Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ahmed Draia Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et Informatique

جامعة أحمد دراية.أدرار-الجزائر
Université Ahmed Draia.Adrar -Algérie

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

BELLAOUI Oum Kelthoum

Thème

Stabilité et bornitude des solutions de certains classes d'équations différentielles du troisième ordre non autonomes avec retard

---

Soutenu publiquement le 01 /07/2019

devant le jury composé de :

M. GASMI Laid	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Président
M. RAHMANE Mebrouk	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Rapporteur
M. FATMI Larbi	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Examinateur

2018–2019

Dédicace

C'est avec profonde gratitude et sincères mots, que je dédie ce modeste travail de fin d'étude à mes chers parents ; qui ont sacrifié leur vie pour mon réussite et j'ai éclairé le chemin par leurs conseils judicieux.

J'espère qu'un jour, je peux leur rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi que dieu leur donne le bonheur et longue vie.

Je dédie aussi ce travail à mon frère et mes soeurs, mes famille, mes amis, à tous mes professeurs qui m'ont enseigné et à tous mes chers.

Remerciements

Avant tout, je remercie, Dieu tout puissant de m'avoir donné le couroge, la force, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincère remerciement à mon encadreur **M. RAHMANE Mebrouk** pour le sujet intéressant qu'il m'a proposé. Je le remercie encore pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail. Sans ses idées et son expertise, réaliser ce modeste travail n'aurait pas été possible.

J'exprime mes sincères remerciements à **M. GASMI Laid**, pour m'avoir fait le grand honneur de présider ce jury de thèse.

Je souhaite remercier **M. FATMI Larbi**, et c'est un grand honneur pour moi il est partie du jury.

Mes remerciements ne seraient pas complets si je ne remerciais pas tous les professeurs de mathématiques et tous ceux qui m'ont enseigné dans ma vie universitaire.

Enfin, je remercie à toutes les personnes qui ont conribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction

Le domaine des équations différentielles est un ancien sujet qui demeure d'actualité et utile aux ingénieurs, aux scientifiques et aux mathématiciens. L'étude des équations différentielles a commencé avec la naissance du calcul, qui date des années 1660. Il convient de noter que les équations différentielles sont en grande partie liées au comportement qualitatif des solutions tel que la stabilité, l'instabilité, la convergence, la bornitude, ect. Ce sont des problèmes très importants dans la théorie et les applications des équations différentielles d'où l'intérêt de mentionner quelques-uns. Par exemple, en sciences appliquées des problèmes pratiques concernant la mécanique, l'économie, la théorie du contrôle, les sciences physiques sont associés aux équations différentielles non linéaires du deuxième, troisième, quatrième ordre et ordre supérieur. D'autre part, les équations différentielles du troisième ordre ont ètè révélées être des outils précieux dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. Auteurs remarquable ont étudié le comportement qualitatif des solutions des équations différentielles non linéaires du troisième ordre tels que Ademola et. al, [3, 4, 29] sur la stabilité uniforme et bornitude des solutions, Tejumola [16] et Tunç [9] sur la bornitude des solutions.
En outre, la stabilité et la bornitude des solutions continuent d'attirer l'attention de nombreux spécialistes et constituent l'un des problèmes les plus brûlants de la théorie du contrôle, des systèmes dynamiques, des systèmes avec retard et etc. Les systèmes d'équations différentielles avec retard sont devenus d'une importance primordiale dans tous les domaines de la science et en particulier dans les sciences biologiques (par exemple, la dynamique des populations et l'épidémiologie).

Dans notre thèse on s'intèresse aux équations du type

$$x''' + F(t, x, x', x'') = 0,$$

où plusieurs cas seront traités suivant F.
A la fin du 19 ème siècle, trois types de stabilité ont été établis pour le mouvement dans les systèmes dynamiques continus : stabilité de Lyapunov, la stabilité et la stabilité Zhukovskij Poincaré. Parmi elles, la stabilité de Lyapunov et la stabilité de Poincaré sont les plus connues. Jusqu'à présent, l'outil le plus efficace pour l'étude de la stabilitè et bornitude de solutions d'un système non linéaire donné est fourni par la théorie de Lyapunov [2], qui est la deuxième (ou directe) méthode de Lyapunov. La principale caractéristique de la méthode nécessite la construction d'une fonction, d'une fonctionnelle de Lyapunov [2]. Dans les soixantes dernières années, beaucoup de résultats intéressants ont été obtenus, en particulier sur les équations différentielles du troisième ordre non-linéaires avec ou sans retard. Cependant, les difficultés potentielles soulevées dans ce cas sont dues à la construction de la fonctionnelle de Lyapunov pour les équations différentielles non linéaires d'ordre supérieur. Comment construire les fonctionnelles de Lyapunov ?. Jusqu'à présent, aucun auteur n'en a discuté. En fait, il n'y a pas de méthode générale pour construire de telles fonctionnelles de Lyapunov.
A ce propos, on citera quelques travaux importants concernant la stabilité et bornitude des équations différentielles du troisième ordre, dont la plupart ont été réalisés à l'aide de fonctions de Lyapunov.

- **En 1959**, Ezeilo [19] a étudié la bornitude, quand $t \longmapsto +\infty$, des solutions de l'équation différentielle.

$$x''' + ax'' + bx' + f(x) = p(t).$$

- Ensuite, **en 1963**, Goldwyn et Narendra [21] ont discuté la stabilité globale de la solution nulle de l'équation de la forme

$$x''' + h(x')\,x'' + \mu(x')\,x' + k(x)x = 0.$$

- Par suite, **en 1968**, Ponzo [26] a considéré l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre sans retard suivante :

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + cx = 0.$$

- En outre, **en 1969**, Swick [20] a pris en considération les équations différentielles troisième ordre

$$x''' + ax'' + g(x)x' + h(x) = e(t),$$

et

$$x''' + p(t)x'' + q(t)g\left(x'\right) + h(x) = e(t).$$

- Après **en 1971**, Hara [27] a étudié le comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle de la forme

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0,$$

et a montré que toutes les solutions de cette équation sont uniformément bornées et satisfont aux conditions $x(t) \longrightarrow 0$, $x'(t) \longrightarrow 0$ et $x''(t) \longrightarrow 0$.

- Après **en 1992**, Zhu [30] a considéré la stabilité des solutions nulles des deux équations

$$x''' + ax'' + bx' + f(x(t-r)) = p(t), \tag{1}$$

et

$$x''' + ax'' + \phi\left(x'(t-r)\right) + f(x) = p(t),$$

avec $p(.) = 0$. Il a donné des conditions suffisantes pour assurer la bornitude uniforme et la bornitude ultime uniformément des solutions de l'équation (1).

- **En 1999**, Mehri et Shadman [5] ont considéré l'équation différentielle non linéaire du troisiéme ordre suivante :

$$x''' + a(t)f\left(x''\right) + b(t)g\left(x'\right) + c(t)h(x) = 0,$$

et ont posé des conditions suffisantes sur a, b, c, f, g et h, pour que ses solutions soient bornées.

Puis, les équations suivantes ont été étudiées par :

- Sadek [1], **en 2003**

$$x''' + ax'' + g\left(x'(t-r)\right) + f(x(t-r)) = p(t).$$

- Tunç [12], **en 2007**

$$x''' + a_1x'' + f_2\left(x'(t-r(t))\right)x' + a_3x = p\left(t, x, x', x(t-r(t)), x'(t-r(t)), x''\right).$$

- Yao et Meng [14], **en 2008**

$$x''' + \varphi\left(x''\right) + g\left(x(t-r(t)), x'(t-r(t))\right) + f(x(t-r(t))) = 0,$$

et

$$x''' + \varphi\left(x, x'\right)x'' + g\left(x(t-r(t)), x'(t-r(t))\right)x' + f(x(t-r(t))) = 0.$$

- Omeike [22], **en 2009**

$$x''' + a(t)x'' + b(t)g\left(x'\right) + c(t)h(x(t-r)) = p(t).$$

Il a discuté la stabilité des solutions de cette équation lorsque $p(.) = 0$ et la bornitude des solutions lorsque $p(.) \neq 0$.

- Aussi **en 2010**, Tunç [11] a examiner le comportement asymptotique des solutions de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &x''' + a(t)x'' + b(t)g_1\left(x'(t-r(t))\right) + g_2\left(x'\right) + h(x(t-r(t))) \\ &= p\left(t, x, x', x(t-r(t)), x'(t-r(t)), x''\right). \end{aligned} \tag{2}$$

- Plus récemment **en 2011**, le résultat de Zhang et Si [31] a été amélioré et étendu par Tunç [10], pour l'étude de la stabilité et bornitude de l'équation différentielle suivante du troisiéme ordre avec retard :

$$\begin{aligned} &x''' + g\left(x'(t-r(t))\right)x'' + \psi\left(x'\right) + f\left(x'(t-r(t))\right) + h(x(t-r(t))) \\ &= p\left(t, x, x', x(t-r(t)), x'(t-r(t)), x''\right), \end{aligned}$$

lorsque $p(.) = 0$ et $p(.) \neq 0$, respectivement.

- L'équation différentielle (2) a été réétudiée **en 2013** par Yuzhen et Cuixia [6] qui ont établi d'autres conditions sur la stabilité et la bornitude des solutions.

