M_0$$

Comme pour tout $t \in [0, t_1]\,, \|y(t)\| \leq \vartheta(t),$ alors

$$\sup_{t \in [0, t_1]} \|y(t)\| \leq M_0$$

Maintenant, pour $t \in]t_1, t_2]$, on a

$$\begin{aligned} \left\|y\left(t_1^+\right)\right\| & \leq \|I_1\left(y\left(t_1\right)\right)\| + \|y\left(t_1\right)\| \\ & \leq \sup_{x \in \overline{B}(0, M_0)} \|I_1(x)\| + M_0 := N_1 \end{aligned}$$

$$y(t) = \lambda\left(y\left(t_1\right) + I_1\left(y\left(t_1\right)\right)\right) + \lambda \int_{t_1}^t f(s, y(s))ds$$

Alors

$$\|y(t)\| \leq N_1 + \int_{t_1}^t p(s)\psi(\|y(s)\|)ds, \quad t \in [t_1, t_2]$$

Considérons l'application ϑ_1 tq

$$\vartheta_1(t) = N_1 + \int_{t_1}^{t} p(s)\psi(\|y(s)\|)ds, \quad t \in [t_1, t_2]$$

Donc on a

$$\vartheta_1\left(t_1^+\right) = N_1, \quad \|y(t)\| \leq \vartheta_1(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

et

$$\dot{\vartheta}_1(t) = p(t)\psi(\|y(t)\|), \quad t \in [t_1, t_2]$$

ψ est croissante, donc

$$\dot{\vartheta}_1(t) \leq p(t)\psi\left(\vartheta_1(t)\right), \quad t \in [t_1, t_2]$$

Ce qui implique que pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on a

$$\int_{\vartheta_1\left(t_1^+\right)}^{\vartheta_1(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds$$

Si on considère l'application $\Gamma_1(z) = \int_{\vartheta\left(t_1^+\right)}^{z} \frac{du}{\psi(u)}$;on obtient :

$$\vartheta_1(t) \leq \Gamma_1^{-1}\left(\int_{t_1}^{t_2} p(s)ds\right) := M_1$$

Pour chaque $t \in [t_1, t_2]$, $\quad \|y(t)\| \leq \vartheta_1(t)$, alors , alors

$$\sup_{t\in[t_1,t_2]} \|y(t)\| \leq M_1$$

Et ainsi de suite on continue le processus jusqu'a l'intervalle $[t_m, b]$, $y\,|[t_m, b]$ est la solution du problème $y = \lambda Ny$, pour $0 < \lambda < 1$. On obtient qu'il existe une constante M_m telle que

$$\sup_{t\in[t_m,b]} \|y(t)\| \leq \Gamma_m^{-1}\left(\int_{t_m}^{b} p(s)ds\right) := M_m$$

Comme on a choisi y arbitrairement, alors pour toute solution y du problème (3.1) on a

$$\|y\|_{PC} \leq \max\left\{M_k : k = 0,1, \cdots, m\right\} := b^*$$

Soit l'ensemble

$$U = \{y \in PC : \|y\|_{PC} < b^* + 1\}$$

Par conséquant l'opérateur $N : \overline{U} \longrightarrow PC$ est complètement continu.
Par la définition de U il n'existe pas $y \in \partial U$ tel que $y = \lambda N y$ pour tout $\lambda \in]0,1[$.
Il reste le choix que N admette un point fixe $y \in \overline{U}$ qui est solution du problème (3.1).

3.2.3 Par théorème de Krasnoseleskii

Théorème 3.6. *[18] Supposons que :*

(H_1) *$f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction L^1-Carathédory,*

(H_2) *$I_k \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $k = 1,...,m$ avec $\exists c_k > 0$, telque*

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad \|I_k(x) - I_k(y)\| \le c_k \|x - y\|. \tag{3.5}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{m} c_k < 1. \tag{3.6}$$

sont vérifiées. Alors le problème (3.1) *admet au mois une solution.*

Preuve Considérons l'opérateur N défini par :

$$\begin{array}{rcl} N : PC(J,\mathbb{R}^n) & \to & PC(J,\mathbb{R}^n) \\ y & \to & (N(y))(t) = y_0 + \displaystyle\int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)) \end{array}$$

D'aprés le lemme (3.2) les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (3.1). On va appliquer le théorème de *Krasnoselskii* sur l'opérateur N :

$$N(y)(t) = a + \int_0^t f(s,y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)),$$

on l'ecrit sous la forme de la somme de deux applications A et B tel que : $N = A + B$ avec A est une contraction et B est complétement continue.
On suppose que :

$$A(y(t)) = y_0 + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)), \tag{3.7}$$

$$B(y(t)) = \int_0^t f(s,y(s))ds. \tag{3.8}$$

Le preuve est donné par les étapes suivants :

Etape1 Soit M une partie non vide, convexe et fermée de PC. On suppose que :

$A, B : M \to PC$.

M est défini par la formule suivante :

$$\exists l > 0, M = \{y \in PC, telque \quad \|y\|_{PC} \leq l\}.$$

On montre que $A(x) + B(y) \in M, \forall x, y \in M$:

Soient $x, y \in M$ il faut que $A(x) + B(y) \in M$,

$x, y \in M \Rightarrow \|x\|_{PC} \leq l \quad et \quad \|y\|_{PC} \leq l$,

On a :

$$\begin{aligned}
\|A(x(t)) + B(y(t))\| &= \|a + \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k^-)) + \int_0^t f(s,y(s))ds\| \\
&\leq \|a| + \| \sum_{0<t_k<t} I_k(x(t_k^-))\| + \| \int_0^t f(s,y(s))ds\| \\
&\leq \|a| + \sum_{0<t_k<t} \|I_k(x(t_k^-))\| + \int_0^t \|f(s,y(s))\|ds \\
&\leq \|a| + \sum_{k=1}^{m} \|I_k(x(t_k^-))\| + \int_0^t h_r(s)ds \\
&\leq \|a| + \sum_{k=1}^{m} \|I_k(x(t_k^-))\| + \|h_r\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

On a $\|x\|_{PC} \leq l$ donc $\|x(t_k^-)\| \leq l, k = 1,...,m$ donc $x(t_k^-) \in \bar{B}(0,l) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq l\}$.

Puisque les I_k sont continues sur le compact $\bar{B}(0,l)$ alors

$$\sup_{x \in \bar{B}(0,l)} \|I_k(x)\| < +\infty. \tag{3.9}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|A(x(t)) + B(y(t))\| &\leq \|a| + \sum_{k=1}^{m} \|I_k(x(t_k^-))\| + \|h_r\|_{L^1} \\
&\leq \|a| + \sum_{k=1}^{m} \sup_{x \in \bar{B}(0,l)} \|I_k(x)\| + \|h_r\|_{L^1} \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Donc $\|A(x(t)) + B(y(t))\|_{PC} \leq C$ avec C un constant positif.

Donc $A(x) + B(y) \in M$.

Etape2 : On montre que A est une contraction :

Soient $y,z \in PC\,(J,\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\|A(y(t)) - A(z(t))\| &= \| \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-)) - \sum_{0<t_k<t} I_k(z(t_k^-))\| \\
&= \| \sum_{0<t_k<t} \Big[I_k(y(t_k^-)) - I_k(z(t_k^-))\Big] \| \\
&\leq \sum_{0<t_k<t} \|I_k(y(t_k^-)) - I_k(z(t_k^-))\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} c_k \|y - z\|
\end{aligned}$$

et comme :

$$\sum_{k=1}^{m} c_k < 1. \tag{3.10}$$

Donc A est une contraction .

Etape3 : On montre que B est complétement continue en appliquant le théorème d'Arzela-Ascoli :

1. B transforme tout ensemble borné en un ensemble borné :

   Soit $y \in M$

$$\begin{aligned}
\|B(y(t))\| &= \left\| \int_0^t f(s,y(s))ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|f(s,y(s))\| \, ds \\
&\leq \int_0^t h_r(s)ds \\
&\leq \|h_r\|_{L^1}
\end{aligned}$$

2. B est équicontinu :

Soient $l_1, l_2 \in [0,b]$ tel que $l_1 < l_2$ et soit $y \in M$

$$\begin{aligned}
\|B(y(l_2)) - B(y(l_1))\| &= \left\| \int_0^{l_2} f(s,y(s))ds - \int_0^{l_1} f(s,y(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^{l_1} f(s,y(s))ds + \int_{l_1}^{l_2} f(s,y(s))ds - \int_0^{l_1} f(s,y(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_{l_1}^{l_2} f(s,y(s))ds \right\| \\
&\leq \int_{l_1}^{l_2} \|f(s,y(s))\|ds \\
&\leq \int_{l_1}^{l_2} h_r(s)ds.
\end{aligned}$$

Si $l_1 \to l_2$ alors $\|B(y(l_2)) - B(y(l_1))\| \to 0$.

3. B est continue :

   Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans PC converge vers y. Il existe un entier l tel que $\|y_n\|_{PC} \leq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|y\|_{PC} \leq l$ donc $y_n \in M$ et $y \in M$.

   D'aprés le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\begin{aligned}
\|B(y_n) - B(y)\| &= \left\| \int_0^t f(s,y_n(s))ds - \int_0^t f(s,y(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^t \left(f(s,y_n(s))ds - f(s,y(s))\right) ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))\|ds \to 0 \quad si \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

   Donc B est continu.