- **En 2015**, M. Remili et L. Oudjedi ont étudié la stabilité et la borunitude des solutions de certaines classes d'équations différentielles de trosième ordre avec retard par exemple équation suivante, ils étudient la stabilité pour $e(.) = 0$ et la borunitude pour $e(.) \neq 0$:

$$\left(q(t)\left(p(t)x'(t)\right)'\right)' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = e(t).$$

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre fournit quelques définitions et résultats auxiliaires qui seront utilisé plus tard.
Le deuxième chapitre est consacré a l'étude de la stabilité uniforme asymptotique de

$$[h(x(t))x'(t)]'' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = 0, \tag{3}$$

$$[h(x(t))x'(t)]'' + a(t)\psi\left(x'(t)\right)x''(t) + b(t)g\left(x'(t)\right) + c(t)f(x(t-r)) = 0, \tag{4}$$

et la bornitude de

$$[h(x(t))x'(t)]'' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = e(t), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &[h(x(t))x'(t)]'' + a(t)\psi\left(x'(t)\right)x''(t) + b(t)g\left(x'(t)\right) + c(t)f(x(t-r)) \\ &= p\left(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), x''(t)\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Le troisième chapitre, est destiné à l'étude de la stabilité et la bornitude des solutions des équations de les formes suivantes :

$$\left(q(t)\left(p(t)x'(t)\right)'\right)' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = 0, \tag{7}$$

$$\left(q(t)\left(p(t)x'(t)\right)'\right)' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = e(t). \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) ont été étudiés par M. Remili et L. Oudjedi dans [24] et ils ont établi la stabilité des solutions d'équation (7) et la bornitude d'équation (8) sous certains conditions. Notre contribution est d'établir la stabilité d'équation (7) et la bornitude d'équation (8) mais sous autre conditions différentes que celles trouvées par ces auteurs.

Le quatrième chapitre est consacré a l'étude de la stabilité asymptotique uniforme des équations de les formes suivantes :

$$\left(P(x(t))x'(t)\right)'' + a(t)\left(Q(x(t))x'(t)\right)' + b(t)\left(R(x(t))x'(t)\right) + c(t)f(x(t-r)) = 0, \tag{9}$$

$$[P(x(t))x'(t)]'' + a(t)\left(Q(x(t))x'(t)\right)' + b(t)\left(R(x(t))x'(t)\right) + c(t)f(x(t)) = 0, \tag{10}$$

et la bornitude de

$$\begin{aligned}&[P(x(t))x'(t)]'' + a(t)\left(Q(x(t))x'(t)\right)' + b(t)\left(R(x(t))x'(t)\right) + c(t)f(x(t))\\ &= s\left(t, x(t), x'(t), x''(t)\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Notre contribution dans ce chapitre est ce manifeste par l'étude de la bornitude des solutions d'équation (11).
Notons que les équations (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) ont été étudiés par M. Remili et L. Oudjedi dans [23, 24, 25].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit des définitions, notations, propositions et théorèmes pour la théorie de stabilité et bornitude de certaines équations différentielles non autonomes .

1.1 Rappel et quelques Notions de Base

U désigne toujours un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ contenant 0 et I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. Soit $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Considérons le système non autonome suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \quad \forall \quad t \in I, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

1. La fonction x est dite solution de système (1.1) sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I, et $(t,x(t)) \in I \times U$, et x satisfait la relation (1.1).
2. On appelle courbe intégrale l'ensemble : $\Gamma = \{(t,x(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}/t \in I\}$.
3. On appelle orbite ou trajectoire l'ensemble des points $(x(t))$ où $t \in I$:$\{x(t)/t \in I\}$. $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ (où les solutions prennent leurs valeurs) s'appelle espace des phases.

4. Un point $a \in U$ est un point d'équilibre, ou un point singulier du système (1.1) si : $\forall t \in I : f(t,a) = 0$.
   On considérera toujours l'équilibre en 0. Pour le cas général, il suffit de faire une translation.

Définition 1.2. [13] On considère le système (1.1), et $V : I \times U \to \mathbb{R}^n$ ayant des dérivées partielles sur $I \times U$. On définit la dérivée totale $\dot{V}$ le long des trajectoires du système (1.1) par :

$$\dot{V}(t,y) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(t,y) f_i(t,y).$$

Définition 1.3. [15] Le point d'équilibre 0 de (1.1) est

i) Stable (S) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que :

$$\|x(t_0)\| < \delta \Longrightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{1.2}$$

ii) Uniformément Stable (U.S) si, pour tout $t > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, indépendant de t_0, tel que (1.2) soit satisfaite.

iii) Instable s'il n'est pas stable.

iv) Asymptotiquement Stable (A.S) s'il est stable et il existe une constante positive $c = c(t_0) > 0$ telle que $x(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$, pour tout $\|x(t_0)\| < c$.

v) Uniformément Asymptotiquement Stable (U.A.S) s'il est uniformément stable et il existe une constante positive c, indépendante de t_0, telle que pour toute $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$, uniformément en t_0, c'est à dire, pour tout $\eta > 0$, il existe $T = T(\eta) > 0$ tel que :

$$\|x(t)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + T(\eta), \forall \|x(t_0)\| < c.$$

vi) Globalement Uniformément Asymptotiquement Stable (G.U.A.S) s'il est uniformément stable, $\delta(\varepsilon)$ peut être choisi pour satisfaire à la condition $\lim_{\varepsilon \longrightarrow +\infty} \delta(\varepsilon) = +\infty$, et pour chaque couple de nombres positifs η et c, il existe $T = T(\eta, c) > 0$ tel que

$$\|x(t)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \forall \|x(t_0)\| < c.$$

Définition 1.4. [15] Les solutions de (1.1) sont :

• Uniformément Bornées s'il existe une constante positive c, indépendante de $t_0 > 0$, telle que pour tout $a \in]0, c[$, il existe $\beta = \beta(a) > 0$, indépendante de t_0, satisfaisant

$$\|x(t_0)\| \leq a \Longrightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \forall t \geq t_0. \tag{1.3}$$

• Globalement Uniformément Bornées si (1.3) est satisfaite pour n'importe quelle valeur de a assez grande .

1.1.1 Fonctions de classe $\mathcal{K}$ et de classe $\mathcal{KL}$

Définition 1.5. [15] Une fonction continue $\alpha : [0, a[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite de classe $\mathcal{K}$ si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. Elle est dite de classe $\mathcal{K}_\infty$ (radialement borné) si $a = \infty$ et $\alpha(r) \longrightarrow +\infty$ lorsque $r \longrightarrow \infty$.

Définition 1.6. [15] Une fonction continue $\beta : [0, a] \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dite de classe $\mathcal{KL}$ si, pour tout s fixé, l'application $\beta(r, s)$ est de classe $\mathcal{K}$ par rapport à r, et pour tout r fixé, l'application $\beta(r,s)$ est décroissante par rapport à s et $\beta(r, s) \longrightarrow 0$ lorsque $s \longrightarrow +\infty$.

Proposition 1.1. *[15] Le point d'équilibre $x = 0$ de (1.1) est :*

1. *uniformément stable si et seulement s'il existe une fonction α de classe $\mathcal{K}$ et une constante positive c indépendante de t_0 telle que :*

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x(t_0)\| < c.$$

2. *globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale $x(t_0)$.*

Proposition 1.2. *[15] Le point d'équilibre $x = 0$ de (1.1) est :*

1. *uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une constante positive c indépendante de t_0 telle que :*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x(t_0)\| < c.$$

2. *globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale $x(t_0)$.*

1.1.2 Théorie de Lyapunov

Dans ce qui suit nous donnerons quelques définitions et théorémes concernant la stabilité au sens de Lyapunov

Définition 1.7. On considére le système (1.1). Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable. La fonction V est dite :

1. semi définie positive si :
   (a) $V(t,0) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+$,
   (b) $V(t,x) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \in D$.
2. définie positive si :
   (a) $V(t,0) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}_+$,
   (b) Il existe une fonction $W_1(x)$ définie positive (de seule variable) telle que : $W_1(x) \leq V(t,x), \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \in D$.
3. décrescente s'il existe une fonction $W_2(x)$ définie positive telle que : $V(t,x) \leq W_2(x), \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \forall x \in D$.
4. radialement non bornée si : $V(t,x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$.

$V(t,x)$ est dite définie négative (semi-définie négative) si $-V(t,x)$ est définie positive (semi définie positive).

Théorème 1.3. *Soient $\Omega = \{x, \|x\| \leq h\}$ et $W : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie positive. Alors il existe deux fonctions φ_1, φ_2 de $\mathcal{K}$ telles que :*

$$\varphi_1(\|x\|) \leq W(x) \leq \varphi_2(\|x\|). \tag{1.4}$$

Démonstration. Pour tout $h > 0$, nous prouvons que (1.4) est vraie pour $\|x\| \leq h$. Soit

$$\varphi(r) = \inf_{r \leq \|x\| \leq h} W(x),$$

comme W est définie positive donc $\varphi(r) > 0$ pour tout $r > 0$, $\varphi(0) = 0$ et φ est fonction monotone (croissante) sur $[0, h]$.