D'où d'aprés le théoreme de Krasnoselskii N admet un point fixe. $\square$

Chapitre 4

Inclusions différentielles impulsives sur un intervalle compact

Ce chapitre traite de l'existence des solutions d'un problème d'inclusion différentielle ordinaire impulsive du premier ordre sur un intervalle compact dans les deux cas, convexe et non convexe. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in F(t, y(t)), & t \in J/\{t_1, \cdots, t_m\} \\ y\left(t_k^+\right) - y\left(t_k^-\right) = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right), & k = 1,2,\ldots,m \\ y(0) = a, & a \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.1}$$

Où $F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une multifonction , et $I_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\forall k = 1,2,\cdots,m$

Définition 4.1. Une fonction $y \in PC \cap \cup_{k=1}^{m} AC(J_k, \mathbb{R}^n)$ est dite solution du probléme $(4 \cdot 1)$ s'il existe $v \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$ tel que $v(t) \in F(t, y(t))$ p.p $t \in J$, $\dot{y}(t) = v(t) \forall t \in J/\{t_1, \cdots, t_m\}$, $y\left(t_k^+\right) - y\left(t_k^-\right) = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right)$, $k = 1,2,\ldots,m$ et $y(0) = a$.

4.1 L'éxistence des solutions

4.1.1 Cas convexe

Théorème 4.1. *[20] Supposons qu'il existe une fonction continue croissante* $\psi : [0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ *, et* $p \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ *tel que*

$$\|F(t,u)\| \leq p(t)\psi(\|u\|) \quad \textit{pour p.p. } t \in J \textit{ et } u \in \mathbb{R}^n$$

avec

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)ds < \int_{N_k}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}, k = 0,1, \cdots, m$$

Où $N_0 = a$ *, et pour* $k = 1,2, \cdots, m+1$ *, on a :*

$$N_k = \sup_{t \in [t_{k-1}, t_k]} |I_{k-1}(y(t))| + M_{k-1}, y \in PC$$

$$M_{k-1} = \Gamma_{k-1}^{-1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s)ds \right)$$

avec

$$\Gamma_l(z) = \int_{N_{l-1}}^{z} \frac{du}{\psi(u)}, z \geq N_{l-1}, l \in \{1,2, \cdots, m\}$$

Alors si $y \in PC$ *est une solution du probléme* (4.1) *elle vérifie :*

$$\sup \{\|y(t)\|; t \in [t_{k-1}, t_k]\} \leq M_{k-1}, k = 1,2, \cdots, m+1$$

Par conséquent , quelque soit $y \in PC$ *solution du problème* (4.1) *, on a :*

$$\|y\|_{PC} \leq \max \{\|a\|, M_{k-1}; k = 1,2, \cdots, m+1\} := \widetilde{b}$$

Preuve Supposons qu'on a les conditions du théorème 4.1 , avec $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ est Carathéodory. Alors le problème (4.1) admet au moins une solution.

Considérons l'opérateur multivoque $N : PC \longrightarrow \mathcal{P}(PC)$ défini par :

$$N(y) = \left\{ h \in PC; h(t) = a + \int_0^t g(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k)), t \in [0, b] \right\}$$

Où $g \in S_{F,y} = \{v \in L^1 : v(t) \in F(t, y(t)) p.p.t \in J\}$ On va montrer que la multifonction N est compacte , s.c.s, et à valeurs compactes convexes. La preuve est donnée par des étapes .

Etape 1 : $N(y)$ est convexe pour tout $y \in PC$ Soient $h_1, h_2 \in N(y)$ alors il existe $g_1, g_2 \in S_{F,y}$ tel que pour chaque $t \in [0, b]$ on a :

$$h_1(t) = a + \int_0^t g_1(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k))$$

et

$$h_2(t) = a + \int_0^t g_2(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k))$$

soit $l \in]0{,}1[$. Pour tout $t \in [0, b]$ on a :

$$(lh_1 + (1-l)h_2)(t) = a + \int_0^t (lg_1 + (1-l)g_2)(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k))$$

Comme $S_{F,y}$ est convexe(car F est à valeurs convexes) alors

$$lh_1 + (1-l)h_2 \in Ny$$

.

Etape 2 : N transforme chaque ensemble borné à un ensemble borné dans PC.
Il suffit de montrer que

$$\exists \ell > 0, \forall y \in \mathcal{B}_q = \{y \in PC : \|y\| \leq q\}, \forall h \in N(y), \quad \text{on a } \|h\| \leq \ell$$

On a si $h \in N(y)$, alors il existe $g \in S_{F,y}$ tel que pour tout $t \in J$ on a :

$$h(t) = a + \int_0^t g(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k))$$

Alors pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
\|h(t)\| &\leq \|a\| + \int_0^t \|g(s)\|ds + \sum_{0<t_k<t} \|I_k(y(t_k))\| \\
&\leq \|a\| + \int_0^b \|F(s, y(s))\|ds + \sum_{k=1}^{m} \sup_{x\in\mathcal{B}_q} \|I_k(x)\| \\
&\leq \|a\| + \psi(q)\|p\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{m} \sup_{x\in\mathcal{B}_q} \|I_k(x)\|
\end{aligned}$$