Maintenement on va montrer que φ est continue, puisique W est continue donc $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ telle que :

$$\begin{aligned}
\varphi(r_2) - \varphi(r_1) &= \inf_{r_2 \leq \|x\| \leq h} W(x) - \inf_{r_1 \leq \|x\| \leq h} W(x), \quad \text{où} \quad 0 \leq r_1 < r_2 \leq h, \\
&= \inf_{r_2 \leq \|x\| \leq h} W(x) - W(x_0), \\
&\leq W(x_1) - W(x_0), \\
&\leq \varepsilon \quad \text{lorsque } \|x_1 - x_0\| \leq r_2 - r_1 \leq \delta(\varepsilon),
\end{aligned}$$

où on pose $x_1 = x_0$ lorsque $x_0 \in D_2 = \{x| \quad r_2 \leq \|x\| \leq h\}$.
Lorsque $x_0 \in D_1 = \{x| \quad r_1 \leq \|x\| \leq r_2 \leq h\}$, prenez le point d'intersection du ligne $\overline{Ox_0}$ et $\|x\| = r_2$.
Soit $\varphi_1(r) = \frac{r\varphi(r)}{h} \leq \frac{h\varphi(r)}{h} = \varphi(r)$. Comme $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi_1(0) = 0$ et si $0 \leq r_1 < r_2 \leq h$, il vient :

$$\varphi_1(r_1) = \frac{r_1\varphi(r_1)}{h} \leq \frac{r_1\varphi(r_2)}{h} < \frac{r_2\varphi(r_2)}{h} = \varphi_1(r_2),$$

alors φ_1 est strictemment croissante et donc $\varphi_1 \in \mathcal{K}$.
Soit ψ definie par :

$$\psi(r) = \max_{\|x\| \leq r} W(x).$$

Comme W est définie positive donc $\psi(r) > 0$ pour tout $r > 0$, $\psi(0) = 0$ et ψ est fonction croissante sur $[0, h]$.
Maintenement on va montrer que ψ est continue, puisique W est continue donc $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ telle que :

$$\begin{aligned}
\psi(r_2) - \psi(r_1) &= \max_{\|x\| \leq r_2} W(x) - \max_{\|x\| \leq r_1} W(x), \quad \text{où} \quad 0 \leq r_1 < r_2 \leq h, \\
&= W(x_0) - \max_{\|x\| \leq r_1} W(x), \\
&\leq W(x_0) - W(x_1), \\
&\leq \varepsilon \quad \text{lorsque } \|x_0 - x_1\| \leq r_2 - r_1 \leq \delta(\varepsilon),
\end{aligned}$$

où on pose $x_1 = x_0$ lorsque $x_0 \in D_2 = \{x| \quad \|x\| \leq r_1\}$.
Lorsque $x_0 \in D_1 = \{x| \quad r_1 \leq \|x\| \leq r_2\}$, prenez le point d'intersection du ligne $\overline{Ox_0}$ et $\|x\| = r_1$.(comme le montre la Figure 1.1)
donc ψ est continue .

On choisit $\varphi_2(r) = \psi(r) + kr$ oŭ $k > 0$. Comme $\psi(0) = 0$ donc $\varphi_2(0) = 0$ et si $0 \leq r_1 < r_2 \leq h$ il vient :

$$\varphi_2(r_1) = \psi(r_1) + kr_1 \leq \psi(r_2) + kr_1 < \psi(r_2) + kr_2 = \varphi_2(r_2).$$

Par conséquent, φ_2 est strictement croissante, donc $\varphi_2 \in \mathcal{K}$.

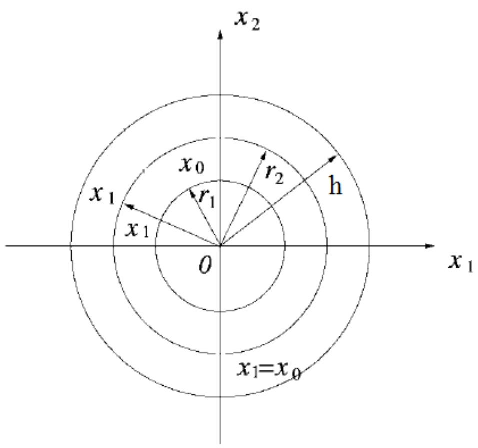

FIGURE 1.1 –

Les résultats ci-dessus montrent que

$$\begin{aligned}\varphi_1(\|x\|) \leq \varphi(\|x\|) &= \inf_{\|x\| \leq \|\xi\| \leq h} W(\xi) \leq W(x),\\ &\leq \max_{\|x\| \leq \|\xi\|} W(\xi) = \psi(\|x\|),\\ &\leq \varphi_2(\|x\|).\end{aligned}$$

Alors

$$\varphi_1(\|x\|) \leq W(x) \leq \varphi_2(\|x\|).$$ □

Remarque 1.1. Soit $V(t, x)$ une fonction définie positive et décrescente sur Ω. D'aprés la définition et le théorème précedent il existe des fonctions α_1 et α_2 de classe $\mathcal{K}$ telles que :

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \forall x \in \Omega.$$

Définition 1.8 (Fonction de Lyapunov). Soit D un voisinage de 0 et $V : \mathbb{R}_+ \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable.

— On dit que V est une fonction de Lyapunov si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

 (i) V est définie positive.

 (ii) $\dot{V}(t,x) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in D$.

— On dit que V est une fonction de Lyapunov stricte, si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

 (i) V est défnie positive.

 (ii) $\dot{V}(t,x) < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in D - \{0\}$.

Théorème 1.4 (Théorème de Lyapunov Autonome[13]). *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Considérons le système autonome suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Soit 0 un point d'équilibre de (1.5), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et une fonction

$$V : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

(1) V soit définie positive

(2) La dérivée totale $\dot{V}$ le long des trajectoires du système (1.5) soit négative.
Alors 0 est stable. V s'appelle une fonction de Lyapunov. De plus si la dérivée totale $\dot{V}$ le long des trajectoires du système (1.5) est définie négative, alors 0 est asymptotiquement stable. V s'appelle une fonction stricte de Lyapunov.

Démonstration. $x(t, t_0, x_0)$ désigne une solution $x(t)$ du système (1.5)

$1^{ère}$ partie :

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset U$, V est continue sur

$$C_\varepsilon = \{y \in U, \|y\| = \varepsilon\},$$

qui est compact, ainsi V y atteint ses bornes. Donc d'après (1), il existe $\widehat{y} \in C_\varepsilon$ tel que :

$$V(\widehat{y}) = \inf_{y \in C_\epsilon} V(y) = c > 0.$$

V étant continue sur $\mathcal{V}$ et comme $V(0) = 0$, on a :

$$\exists \delta > 0, \quad (y \in \mathcal{V} \quad et \quad ||y|| < \delta) \Longrightarrow V(y) < c.$$

De plus, $\delta < \varepsilon$ d'après ce qui précède.
Soit $x_0 \in U$ tel que $\|x_0\| < \delta$, alors $V(x_0) < c$. On s'intéresse à la solution $x(t, t_0, x_0)$.
Supposons qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $\|x(t_1, t_0, x_0)\| > \varepsilon$. On a

$$\|x(t_0, t_0, x_0)\| = \|x_0\| < \delta < \varepsilon.$$

Or $t \longrightarrow \|x(t, t_0, x_0)\|$ est une fonction continue (d'aprés propriété de la norme). D'aprés le théoréme des valeurs intermédiaires, il existe $t_\varepsilon > 0$ tel que $\|x(t_\varepsilon, t_0, x_0)\| = \varepsilon$ et ainsi $V(x(t_\varepsilon, t_0, x_0)) \geq c$.
D'après (2), on sait que pour tout t dans un voisinage de t_0 tel que $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}$ on a :

$$\dot{V}\left(x\left(t, t_0, x_0\right)\right) = \left(DV\left(x\left(t, t_0, x_0\right)\right)\left(\dot{x}\left(t, t_0, x_0\right)\right) = \left(DV\left(x\left(t, t_0, x_0\right)\right)\left(f\left(x\left(t, t_0, x_0\right)\right)\right) \leq 0.$$

On en déduit que $t \longrightarrow V(x(t, t_0, x_0))$ est décroissante dans un voisinage de t_0 contenant t_ε. Ainsi, on a $t_\varepsilon \geq t_0$ donc

$$V\left(x\left(t_\varepsilon, t_0, x_0\right)\right) \leq V\left(x\left(t_0, t_0, x_0\right)\right),$$

d'où

$$V\left(x\left(t_\varepsilon, t_0, x_0\right)\right) \leq V\left(x_0\right).$$

Or, on a $V(x_0) < c$ et $V(x(t_\varepsilon, t_0 x_0)) \geq c$, ce qui est une contradiction.
Ainsi :

$$\forall t \geq 0, \quad \|x\left(t, t_0, x_0\right)\| \leq \varepsilon.$$

Donc 0 est un point d'équilibre stable.