Alors pour tout $h \in N(y)$, on a

$$\|h\| \leq \|a\| + \psi(q)\|p\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{m} \sup_{x\in\mathcal{B}_q} \|I_k(x)\| := \ell$$

Etape 3 : N transforme chaque ensemble borné en un ensemble équicontinu dans PC. Soient $\tau_1, \tau_2 \in J, \tau_1 < \tau_2$ et $\mathcal{B}_q$ la boule définie dans l'étape précédente. Pour tout $y \in \mathcal{B}_q$ et $h \in N(y)$ il existe $g \in S_{F,y}$ tel que

$$h(t) = a + \int_0^t g(s)ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k)), t \in J$$

Alors

$$\begin{aligned}\|h(\tau_2)-h(\tau_1)\| &\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2}\|g(s)\|ds+\sum_{\tau_1\leq t_k<\tau_2}\|I_k(y(t_k))\|\\ &\leq \psi(q)\int_{\tau_1}^{\tau_2}p(s)ds+\sum_{\tau_1\leq t_k<\tau_2}\sup_{x\in\mathcal{B}_q}\|I_k(x)\| \longrightarrow 0 \text{quand} \tau_2\rightarrow\tau_1\end{aligned}$$

Donc par l'étape 2 et 3, on obtient que N est compact.

Etape 4 : Le graphe de N est fermé. Soit $y_n \rightarrow y_*, h_n \in N(y_n)$, et $h_n \rightarrow h_*$ il suffit de montrer qu'il existe $g_* \in S_{F,y_*}$, tel que

$$h_*(t)=a+\int_0^t g_*(s)ds+\sum_{0<t_k<t} I_k(y_*(t_k)), t\in J$$

$h_n \in N(y_n)$, alors $\exists g_n \in S_{F,y_n}$ tel que :

$$h_n(t)=a+\int_0^t g_n(s)ds+\sum_{0<t_k<t} I_k(y_n(t_k)), t\in J$$

Comme les $I_k, k=1,\cdots,m$ sont continues, on a

$$\left\|\left(h_n(t)-a-\sum_{0<t_k<t}I_k(y_n(t_k))\right)-\left(h_*(t)-a-\sum_{0<t_k<t}I_k(y_*(t_k))\right)\right\|_{PC}\rightarrow 0$$

quand $n\rightarrow\infty$.

Soit Γ un opérateur linéaire continu, défini comme suit

$$\begin{aligned}\Gamma : L^1(J,\mathbb{R}^n) &\longrightarrow PC(J,\mathbb{R}^n)\\ g &\longrightarrow \Gamma(g)\end{aligned}$$

tel que

$$\Gamma(g)(t)=\int_0^t g(s)ds;\quad \forall t\in[0,b]$$

Par le lemme 1.4, l'opérateur $\Gamma\circ S_F$ est à graphe fermé , de plus on a

$$\left(h_n(t)-a-\sum_{0<t_k<t}I_k(y_n(t_k))\right)\in\Gamma(S_{F,y_n})$$

Alors

$$\left(h_*(t)-a-\sum_{0<t_k<t}I_k(y_*(t_k))\right)=\int_0^t g_*(s)ds$$

et $g_* \in S_{F,y_*}$.
Considérons l'ensemble

$$U = \left\{y \in PC : \|y\|_{PC} < \widetilde{b} + 1\right\}$$

Où $\widetilde{b}$ est la constante dans théorème 4.1 , donc on obtient que $N : \overline{U} \to \mathcal{P}(PC)$ est compacte et s.c.s , et par la définition de U il n'existe pas un $y \in \partial U$ tel que $y \in \lambda N(y), \forall \lambda \in]0,1[$ Donc par le lemme 1.19 on obtient que le problème (4.1) admet au moins une solution.

4.1.2 Cas non convexe

La preuve dans ce cas est basée sur l'alternative non linéaire de Leray Schawder combinée avec le théorème de sélection de Bressan.

Théorème 4.2. *[11] .Supposons qu'on a de plus les conditions du théorème (4.1), la condition suivante : F est à valeurs compactes, et*

$$(t, x) \mapsto F(t, x) \text{ est } \mathcal{L} \otimes \mathcal{B} \text{ mesurable.}$$
$$x \mapsto F(t, x) \text{ est s.c.i.p.p.} t \in J$$

Alors le problème (4.1) admet au moins une solution.

Preuve D'aprés les hypothèses on obtient que F est de type s.c.i. Donc par le théorème 1.18 il existe une fonction continue $f : PC \to L^1([0, b], \mathbb{R}^n)$ telle que $f(y) \in \mathcal{F}(y) = S_{F,y}$ pour tout $y \in PC$
Considérons le problème,

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t)), & t \in J - \{t_1, \cdots, t_m\} \\ y\left(t_k^+\right) - y\left(t_k^-\right) = I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right), & k = 1,2, \ldots, m \\ y(0) = a \end{cases} \tag{4.2}$$
□

Il est claire que si y est solution du problème (4.2), alors elle est aussi solution du problème (4.1)
Soit l'opérateur $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui est défini par

$$N(y)(t) = a + \int_0^t f(y(s))ds + \sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k)); t \in [0, b]$$

Comme f vérifie les conditions du théorème (3.5), alors le problème (4.2) admet au moins une solution, d'oú le problème (4.1) admet au moins une solution.

Théorème 4.3. *[11] Supposons que*

(1) *F est à valeurs compactes, avec $F(.,u) : [0,b] \to \mathcal{P}_f(\mathbb{R}^n)$ est mesurable pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.*

(2) *$H_d(F(t,u), F(t,\overline{u})) \leq \ell(t)\|u - \overline{u}\|$, pour tout $t \in [0,b]$ et $u, \overline{u} \in \mathbb{R}^n$, avec $\ell \in L^1([0,b], \mathbb{R}_+)$; et*

$$H_d(0, F(t,0)) \leq \ell(t), \quad \text{pour p.p. } t \in [0,b]$$

Alors le problème (4.1) admet au moins une solution.

Preuve Soit le problème

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in F(t, y(t)), & t \in [0, t_1] \\ y(0) = a \end{cases} \tag{4.3}$$

les solutions du problème (4.3) sont des points fixes de la multifonction

$$N : PC([0,t_1], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(PC([0,t_1], \mathbb{R}^n))$$
$$y \to N(y)$$

oú

$$N(y) = \left\{ h \in PC([0,t_1], \mathbb{R}^n) : h(t) = a + \int_0^t g(s)ds \right\},$$

et $g \in S_{F,y} = \{g \in L^1([0,t_1], \mathbb{R}^n) : g(t) \in F(t, y(t)) \quad \text{pour } p.p.t \in [0,t_1]\}$. Alors pour que le problème (4.3) admette des solutions, il suffit de montrer que N vérifie les conditions du lemme (1.12) .

Etape 1 : $N(y) \in \mathcal{P}_f(PC([0,t_1], \mathbb{R}^n))$ pour tout $y \in PC([0,t_1], \mathbb{R}^n)$.

Soit $(y_n)_n \in N(y)$ tel que $y_n \to \widetilde{y}$ dans $PC([0,t_1], \mathbb{R}^n)$, donc $\widetilde{y} \in PC([0,t_1], \mathbb{R}^n)$, et pour chaque $t \in [0,t_1]$

$$y_n \in a + \int_0^t F(s, y(s))ds$$

oú

$$\int_0^t F(s, y(s))ds = \left\{ \int_0^t v(s)ds; v \in S_{F,y} \right\}$$

Alors $\exists \left(g_n\right)_n \subset S_{F,y}$, tel que

$$y_n = a + \int_0^t g_n(s)ds, \forall n \in \mathbb{N}$$

Comme F est à valeurs compactes, et par l'hypothèse (2), on obtient que la suite $\left(g_n\right)_n$ admet une sous suite qui converge vers $g \in L^1\left([0,t_1],\mathbb{R}^n\right)$, avec $g \in S_{F,y}$. Alors pour tout $t \in [0,t_1]$

$$y_n(t) \to \widetilde{y}(t) \in a + \int_0^t F(s,y(s))ds$$

D'oú $\widetilde{y} \in N(y)$.

Etape2 : N est contractante.

Soient $y_1, y_2 \in PC\left([0,t_1],\mathbb{R}^n\right)$ et $h_1 \in N\left(y_1\right)$. Alors il existe $g_1 \in S_{F,y_1}$ tel que pour tout $t \in [0,t_1]$

$$h_1(t) = a + \int_0^t g_1(s)ds$$

par l'hypothèse (2), on a

$$H_d\left(F\left(t,y_1(t)\right),F\left(t,y_2(t)\right)\right) \leq \ell(t)\left\|y_1(t)-y_2(t)\right\|$$

alors il existe $\omega \in F\left(t,y_2(t)\right)$ tel que

$$\left\|g_1(t)-\omega\right\| \leq \ell(t)\left\|y_1(t)-y_2(t)\right\|, \quad t \in [0,t_1]$$

Considérons $U : [0,t_1] \to \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$, défini par

$$U(t) = \left\{\omega \in \mathbb{R}^n : \left\|g_1(t)-\omega\right\| \leq \ell(t)\left\|y_1(t)-y_2(t)\right\|\right\}$$