$2^{ème}$ partie :

Soit $x_0 \in B(0,\delta)$, on a

$$V\left(x\left(t, t_0, x_0\right)\right) - V\left(x\left(t_0, t_0, x_0\right)\right) = \int_{t_0}^{t} \dot{V}\left(x(s, t_0, x_0)\right) ds,$$

d'où
$$V\left(x\left(t,t_0,x_0\right)\right)-V\left(x_0\right)=\int_{t_0}^{t} DV\left(x\left(s,t_0,x_0\right)\right)f\left(x\left(s,t_0,x_0\right)\right)ds.$$
Or $t \longrightarrow V(x(t,t_0,x_0))$ est décroissante et minorée par 0 pour t dans un voisinage de t_0 tel que $x(t,t_0,x_0)\in\mathcal{V}$. D'après ce qui précède, $x(t,t_0,x_0)$ reste dans $\overline{B(0,\varepsilon)}\subset\mathcal{V}$ pour tout $t\geq t_0$, donc $t\longrightarrow V(x(t,t_0,x_0))$ est décroissante et minorée par 0 pour tout $t\geq t_0$, ainsi :
$$\int_{t_0}^{\infty} DV(x(s))f(x(s))ds<+\infty.$$
Or comme $\dot{V}$ est définie négative alors, $DV(y)f(y)<0$ pour tout $y\in\mathcal{V}\backslash\{0\}$. On en déduit que
$$\sum_{n\geq 0} DV(x(n))f(x(n))<+\infty.$$
Ainsi,
$$\lim_{t\to\infty} DV\left(x\left(t,t_0,x_0\right)\right)f\left(x\left(t,t_0,x_0\right)\right)=0.$$
On sait d'après ce qui précède que $x(t,t_0,x_0)$ reste dans le compact $\overline{B(0,\varepsilon)}$.
Ainsi il existe une suite $(t_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante telle que $(x(t_k,t_0,x_0))_{k\geq 0}$ converge dans $\overline{B(0,\varepsilon)}$ vers a. Or on a :
$$\lim_{t_k\to+\infty} DV\left(x\left(t_k,t_0,x_0\right)\right)f\left(x\left(t_k,t_0,x_0\right)\right)=0.$$
Par passage à la limite, il vient que $DV(a)f(a)=0$. De (1) et $\dot{V}$ définie négative, on déduit que $a=0$. 0 est ainsi la seule valeur d'adhérence de $x(t,t_0,x_0)$, ce qui montre que :
$$\lim_{t\to\infty} x\left(t,t_0,x_0\right)=0.$$
Donc 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable. □

Exemple 1.1. On considére le systême :
$$\begin{cases} \dot{x_1}=-x_1^3-x_2^2, \\ \dot{x_2}=x_1x_2-x_2^3. \end{cases}$$
Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons
$$V\left(x_1,x_2\right)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$$

1. il est clair que $V(0) = 0$.

2. $V(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0. \\ x_2 = 0. \end{cases}$

   donc V est définie positive .

3. La dérivée totale de V le long des trajectoires du système vaut

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\left(-x_1^3 - x_2^2\right) + x_2\left(x_1x_2 - x_2^3\right) = -\left(x_1^4 + x_2^4\right) < 0$$

   $\dot{V}$ est clairement définie négative.

D'après le théorème (1.4), on en déduit que 0 est asymptotiquement stable .

Théorème 1.5 (Théorème d'instabilité[13]). *Soit 0 un point d'équilibre de (1.5), s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et une fonction*

$$W : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

1. *pour tout $y \in \mathcal{V}\backslash\{0\}, W(y) > W(0)$.*
2. *la dérivée totale de W le long des trajectoires du système (1.5) soit définie positive alors, 0 est instable.*

Démonstration. Soit $\delta > 0$ tel que $B(0,\delta) \subset \mathcal{V}$, $x_0 \in B(0,\delta)$ et $t_0 \in \mathbb{R}^+$. On considère la solution $x(t, t_0, x_0)$. Pour tout $t \neq t_0$ dans un voisinage de t_0 tel que $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}$, on a :

$$\dot{W}(t) = (DW(x(t, t_0, x_0))(f(x(t, t_0, x_0)) > 0.$$

Ainsi, $t \longrightarrow W(x(t, t_0, x_0))$ est croissante dans un voisinage de t_0 tel que $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}$. D'où $W(x(t, t_0, x_0)) \geq W(x_0)$ pour t dans ce voisinage .
Supposons que l'on ait un $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset \mathcal{V}$ et que pour tout $t \geq t_0$, $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varepsilon$, alors

$$W(x(t, t_0, x_0)) \leq \sup_{t \geq t_0} W(x(t, t_0, x_0)) = M < +\infty,$$

car W est continue sur $\overline{B(0,\varepsilon)}$, qui est compacte. On a :

$$W(x(t, t_0, x_0)) - W(x(t_0, t_0, x_0)) = \int_{t_0}^{t} \dot{W}(s, t_0, x_0)\, ds.$$

Il vient

$$W(x_0) + \int_{t_0}^{t} DW(x(s,t_0,x_0))\, f(x(s,t_0,x_0))\, ds \leq M \quad \forall t \geq t_0.$$

Par passage à la limite, on a que :

$$\int_{t_0}^{\infty} DW(x(s,t_0,x_0))\, f(x(s,t_0,x_0))\, ds < +\infty.$$

D'après 2, on a $DW(y)f(y) > 0$ pour tout $y \in \mathcal{V} \backslash \{0\}$. On en déduit que :

$$\lim_{t\to\infty} DW(x(t,t_0,x_0))\,(f(x(t,t_0,x_0)) = 0.$$

Comme on a supposé que $x(t,t_0,x_0)$ restait dans le compact $\overline{B(0,\varepsilon)}$, il existe $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante telle que $x(t_k,t_0,x_0) \underset{k\to\infty}{\to} a$ avec $a \in \overline{B(0,\varepsilon)}$. Par continuité, il vient :

$$\lim_{k\to\infty} DW(x(t_k,t_0,x_0))\, f(x(t_k,t_0,x_0)) = DW(a)f(a).$$

On en déduit de l'unicité de la limite que $DW(a)f(a) = 0$.
La fonction $t \longrightarrow W(x(t,t_0,x_0))$ est croissante dans un voisinage de t_0 tel que $x(t,t_0,x_0) \in \mathcal{V}$, et pour tout $t \geq t_0$ on a supposé que $x(t,t_0,x_0)$ restait dans le compact $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset \mathcal{V}$.
Ainsi, la fonction $t \longmapsto W(x(t,t_0,x_0))$ est croissante pour tout $t \geq t_0$, donc $W(x(t_k,t_0,x_0)) \geq W(x_0)$.
Par passage à la limite, on a $W(a) \geq W(x_0)$. D'après 1, $W(x_0) > W(0)$, on en déduit que $a \neq 0$. Donc, on ne peut pas avoir $DW(a)f(a) \neq 0$.
Alors le point d'équilibre de (1.5) est instable. □

Théorème 1.6 (Théorème de Lyapunov non autonome[13]). *Soit* 0 *un point d'équilibre de (1.1), s'il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{t_0}$ *et une fonction* $V : \mathcal{V}_{t_0} \longmapsto \mathbb{R}^+$ *continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :*

(1) V *soit définie positive.*

(2) la dérivée totale de V *le long des trajectoires du système (1.1) soit négative (respectivement définie négative).*

Alors 0 *est stable (respectivement asymptotiquement stable).* V *s'appelle une fonction de Lyapunov. De plus, si on a :*

(3) V est décrescente .

Alors 0 est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable).

Démonstration. $x(t, t_0, x_0)$ désigne une solution du système (1.1) .

$1^{\text{ère}}$ **partie** :

Supposons les points (1) et (2) vérifiés. On sait qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$ et une fonction φ de classe $\mathcal{K}$ telle que :

$$V(t, y) \geq \varphi(\|y\|) > 0, \quad \forall (t, y) \in \mathcal{V}'_{t_0}.$$

Soit $x_0 \in U$ et $x(t, t_0, x_0)$ une solution de (1.1), pour tout t dans un voisinage de t_0 tel que $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}'_{t_0}$, on a d'après (1) et (2) :

$$\varphi\left(\|x\left(t, t_0, x_0\right)\|\right) \leq V\left(t, x\left(t, t_0, x_0\right)\right) \leq V\left(t_0, x_0\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, tel que $\overline{B(0, \varepsilon)} \subset \mathcal{V}'_{t_0}$, V étant continue en y, et $V(t_0, 0) = 0$, on peut trouver $\delta(\varepsilon, t_0) < \varepsilon$ tel que

$$\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon, t_0, x_0) \Longrightarrow V(t_0, x_0) < \varphi(\varepsilon).$$

Soit $x_0 \in U$ tel que $\|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$, supposons qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $\|x(t_1, t_0, x_0)\| > \varepsilon$. On sait que $t \longmapsto \|x(t, t_0, x_0)\|$ est continue, ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_\varepsilon > 0$ tel que $\|x(t_\varepsilon, t_0, x_0)\| = \varepsilon$. Pour tout t dans un voisinage de t_0 tel que $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}'_{t_0}$, on a :

$$\varphi(\|x(t, t_0, x_0)\|) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)).$$

Or $\overline{B(0,\varepsilon)}$ est inclus dans $\mathcal{V}'_{t_0}$. On en déduit que

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(\|x(t_\varepsilon, t_0, x_0)\|) \leq V(t_\varepsilon, x(t, t_0, x_0)).$$

D'autre part

$$V(t_\varepsilon, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < \varphi(\varepsilon)$$

ce qui est une contradiction .

Ainsi $\forall t \geq 0, \quad \|x\left(t, t_0, x_0\right)\| \leq \varepsilon$.

Alors ce qui montre que 0 est stable.

$2^{ème}$ partie :

Supposons que le point (3) soit vérifié. On sait qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$ et une fonction ψ de classe $\mathcal{K}$ telle que :

$$\varphi(\|y\|) \leq V(t,y) \leq \psi(\|y\|) \quad \forall (t,y) \in \mathcal{V}'_{t_0}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que $\psi(\delta) < \varphi(\varepsilon)$.

Soit $x_0 \in U$ et $x(t,t_0,x_0)$ une solution de (1.1) telle que $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, alors d'après la première partie on a pour tout $t \geq t_0$

$$\varphi(\varepsilon) > \psi(\delta) \geq V(t_0,x_0) \geq V(t,x(t,t_0,x_0)) \geq \varphi(\|x(t,t_0,x_0)\|).$$

Alors

$$\varphi(\|x(t,t_0,x_0)\|) < \varphi(\varepsilon),$$

φ étant de classe $\mathcal{K}$, ceci implique que pour tout $t \leq t_0$, $\|x(t,t_0,x_0)\| \leq \varepsilon$.

Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \|x_0\| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \|x(t,t_0,x_0)\| \leq \varepsilon$.

La stabilité uniforme est assurée par le fait que $\delta(\varepsilon)$ est indépendant de la solution $x(t,t_0,x_0)$.

$3^{ème}$ partie :

On suppose maintenant que $\dot{V}$ est définie négative, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$ et une fonction χ de classe $\mathcal{K}$ telle que

$$\dot{V}(t,y) \leq -\chi(\|y\|) < 0 \quad (t,y) \in \mathcal{V}'_{t_0}.$$

Soit $x_0 \in U$ et $x(t,t_0,x_0)$ une solution du système (1.1) telle que $\|x_0\| < \delta$ où δ est obtenu comme dans la $2^{ème}$ partie.

Soit ε une constante positive telle que $0 < \varepsilon < \|x_0\|$.

On peut encore trouver une constante positive $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ telle que $\psi(\lambda) < \varphi(\varepsilon)$.

On définit alors $\mu = \chi(\lambda)$, et posons :

$$T = T(\delta,\varepsilon) = \frac{\psi(\delta)}{\mu}.$$

Supposons que $\|x(t,t_0,x_0)\| > \lambda$, pour tout t dans $t_0 \leq t \leq t_0+T$, alors on a :

$$\begin{aligned}
0 < \varphi(\varepsilon) &\leq V\left(t_1, x\left(t_1,t_0,x_0\right)\right) \leq V\left(t_0,x_0\right) - \int_{t_0}^{t_1} \chi\left(\left\|x\left(s,t_0,x_0\right)\right\|\right) ds, \\
&\leq V\left(t_0,x_0\right) - \int_{t_0}^{t_1} \chi(\lambda) ds \leq V\left(t_0,x_0\right) - \left(t_1-t_0\right)\mu \leq \psi(\delta) - T\mu = \psi(\delta)-\psi(\delta) = 0.
\end{aligned}$$

On obtient une contradiction, et donc il existe $t_2 \in [t_0,t_1]$ tel que $\|x(t_2,t_0,x_0)\| \leq \lambda$. Ainsi pour tout $t \geq t_2$

$$\varphi\left(\left\|x\left(t,t_0,x_0\right)\right\|\right) \leq V\left(t, x\left(t,t_0,x_0\right)\right) \leq V\left(t_2, x\left(t_2,t_0,x_0\right)\right) \leq \psi(\lambda) \leq \varphi(\varepsilon).$$

On en déduit que

$$\left\|x\left(t,t_0,x_0\right)\right\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0+T \geq t_2,$$

ce qui montre la stabilité uniforme asymptotique. $\square$

Exemple 1.2. On considére le système :

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -y_1 - e^{-2t} y_2, \\ \dot{y_2} = y_1 - y_2. \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons

$$V(t,y) = y_1^2 + \left(1+e^{-2t}\right) y_2^2.$$

1. On a :
   a) $V(t{,}0) = 0$,
   b) $V(t{,}y) \geq y_1^2 + y_2^2$.
   Alors V est définie positive .
2. On a la dérivée de V le long des trojectoires du système

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t{,}y) =& -2e^{-2t}y_2^2 + 2y_1(-y_1 - e^{-2t}y_2) + 2y_2(1+e^{-2t})(y_1-y_2), \\
=& -2\left(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2\left(1+2e^{-2t}\right)\right).
\end{aligned}$$

   a) $\dot{V}(t{,}0) = 0$,
   b) ce qui montre que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t,y) &\leq -2\left(y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2\right), \\
&\leq -\left(y_1-y_2\right)^2 - y_1^2 - y_2^2, \\
&\leq -\left(\left(y_1-y_2\right)^2 + y_1^2 + y_2^2\right).
\end{aligned}$$

3. Montrer que V est décrescente

$$\begin{aligned} V(t,y) =& y_1^2 + \left(1+e^{-2t}\right) y_2^2, \\ \leq & y_1^2 + 2y_2^2 \leq 2\|Y\|_2^2. \end{aligned}$$

Alors d'aprés théoréme précédent 0 est point équilbre uniformément asymptotiquement stable.

Lemme 1.7. *[7](Gronwall.Bellman) Soient k un nombre réel positif et f, g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$, à valeurs positives telles que*

$$f(t) \leq k + \int_a^t g(s)f(s)ds, \quad \textit{pour tout} \quad t \in [a,b].$$

Alors

$$f(t) \leq k \exp\left(\int_a^t g(s)ds\right), \quad \textit{pour tout} \quad t \in [a,b].$$

1.2 Quelques résultats sur les équations à retard

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\|.\|$ est une norme quelconque. Pour $r > 0$ et $H > 0$, on définit $C_H := \{\phi \in C([-r,0],\mathbb{R}^n) : \|\phi\| \leq H\}$ avec $(C, \|\|_C)$ l'espace de Banach des fonctions continues $\phi : [-r,0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\|\|_C$ est la norme sur C définie par :

$$\forall \phi \in C, \quad \|\phi\|_C = \sup_{\theta\in[-r,0]} \|\phi(\theta)\|.$$

Soit $x : [t_0 - r, t_0 + A] \to \mathbb{R}^n$ continue où $t_0 \geq 0$ et $A > 0$. Pour t fixé dans $[t_0, t_0 + A]$, on définit la fonction :

$$x_t = x(t+\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0,$$

$x_t \in C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ et c'est la restriction de x à l'intervalle $[t-r,t]$ translaté à $[-r,0]$. Considérons, à présent

$$\dot{x} = f(t, x_t), \tag{1.6}$$

où $f : I \times C_H \to \mathbb{R}^n$ est une application continue, localement lipschitzienne en son second argument et telle que $f(t,0) = 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. De plus, f satisfait à la condition :

$$\forall H_1 < H, \exists L(H_1) > 0, \quad \|\phi\|_C < H_1 \Rightarrow \|f(t,\phi)\| < L(H_1).$$

Une fonction $x(t)$ est dite solution de (1.6) si elle est définie et continue sur $[t_0 - r, t_0 + A]$ vérifie $x(t) = \varphi(t)$ sur $[t_0 - r, t_0]$, est différentiable sur $[t_0, t_0 + A]$ et satisfait (1.6) sur $[t_0, t_0 + A]$.

1.2.1 Théorème d'existence et d'unicité de solution

Définition 1.9. (Yoshizawa [28]p.184) Une fonction $x(t_0,\varphi)$ est dite solution du système (1.6) avec la condition initiale $\varphi \in C_H$ en $t = t_0$, $t_0 \geq 0$, s'il existe une constante $A > 0$ telle que $x(t_0,\varphi)$ est une fonction de $[t_0 - r, t_0 + A]$ vers $\mathbb{R}^n$ avec les propriétés :

1. $x_t(t_0, \varphi) \in C_H$ pour $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.
2. $x_{t_0}(t_0,\varphi) = \varphi$.
3. $x(t_0,\varphi)$ satisfait (1.6) pour $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

$x(t_0,t,\varphi)$ est la valeur de $x(t_0, \varphi)$ au point t.

Théorème 1.8. *[18] Supposons la fonction f continue. Alors pour tout $\varphi \in C$, l'équation (1.6) admet au moins une solution. De plus, si la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à x_t, alors la solution est unique.*

1.2.2 Définitions et théorèmes de stabilité et bornitude de solutions

Définition 1.10. [17] Le point d'équilibre 0 de (1.6) est

I) Uniformément Stable (U.S) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|\varphi\|_C < \delta \Longrightarrow \|x\,(t, t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

II) Uniformément Asymptotiquement Stable (U.A.S) s'il est Uniformément Stable et il existe une constante positive c telle que pour tout $\eta > 0$, il existe $T = T(\eta) > 0$ de telle sorte que

$$\|\varphi\|_C < c \Rightarrow \|x\,(t, t_0, \varphi)\| < \eta, \forall t \geq t_0 + T(\eta).$$

III) Globalement Uniformément Asymptotiquement Stable si la condition précédente est vraie quelle que soit $\varphi \in C$.

Les définitions de stabilité et bornitude peuvent être données de la même maniére que pour les équations différentielles ordinaires, i.e, en remplçant la condition initiale x_0 et la solution $x(t, t_0, x_0)$ par φ et $x_t(t_0,\varphi)$, respectivement. De même, une fonctionnelle $V(.)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times C$ est dite définie positive s'il existe une fonction scalaire ω vérifiant $\omega(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$ et $\omega(0) = 0$, telle que $V(t, x_t) \geq \omega(\|x(t)\|)$ $\forall x_t \in C$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1.9. *[7] Soit $V(t, x_t)$: $[t_0, +\infty[\times C_H \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonctionnelle continue satisfaisant une condition locale de Lipschitz. $V(t,0) = 0$, et telle que :*

i) $W_0(\|x(t)\|) \leq V(t, x_t) \leq W_1(\|x(t)\|) + W_2(\|x_t\|_2)$ *où* $\|x_t\|_2 = \left(\int_{t-r}^{t} \|x(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$.

ii) $\dot{V}_{(1.6)}(t, x_t) \leq -W_3(\|x(t)\|)$,

où, W_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ sont de classe $\mathcal{K}$. Alors la solution nulle de (1.6) est uniformément asymptotiquement stable.