Comme la multifonction $V(t) = U(t) \cap F\left(t,y_2(t)\right)$ est mesurable, donc il existe g_2 sélection mesurable de V. Alors $g_2 \in S_{F,y_2}$ et

$$\left\|g_1(t)-g_2(t)\right\| \leq \ell(t)\left\|y_1(t)-y_2(t)\right\|, \quad \text{pour tout } t \in [0,t_1]$$

Posons pour $t \in [0,t_1]$

$$h_2(t) = a + \int_0^t g_2(s)ds$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\|h_1(t)-h_2(t)\| &\leq \int_0^t \|g_1(s)-g_2(s)\|\, ds\\ &\leq \int_0^t \ell(s)\, \|y_1(s)-y_2(s)\|\, ds\\ &\leq \frac{1}{\tau}\int_0^t \tau\ell(s)e^{\tau L(s)}ds)\, \|y_1-y_2\|_1\\ &\leq \frac{1}{\tau}e^{\tau L(t)}\, \|y_1-y_2\|_1\end{aligned}$$

oú $L(t)=\int_0^t \ell(s)ds, et\|x\|_1=\sup_{t\in[0,t_1]} e^{-\tau L(t)}\|x(t)\|$, on obtient que

$$\|h_1-h_2\|_1 \leq \frac{1}{\tau}\, \|y_1-y_2\|_1$$

, par analogie, on obtient

$$H_d\left(N\left(y_1\right), N\left(y_2\right)\right) \leq \frac{1}{\tau}\, \|y_1-y_2\|_1$$

D'oú , si on prend $\tau>1$ on trouve que N est cantractante, et par le lemme 1.12, N admet un point fixe y_1, qui est solution du problème (4.3).

Maintenant, considérons le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{y}(t)\in F(t,y(t)),\\ y\left(t_1^+\right)=y_1\left(t_1\right)+I_1\left(y_1\left(t_1^+\right)\right)\\ y(0)=a\end{array}\right. \tag{4.4}$$

□

les solutions du problème (4.4) sont des points fixes de la multifonction

$$\begin{gathered}N: PC\left(\left[t_1,t_2\right],\mathbb{R}^n\right)\rightarrow\mathcal{P}\left(PC\left(\left[t_1,t_2\right],\mathbb{R}^n\right)\right)\\ y\rightarrow N(y)\end{gathered}$$

oú

$$N(y)=\left\{h\in PC\left(\left[t_1,t_2\right],\mathbb{R}^n\right): h(t)=y_1\left(t_1\right)+I_1\left(y_1\left(t_1\right)\right)+\int_{t_1}^t g(s)ds\right\}$$

et $g\in S_{F,y}=\left\{g\in L^1\left(\left[t_1,t_2\right],IR^n\right): g(t)\in F(t,y(t)) \quad \text{pour } p.p.t\in\left[t_1,t_2\right]\right\}$. Alors pour que le problème (4.4) admette des solutions , il suffit de montrer que N vérifie les conditions du lemme 1.12.

Il est clair que $N(y)\in\mathcal{P}_f\left(PC\left(\left[t_1,t_2\right],\mathbb{R}^n\right)\right)$ pour tout $y\in PC\left(\left[t_1,t_2\right],\mathbb{R}^n\right)$, et pour

prouver que N est contractant il suffit de montrer que
$H_d\left(N\left(y_1\right), N\left(y_2\right)\right) \leq \gamma\left\|y_1-y_2\right\|$ pour tout $y_1, y_2 \in PC\left(\left[t_1, t_2\right], \mathbb{R}^n\right)$

$$\left(\text { où } \quad 0<\gamma<1\right)$$

Soient $y_1, y_2 \in PC\left(\left[0, t_1\right], \mathbb{R}^n\right)$ et $h_1 \in N\left(y_1\right)$ Alors il existe $g_1 \in S_{F, y_1}$ tel que pour tout $t \in\left[t_1, t_2\right]$

$$h_1(t)=y_1\left(t_1\right)+I_1\left(y_1\left(t_1\right)\right)+\int_{t_1}^t g_1(s) d s$$

par l'hypothèse (2), on a

$$H_d\left(F\left(t, y_1(t)\right), F\left(t, y_2(t)\right)\right) \leq \ell(t)\left\|y_1(t)-y_2(t)\right\|$$

alors il existe $\omega \in F\left(t, y_2(t)\right)$ tel que

$$\left\|g_1(t)-\omega\right\| \leq \ell(t)\left\|y_1(t)-y_2(t)\right\|, \quad t \in\left[t_1, t_2\right]$$

Considérons $U:\left[t_1, t_2\right] \rightarrow \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$, défini par

$$U(t)=\left\{\omega \in \mathbb{R}^n:\left\|g_1(t)-\omega\right\| \leq \ell(t)\left\|y_1(t)-y_2(t)\right\|\right\}$$

Comme la multifonction $V(t)=U(t) \cap F\left(t, y_2(t)\right)$ est mesurable, donc il existe g_2 selection mesurable de V, et d'aprés l'hypothèse (2) du théorème 3.5 on a $g_2 \in S_{F, y_2}$ et

$$\left\|g_1(t)-g_2(t)\right\| \leq \ell(t)\left\|y_1(t)-y_2(t)\right\|, \quad \text { pour tout } t \in\left[t_1, t_2\right]$$

Posons pour $t \in\left[t_1, t_2\right]$

$$h_2(t)=y_1\left(t_1\right)+I_1\left(y_1\left(t_1\right)\right)+\int_{t_1}^t g_2(s) d s$$

Donc on a

$$\begin{aligned}
\left\|h_1(t)-h_2(t)\right\| & \leq \int_{t_1}^t\left\|g_1(s)-g_2(s)\right\| d s \\
& \leq \int_{t_1}^t \ell(s)\left\|y_1(s)-y_2(s)\right\| d s \\
& \leq \frac{1}{\tau} e^{\tau L_1(t)}\left\|y_1-y_2\right\|_2
\end{aligned}$$

oú $L_1(t)=\int_{t_1}^t \ell(s) d s$, et $\|x\|_2=\sup _{t \in\left[t_1, t_2\right]} e^{-\tau L_1(t)}\|x(t)\|$, alors

$$\left\|h_1-h_2\right\|_2 \leq \frac{1}{\tau}\left\|y_1-y_2\right\|_2$$

par analogie, on obtient

$$H_d\left(N\left(y_1\right), N\left(y_2\right)\right) \leq \frac{1}{\tau}\left\|y_1-y_2\right\|_2$$

D'oú, si on prend $\tau > 1$ on trouve que N est cantractante, et par le lemme 1.12 ,
N admet un point fixe y_2, qui est solution du problème (4.4). Et ainsi de suite on continue le processus jusqu'à l'intervalle $[t_m, b]$.
D'oú, la solution du problème (4.1) est la suivante :

$$y(t)=\left\{\begin{array}{ll} y_1(t), & \text{si } t \in [0, t_1] \\ y_2(t), & \text{si } t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \\ y_{m+1}(t), & \text{si } t \in]t_m, b] \end{array}\right.$$

Conclusion

Les théorèmes de point fixe sont des outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres des problèmes(ordinaires, impulsives et autre), il consiste à transformer un problème donné en un problème de point fixe, les points fixes du problème transformé sont ainsi les solutions du problème donné.
Dans cette mémoire on a présenté quelque rèsultats théoriques et numériques d'existence des solutions d'un problème de Cauchy ordinaire.
On a cité aussi les résultats d'existence des solutions d'un problème de Cauchy pour les équations et inclusions différentielles impulsives où on a utilisé les théorèmes de points fixes : Banach, Shauder, Alternative non linéaire de Leray Schauder, Krasnoselskii,......

Dans notre future recherche, on s'intéresse aux équations différentielles impulsives avec retard, et aux système d'équations différentielles impulsives avec retard.

Bibliographie

[1] R.P.Agarwal and D.O'oregan , Infinite Interval Problems modelling the flow of a gaz through a semi-infinite porous medium,Stud ,Appl.Math.80(2002) ,245-257.

[2] R.P.Agarwal and D.O'oregan , *Infinite Interval Problems modelling phenomena which arise in the theory of plasma and electrical potential theory* ,Stud,Appl.Math.111(2003) 339-358.

[3] I. Belkhir,*Théorème du point fixe et ses applications*,Université des sciences et de technologie d'Oran, Juin 2010.

[4] M.Benchohra And P.W. Eloe , *On nonresonance impulsive functional differential equations with periodic boundary conditions*, Applied Mathematics E-Notes ,1(2001),65-72.

[5] H. Brézis,*Analyse Fonctionnelle, théorie et applications.*Dunod,1999.

[6] T. A. Burton, *Krasnoselskii's inversion principle and fixed points*, *Nonlinear Anal.* 30 (1997), 3975-3986.

[7] H. Covitz and S.B. Nadler Jr., *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces*, Israel J. Math, 8 (1970), 5-11.

[8] K.Deimling, *Nonlinear Fonctional Analysis* ,Springer -Verlag,Berlin,1985.

[9] J.P Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*,Collection Grenoble Sciences, EDP Sciences, 2016.

[10] M.Frigon And A.Granas, *Resultat de type Leray -Schauder pour des contractions sur des espaces de Fréchet*, Ann .Sci. Math, Québec ,22(1998),no.2,161-168.

[11] M. Frigon and A. Granas, *Théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles sans convexité*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 310 (1990) 819-822.

[12] A. Fryszkowski, Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps, Studia Math. 75 (1983), 163-174.