Théorème 1.10. *[7] Soit $V(t, x_t)$: $[t_0, +\infty[\times C_H \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonctionnelle continue satisfaisant une condition locale de Lipschitz. $H = \infty$, et telle que :*

i) $W_0(\|x(t)\|) \leq V(t, x_t) \leq W_1(\|x(t)\|) + W_2\left(\int_{t-r}^{t} W_3(\|x(s)\|)ds\right)$.

ii) $\dot{V}_{(1.6)}(t, x_t) \leq -W_3(\|x(t)\|) + M$, *pour* $M > 0$,

où, W_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ sont de classe $\mathcal{K}$. Alors les solutions de (1.6) est sont uniformément bornées .

Chapitre 2

Stabilité uniforme et bornitude de certaines équations différentielles du troisième ordre à retard

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier la stabilité uniforme des solutions des équations différentielles du troisième ordre à retard non linéaires de la forme

$$[h(x(t))x'(t)]'' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = 0. \tag{2.1}$$

$$[h(x(t))x'(t)]'' + a(t)\psi\left(x'(t)\right)x''(t) + b(t)g\left(x'(t)\right) + c(t)f(x(t-r)) = 0, \tag{2.2}$$

et la bornitude de

$$[h(x(t))x'(t)]'' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = e(t). \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &[h(x(t))x'(t)]'' + a(t)\psi\left(x'(t)\right)x''(t) + b(t)g\left(x'(t)\right) + c(t)f(x(t-r)) \\ &= p\left(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), x''(t)\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

où $r > 0$, et les fonctions $a(.), b(.), c(.), g(x'), h(x), \psi(x'), f(x), e(.)$ et $t \longmapsto p(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), x''(t))$ sont continues. En outre, il est supposé que les dérivées $h'(x), f'(x), g'(y)$ sont continues pour tout x, y avec $f(0) = g(0) = 0$. En plus, il est également supposé que les fonctions $t \longmapsto f(x(t-r))$, $t \longmapsto g(y(t))$ et $t \longmapsto p(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), x''(t))$ satisfont une condition de Lipschitz en $x, x', x(t-r), x'(t-r)$ et x''.

2.1 Hypothèses et résultats principaux

Nous exposons ici des hypothèses qui seront utilisées sur les fonctions qui apparaissent dans les équations (2.1)-(2.4), et supposons qu'il existe des constantes positives $a, b, c, d, d_0, d_1, h_0, h_1, \delta_0, \delta_1, \delta_2$ et $A, B, C, L, \alpha, \beta, \sigma$, et ε, telles que :

i) $0 < a \leq a(t) \leq A, 0 < b \leq b(t) \leq B, 0 < c \leq c(t) \leq C.$

ii) $c(t) \leq b(t), -L \leq b'(t) \leq c'(t) \leq 0$ pour $t \in [0, \infty[.$

iii) $f(0) = 0, \frac{f(x)}{x} \geq \delta_0 > 0 \quad (x \neq 0),$ et $|f'(x)| \leq \delta_1$ pour tout x.

iv) $0 < h_0 \leq h(x) \leq h_1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |h'(u)|\, du < \infty.$

Afin de simplifier la notation dans ce qui suit, on pose

$$\theta(t) = \frac{h'(x(t))}{h^2(x(t))} x'(t).$$

2.1.1 Stabilité

Théorème 2.1. *On suppose que les hypothéses (i) à (iv) sont vérifiées. Si*

C_1) $h_1\delta_1 < d < a.$

C_2) $\frac{1}{2} da'(t) - b\,(d - h_1\delta_1) \leq -\varepsilon < 0.$

Alors, la solution $x(.)$ de (2.1) et ses dérivées $x'(.)$ et $x''(.)$ sont uniformément asymptotiquement stables, à condition qu'il existe r satisfaisant

$$r < \min\left\{\frac{2(a-d)}{h_1 C\delta_1}, \frac{2h_0^3\varepsilon}{C\delta_1 h_1^2\,(d + dh_0^2 + h_0)}\right\}.$$

Démonstration. Notons que l'équation (2.1) est équivalente au système suivant

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{h(x)} y, \\ y' &= z, \\ z' &= -\frac{a(t)}{h(x)} z + \frac{a(t)h'(x)}{h^3(x)} y^2 - \frac{b(t)}{h(x)} y - c(t) f(x) + c(t) \int_{t-r}^{t} y(s) \frac{f'(x(s))}{h(x(s))} ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

On définie la fonctionnelle $U = U(t,x_t,y_t,z_t)$ par

$$U(t,x_t,y_t,z_t) = exp(\frac{-\gamma(t)}{\mu}) V(t,x_t,y_t,z_t) = exp(\frac{-\gamma(t)}{\mu}) V. \tag{2.6}$$

où

$$\gamma(t) = \int_0^t |\theta(s)|ds,$$

et

$$\begin{aligned} V &= dc(t)F(x) + c(t)f(x)y + \frac{b(t)}{2h(x)}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{h(x)}yz \\ &+ \frac{1}{2}\frac{da(t)}{h^2(x)}y^2 + \lambda \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds, \end{aligned} \tag{2.7}$$

et $F(x) = \int_0^x f(u)du$, μ et λ sont des constantes positives qui seront determinées plus tard. De la définition de V dans (2.7), on constate que la fonctionnelle précédente peut être réécrite comme suite

$$V = V_1 + V_2 + \lambda \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds,$$

avec

$$V_1 = dc(t)F(x) + c(t)f(x)y + \frac{b(t)}{2h(x)}y^2,$$

et

$$V_2 = \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{h(x)}yz + \frac{1}{2}\frac{da(t)}{h^2(x)}y^2.$$

On écrira l'expression ci-dessus comme

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2}(z^2 + \frac{2d}{h(x)}yz + \frac{da(t)}{h^2(x)}y^2), \\ &= \frac{1}{2}(z + \frac{d}{h(x)}y)^2 + \frac{d(a(t)-d)}{2h^2(x)}y^2. \end{aligned}$$

Par (i) et (C_1) alors

$$\frac{d(a(t)-d)}{2h^2(x)} \geq \frac{d(a-d)}{2h^2(x)} > 0.$$

Ainsi, il existe des constantes positives telles que

$$V_2 \geq \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2. \tag{2.8}$$

D'autre part, en utilisant les hypothèses (i)-(iv) et (C_1), avec un réarrungement de V_1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
V_1 &= dc(t)F(x) + c(t)f(x)y + \frac{b(t)}{2h(x)}y^2, \\
&= dc(t)F(x) + c(t)f(x)y + \frac{b(t)}{2h(x)}y^2 - \frac{c^2(t)f^2(x)h(x)}{2b(t)} + \frac{c^2(t)f^2(x)h(x)}{2b(t)}, \\
&= dc(t)F(x) + \frac{b(t)}{2h(x)}\left(y + \frac{c(t)f(x)h(x)}{b(t)}\right)^2 - \frac{c^2(t)f^2(x)h(x)}{2b(t)}, \\
&\geq dc(t)F(x) - \frac{c^2(t)f^2(x)h(x)}{2b(t)}, \\
&\geq dc(t)F(x) - \frac{c(t)f^2(x)h(x)}{2}, \qquad \text{car } c(t) \leq b(t), \\
&\geq dc(t)[F(x) - \frac{h(x)f^2(x)}{2d}], \\
&\geq dc(t)\left(F(x) - \frac{h_1}{2d}f^2(x)\right),
\end{aligned}$$

Par intérgral par partie on a

$$\int_0^x f'(u)f(u)du = f^2(x) - \int_0^x f'(u)f(u)du.$$

Il obtient

$$f^2(x) = 2\int_0^x f'(u)f(u)du.$$

Alors

$$\begin{aligned}
V_1 &\geq dc(t)\left(\int_0^x f(u)du - \frac{h_1}{d}\int_0^x f^{'}(u)f(u)du\right), \\
&\geq dc(t)\left(\int_0^x f(u)du - \frac{h_1\delta_1}{d}\int_0^x f(u)du\right), \\
&\geq dc(t)\int_0^x (1 - \frac{h_1\delta_1}{d})f(u)du, \\
&\geq \delta_4 \int_0^x f(u)du,
\end{aligned}$$

où

$$\delta_4 = dc(1 - \frac{h_1\delta_1}{d}) > dc(1 - \frac{d}{d}) = 0.$$

Donc à partir de (iii) nous obtenons

$$V_1 \geq \delta_4\delta_0 \int_0^x udu,$$

alors

$$V_1 \geq \frac{\delta_4\delta_0}{2}x^2. \tag{2.9}$$

Il est clair que, par (2.7), (2.8) et (2.9), nous avons :

$$V \geq \delta_2 y^2 + \delta_3 z^2 + \frac{\delta_4\delta_0}{2}x^2 + \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds.$$

Par conséquent, il est évident, d'aprés les termes contenus dans la dernière inégalité, qu'il existe une constante positive suffisamment petite k, de sorte que

$$V \geq k(x^2 + y^2 + z^2), \tag{2.10}$$

car l'intégrale $\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi$ est positive, et $k = \min\{\delta_2,\delta_3,\frac{\delta_4\delta_0}{2}\}$.