[13] A. Fryszkowski, *Fixed Point Theory for Decomposable Sets, Topological Fixed Point Theory and its Applications* , 2 Kluwer Academic Pulishers, Dordrecht, 2004

[14] Sh. Hu and N. Papageorglou, *Handbook of Multivalued Analysis*, Volume 1 : Theory, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[15] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional Analysis in Normed Spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[16] R.E. Kidder, *Unsteadyn flow of gaz through a semi-infinite porous medium* , J.Appl.Mech.27(1957) ,329-332.

[17] A. Kneser, *Uber die Losungen eine system gewohnlicher differential Gleichungen, das der Lipschizschen Bedingung nicht genugt*, S.B. Preuss. Wiss. Phys. Math. KL 4(1923) 171-174.

[18] V.Lakshmikantham , D. Bainov And P.S. Simenov, *Theory of Impulsive Differential Equations*,World Scientific ,Syngapore ,1989.

[19] G. Peano, *Démonstration de l'intégrabilite des équations differentielles ordinaires*, Mat. Annalen 37 (1890), 182-238.

[20] Roummani Bahya ,*Propriétés Topologiques et Géométriques de L'ensemble des Solutions pour Certaines Classes D'inclusions Différentielles Impulsives*, mémoire de magister ,Université Djillali Liabes de Sidi Bel-Abbès,2011.

[21] D.R. Smart, *Fixed Point Theorem*, Cambridge Tracts in Mathematics, No.66, Cambridge University Press, London.New York,1974.

[22] Yasmina Daikh, *Analyse Numérique des EDO*,Université de Jijel,Département de Mathématiques ,B.P. 98, Ouled Aissa ,18000, Jijel, Algérie.

[23] K. Yosida, *Functional Analysis* ,6th ed. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

الملخص: الهدف من هذه المذكرة، هو دراسة مسألة كوشي من أجل المعادلات التفاضلية الدفعية.هذه المذكرة تحتوي على أربعة فصول،الفصل الأول منها خصصناه لتقديم بعض التعريفات والمفاهيم والمبرهنات التي نحتاجها فيما يأتي من فصول. في الفصل الثاني تطرقنا لدراسة وجود ووحدانية الحلول لمسألة كوشي بالنسبة للمعادلات التفاضلية العادية وكذلك تقديم بعض الطرق العددية لايجاد الحل.الفصل الثالث خصصناه لدراسة وجود ووحدانية الحلول لمسألة كوشي بالنسبة للمعادلات التفاضلية الدفعية. وفي الفصل الأخير تطرقنا لوجود حلول لمسألة كوشي بالنسبة للمعادلات التفاضلية الاشتمالية.في كل الحالات اعتمدنا في دراستنا لايجاد الحلول على مبرهنات النقطة الصامدة (باناخ،شاودر.................) في التحليل العادي والمتعدد.

الكلمات المفتاحية: مسألة كوشي، المعادلات التفاضلية العادية، المعادلات التفاضلية النبضية، المعادلات التفاضلية الاشتمالية، مبرهنة النقطة الصامدة.

Résumé : Le but de ce mémoire est d'étudier le problème de Cauchy pour les équations différentielles impulsives. Le mémoire est divisé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre on va donner certains notations, définitions et des théorèmes dont on aura besoin dans les chapitres suivants. Dans le deusième chapitre, nous étudions le problème de Cauchy pour les équations ordinaires (l'existence et l'unicité des solutions et quelques méthodes numériques pour trouver la solution).Dans le troisième chapitre , nous étudions le problème de Cauchy pour les équations différentielles impulsives de premier ordre(l'existence et l'unicité des solutions). Dans le dernier chapitre, l'existence des solutions d'un problème d'inclusion différentielle ordinaire impulsive du premier ordre sur un intervalle compact dans les deux cas, convexe et non convexe. La méthode de résolution est basée sur le principe de point fixe de Shauder dand l'analyse univoque ou multivoque. En tous les cas, la méthode d'étudier l'existence est basée sur les théorèmes des points fixes dans l'analyse multivoque (Banach, Schauder, Alternative non linéaire de Leray Schauder et Krasnoselskii).

Mots clés: Problème de Cauchy, Equation différentielle ordinaire, Equation différentielle impulsive, Inclusion différentielle impulsive, Principe de point fixe.

Abstract: The aim of this thesis is to study Cauchy problem for the impulsive differential equations .The thesis is divided into four chapters. In the first chapter we give some notations, definitions and theorems that will be needed in the following chapters.

In the second chapter , we study the Cauchy problem for ordinary equations (the existence and the uniqueness of the solutions and some numerical methods to find the solution).

In the third Chapter , we study Caushy problem for impulsive differential equations(the existence and the uniqueness of the solutions). In the last Chapter , we study Caushy problem for differential inclusion (the existence of the solutions).

In all cases, the method of studying existence is based on the point fixed theorems (Banach, Shauder,Non linear alternative of L.Shauder and Krasnoselskii).

Key words: Caushy problem, Ordinary differential equation, Impulsive differential equation, impulsif differential inclusion, Fixed point principle.