Nous observons que par (iv), nous avons

$$\gamma(t) = \int_0^t |\theta(s)|ds = \int_t^0 \frac{|h'(x(s))|}{h^2(x(s))}x'(s)ds.$$

Par un changement du variable $u = x(s)$ alors

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \frac{|h'(u)|}{h^2(u)}du, \\ &\leq \frac{1}{h_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|h'(u)|du \leq N < \infty, \end{aligned} \tag{2.11}$$

où $\alpha_1(t) = \min\{x(0),x(t)\}$ et $\alpha_2(t) = \max\{x(0),x(t)\}$.

Par conséquent nous pouvons trouver une fonction continue $W_0(\|X(t)\|)$ avec

$$W_0(\|X(t)\|) \geq 0 \quad \text{et} \quad W_0(\|X(t)\|) \leq U(t, X_t)\,.$$

D'autre part, en utilisant les hypothèses (i), (iv) et (C_2), nous obtenons

$$\begin{aligned} V &= dc(t)F(x) + c(t)f(x)y + \frac{b(t)}{2h(x)}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{h(x)}yz + \frac{1}{2}\frac{da(t)}{h^2(x)}y^2 \\ &+ \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds, \\ &\leq dC\int_0^x\int_0^u f'(\nu)d\nu du + Cy\int_0^x f'(u)du + \frac{B}{2h_0}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{h_0}yz \\ &+ \frac{dA}{2h_0^2}y^2 + (\lambda+1)\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}\left(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)\right)d\xi ds, \\ &\leq dC\delta_1\int_0^x\int_0^u d\nu du + C\delta_1 y\int_0^x du + \frac{B}{2h_0}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{h_0}yz + \frac{dA}{2h_0^2}y^2 \\ &+ (\lambda+1)\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}\left(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)\right)d\xi ds, \\ &\leq \frac{1}{2}dC\delta_1 x^2 + C\delta_1 xy + \frac{B}{2h_0}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{h_0}yz + \frac{dA}{2h_0^2}y^2 \\ &+ (\lambda+1)\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}\left(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)\right)d\xi ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $2ab \leq (a^2+b^2)$, alors

$$\begin{aligned}V &\leq \frac{1}{2}dC\delta_1 x^2 + \frac{1}{2}C\delta_1(x^2+y^2) + \frac{B}{2h_0}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{2h_0}(y^2+z^2) + \frac{dA}{2h_0^2}y^2 \\ &+ (\lambda+1)\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}\left(x^2(\xi)+y^2(\xi)+z^2(\xi)\right)d\xi ds, \\ &\leq \frac{C\delta_1}{2}(1+d)x^2 + \frac{1}{2}(C\delta_1 + \frac{B}{h_0} + \frac{d}{h_0} + \frac{dA}{h_0^2})y^2 + \frac{1}{2}(1+\frac{d}{h_0})z^2 \\ &+ (\lambda+1)\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}\left(x^2(\xi)+y^2(\xi)+z^2(\xi)\right)d\xi ds, \\ &\leq \varphi_1\left(x^2+y^2+z^2\right) + \varphi_2\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}\left(x^2(\xi)+y^2(\xi)+z^2(\xi)\right)d\xi ds,\end{aligned} \tag{2.12}$$

où $\varphi_1 = \frac{1}{2}\max\{C\delta_1(1+d), C\delta_1 + \frac{B}{h_0} + \frac{d}{h_0} + \frac{dA}{h_0^2}, 1+\frac{d}{h_0}\}$ et $\varphi_2 = \max\{1,\lambda\}$.
Donc l'existence d'une fonction continue $W_1(\|X(t)\|) + W_2(\|X_t\|_2)$ qui satisfait l'inégalité $U(t,X_t) \leq W_1(\|X(t)\|) + W_2\left(\left(\int_{t-r}^{t}\|X(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)$.
Par conséquent, la premiére condition du Théorème 1.9 est satisfaite.

Pour la dérivée totale de la fonctionnelle $V(t,x_t,y_t,z_t)$, le long des trajectoires du système (2.5), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &= dc'(t)F(x) + c'(t)f(x)y + \frac{b'(t)}{2h(x)}y^2 + \frac{1}{h(x)}\big(d-a(t)\big)z^2 \\ &+ \frac{h'(x)x'}{h^2(x)}\left((a(t)-d)zy - \frac{b(t)}{2}y^2\right) \\ &+ \left(\frac{da'(t)+2c(t)h(x)f'(x)-2db(t)}{2h^2(x)}\right)y^2 + \lambda r y^2 \\ &+ c(t)\left(z+\frac{d}{h(x)}y\right)\int_{t-r}^{t}y(s)\frac{f'(x(s))}{h(x(s))}ds - \lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

En conséquence, par les hypothèses du théorème 2.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &\leq dc'(t)F(x) + c'(t)yf(x) + \frac{b'(t)}{2h(x)}y^2 \\ &+ |\theta(t)|\left((A-d)|zy| + \frac{B}{2}y^2\right) + \left(\frac{da'(t)+2\delta_1 bh_1 - 2db}{2h_1^2}\right)y^2 \\ &+ \lambda r y^2 - \frac{1}{h_1}(a_0-d)z^2 - \lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi \\ &+ c(t)\big(z+\frac{d}{h(x)}y\big)\int_{t-r}^{t}y(s)\frac{f'(x(s))}{h(x(s))}ds.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &\leq dc'(t)F(x)+c'(t)yf(x)+\frac{b'(t)}{2h(x)}y^2\\ &+|\theta(t)|\left[(A-d)|zy|+\frac{B}{2}y^2\right]\\ &-\left(\frac{\varepsilon}{h_1^2}-\lambda r\right)y^2-\frac{1}{h_1}(a-d)z^2\\ &+c(t)\left(z+\frac{dy}{h(x)}\right)\int_{t-r}^{t}y(s)\frac{f'(x(s))}{h(x(s))}ds-\lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

On définie la fonction H comme

$$H(t,x,y)=dc'(t)F(x)+c'(t)yf(x)+\frac{b'(t)}{2h(x)}y^2,$$

pour tout x,y et $t\geq 0$ .et on vérifie que $H(t,x,y)\leq 0$.

cas 1 : Si $c'(t)=0$, alors

$$H(t,x,y)=\frac{b'(t)}{2h(x)}y^2\leq 0.$$

cas 2 : Si $c'(t)<0$, alors $H(t,x,y)$ peut être écrit comme

$$H(t,x,y)=dc'(t)H_1(t,x,y),$$

où

$$\begin{aligned}H_1(t,x,y)&=F(x)+\frac{1}{d}yf(x)+\frac{b'(t)}{2dh(x)c'(t)}y^2,\\ H_1(t,x,y)&=F(x)+\frac{1}{d}yf(x)+\frac{b'(t)}{2dh(x)c'(t)}y^2+\frac{c'(t)h(x)}{db'(t)}f^2(x)-\frac{c'(t)h(x)}{db'(t)}f^2(x),\\ H_1(t,x,y)&=F(x)+\frac{b'(t)}{2dh(x)c'(t)}\left(y+\frac{c'(t)h(x)}{b'(t)}f(x)\right)^2-\frac{c'(t)h(x)}{2db'(t)}f^2(x).\end{aligned}$$

D'aprés (ii) on a $0<\frac{c'(t)}{b'(t)}\leq 1$, ce qui implique

$$\begin{aligned}H_1(t,x,y)&\geq F(x)-\frac{c'(t)h(x)}{2db'(t)}f^2(x),\\ &\geq F(x)-\frac{h(x)}{2d}f^2(x),\\ &\geq F(x)-\frac{h_1}{2d}f^2(x),\\ &\geq\int_0^x(1-\frac{h_1\delta_1}{d})f(u)du,\\ &\geq\frac{\delta_4}{dc}\int_0^x f(u)du\geq 0.\end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que

$$H(t,x,y) = dc'(t)H_1(t,x,y) \leq 0.$$

Par conséquent, en combinant les deux cas on a $H(t,x,y) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$, x et y.
En utilisant l'inégalité de Schwartz $|uv| \leq \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
|\theta(t)|\Big((A-d)|zy| + \frac{B}{2}y^2\Big) &\leq |\theta(t)|\Big(\frac{(A-d)}{2}\big(y^2+z^2\big) + \frac{B}{2}y^2\Big),\\
&= |\theta(t)|\Big(\frac{(A-d+B)}{2}y^2 + \frac{A-d}{2}z^2\Big),\\
&\leq k_1|\theta(t)|(y^2+z^2),
\end{aligned}$$

où $k_1 = \frac{(A-d+B)}{2}$. Puisque $|f'(x)| \leq \delta_1$ on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{dc(t)}{h(x)}y\int_{t-r}^{t} y(s)\frac{f'(x(s))}{h(x(s))}ds &\leq \frac{Cd\delta_1}{2h_0}\int_{t-r}^{t} y\frac{y(s)}{h(x(s))}ds,\\
&\leq \frac{C\delta_1 dr}{2h_0}y^2 + \frac{Cd\delta_1}{2h_0^3}\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
c(t)z\int_{t-r}^{t} y(s)\frac{f'(x(s))}{h(x(s))}ds &\leq C\delta_1\int_{t-r}^{t} z\frac{y(s)}{h(x(s))}ds,\\
&\leq \frac{C\delta_1 r}{2}z^2 + \frac{C\delta_1}{2h_0^2}\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Aprés quelques réarrangements, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V \leq &-\Big[\frac{\varepsilon}{h_1^2} - \big(\lambda + \frac{dC\delta_1}{2h_0}r\big)\Big]y^2 - \big(\frac{a_0-d}{h_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}\big)z^2,\\
&+ k_1|\theta(t)|\big(y^2+z^2\big) + \Big(\frac{C\delta_1}{2h_0^2}(1+\frac{d}{h_0}) - \lambda\Big)\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Si on prend $\lambda = \frac{C\delta_1}{2h_0^2}\big(1+\frac{d}{h_0}\big)$, la dernière inégalité deviant :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V \leq &-\Big(\frac{\varepsilon}{h_1^2} - \frac{C\delta_1}{2h_0}\big(d + \frac{1}{h_0} + \frac{d}{h_0^2}\big)r\Big)y^2 - \Big(\frac{a_0-d}{h_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}\Big)z^2,\\
&+ k_1|\theta(t)|\big(y^2+z^2\big).
\end{aligned}$$

En utilisant (2.6), (2.10) et en posant $\mu = \frac{k}{k_1}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U &= \frac{k}{k_1}|\theta(t)|exp\Big(\frac{-k_1\gamma(t)}{k}\Big)V + exp\Big(\frac{-k_1\gamma(t)}{k}\Big)\frac{d}{dt}V,\\ &= exp\Big(\frac{-k_1\gamma(t)}{k}\Big)\Big(\frac{d}{dt}V - \frac{k_1}{k}|\theta(t)|V\Big),\\ &\leq \exp\left(\frac{-k_1\gamma(t)}{k}\right)\left[\Big(-\frac{\varepsilon}{h_1^2} - \frac{C\delta_1}{2h_0}(d + \frac{1}{h_0} + \frac{d}{h_0^2})r\Big)y^2 - \Big(\frac{a_0 - d}{h_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}\Big)z^2\right].\end{aligned} \tag{2.13}$$

D'où, si

$$r < \min\left\{\frac{2(a-d)}{h_1 C\delta_1}, \frac{2h_0^3\varepsilon}{C\delta_1 h_1^2(d + dh_0^2 + h_0)}\right\}.$$

l'inégalité (2.13) implique

$$\frac{d}{dt}U(t,x_t,y_t,z_t) \leq -\beta_0 \exp\left(\frac{-k_1 N}{k}\right)\big(y^2 + z^2\big) \leq -\beta_0\big(y^2+z^2\big) \leq 0 \quad \text{pour} \quad \beta_0 > 0.$$

À savoir, la seule solution du système (2.5) pour le quel $\frac{d}{dt}U(t,x_t,y_t,z_t) = 0$ est la solution $x = y = z = 0$. Ainsi, en vertu de ce qui précéde, nous concluons que $(x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow 0$. D'où, h' étant continue et grace à la condition (iv), on conclut que la solution $x(t)$ de (2.1) et ses dérivées $x'(.)$ et $x''(.)$ sont uniformément asymptotiquement stables. □

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, et les hypothèses suivantes :*

H_1) $1 \leq \psi(y) \leq \beta$.

H_2) $d_1 \geq \frac{g(y)}{y} \geq d_0 > 0 \quad (y \neq 0)$.

H_3) $\frac{h_1\delta_1}{d_0} < \alpha < a$.

H_4) $\frac{1}{2}a'(t) \leq \delta_2 < \frac{b(\alpha d_0 - \delta_1 h_1)}{\alpha\beta}$.

$$r < \min\left\{\frac{2(a-d)}{h_1 C\delta_1|}, \frac{2\sigma h_0^3}{C\delta_1 h_1^2\left(\alpha + \alpha h_0^2 + h_0\right)}\right\},$$

où

$$\alpha\delta_2\beta + b\left(\delta_1 h_1 - \alpha d_0\right) = -\sigma < 0.$$

Alors toute solution de (2.2) est uniformément asymptotiquement stable.

Démonstration. Nous écrivons l'équation (2.2) sous la forme du système :

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{h(x)}y, \\
y' &= z, \\
z' &= -\frac{a(t)}{h(x)}z\psi\left(\frac{y}{h(x)}\right) + \frac{a(t)h'(x)}{h^3(x)}y^2\psi\left(\frac{y}{h(x)}\right) - b(t)g\left(\frac{y}{h(x)}\right) \\
&\quad - c(t)f(x) + c(t)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{h(x(s))}f'(x(s))ds.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Considérons la fonction $U = U(t, x_t, y_t, z_t)$ définie par

$$U\left(t, x_t, y_t, z_t\right) = \exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_0^t |\theta(s)|ds\right)V, \tag{2.15}$$

où

$$\begin{aligned}
V &= \alpha c(t)F(x) + c(t)f(x)y + b(t)h(x)G\left(\frac{y}{h(x)}\right) + \frac{1}{2}z^2 + \frac{\alpha}{h(x)}yz \\
&\quad + \alpha a(t)\int_0^{\frac{y}{h(x)}}\psi(u)udu + \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}y^2(\xi)d\xi ds,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

tel que $F(x) = \int_0^x f(u)du$ et $G(y) = \int_0^y g(u)du$, μ et λ sont des constantes positives qui seront précisées plus tard. Nous pouvons réécrire (2.16), comme suit

$$\begin{aligned}
V &= \alpha a(t)\int_0^{\frac{y}{h(x)}}\left[\psi(u) - \frac{\alpha}{a(t)}\right]udu + \frac{1}{2}\left(z + \frac{\alpha}{h(x)}y\right)^2 \\
&\quad + c(t)\left[\alpha F(x) + \frac{b(t)h(x)}{c(t)}G\left(\frac{y}{h(x)}\right) + f(x)y\right] \\
&\quad + \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}y^2(\xi)d\xi ds.
\end{aligned}$$

D'aprés (H_2), on obtient

$$\begin{aligned}
G(\frac{y}{h(x)}) &= \int_0^{\frac{y}{h(x)}} g(u)du, \\
&\leq \int_0^{\frac{y}{h(x)}} d_1 y du = \frac{d_1}{h(x)}y^2.
\end{aligned}$$

En utilisant nos hypothèses, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
V &\geq \alpha a(t)\int_0^{\frac{y}{h(x)}}(1-\frac{\alpha}{a})udu+\frac{1}{2}\left(z+\frac{\alpha}{h(x)}y\right)^2 \\
&+c(t)\left(\alpha F(x)+\frac{b(t)h(x)}{c(t)}\frac{d_0y^2}{h^2(x)}+f(x)y\right)+\lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}y^2(\xi)d\xi ds, \\
&\geq \alpha a\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)\frac{y^2}{2h^2(x)}+\frac{1}{2}\left(z+\frac{\alpha}{h(x)}y\right)^2+\frac{c(t)h(x)}{2d_0}\left(\frac{d_0y}{h(x)}+f(x)\right)^2 \\
&+\alpha c\int_0^x\left(1-\frac{\delta_1h_1}{\alpha d_0}\right)f(s)ds+\lambda\int_{-r}^{t}\int_{t+s}^{t}y^2(\xi)d\xi ds.
\end{aligned}
$$

Puisque l'intégrale $\lambda\int_{-r}^{t}\int_{t+s}^{t}y^2(\xi)d\xi ds$ est positive on a

$$
\begin{aligned}
V &\geq \alpha a\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)\frac{y^2}{2h^2(x)}+\frac{1}{2}\left(z+\frac{\alpha}{h(x)}y\right)^2+\frac{c(t)h(x)}{2d_0}\left(\frac{d_0y}{h(x)}+f(x)\right)^2 \\
&+\frac{\delta_3\delta_0}{2}x^2,
\end{aligned}
$$

où $\delta_3=\alpha c\left(1-\frac{n_1\delta_1}{\alpha d_0}\right)>\alpha c\left(1-\frac{\alpha}{\alpha}\right)=0$.
D'où, il existe une constante positive k, suffisamment petite de telle sorte que

$$
V\geq k\left(x^2+y^2+z^2\right). \tag{2.17}
$$

Vu l'inégalité (2.11), nous pouvons trouver une fonction continue $W_0(\|X(t)\|)$ avec

$$
W_0(\|X(t)\|)\geq 0 \quad \text{et} \quad W_0(\|X(t)\|)\leq U\left(t,X_t\right).
$$

D'autre part, en utilisant les hypothèses (i), (iii) et (iv), (H_1), (H_2) et puis inégalité $ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, devient

$$
\begin{aligned}
V &= \alpha c(t)F(x)+c(t)f(x)y+b(t)h(x)G\left(\frac{y}{h(x)}\right)+\frac{1}{2}z^2+\frac{\alpha}{h(x)}yz \\
&+\alpha a(t)\int_0^{\frac{y}{h(x)}}\psi(u)udu, \\
&\leq \alpha C\int_0^x\int_0^u f'(\xi)d\xi+Cy\int_0^x f'(u)du+\frac{Bh_1d_0}{h_0^2}y^2+\frac{1}{2}z^2+\frac{\alpha}{h_0}yz \\
&+\alpha A\int_0^{\frac{y}{h(x)}}\beta udu+\lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}\left(x^2(\xi)+y^2(\xi)+z^2(\xi)\right)d\xi ds \\
&+\int_{t+s}^{t}\left(x^2(\xi)+y^2(\xi)+z^2(\xi)\right)d\xi ds,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}V &\leq \frac{1}{2}(\alpha C\delta_1 + C\delta_1)x^2 + \frac{1}{2}(C\delta_1 + \frac{Bh_1d_0}{h_0^2} + \frac{\alpha}{h_0} + \frac{\alpha A\beta}{h_0^2})y^2 + \frac{1}{2}(1 + \frac{\alpha}{h_0})z^2 \\ &+ (1+\lambda)\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}\big(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)\big)d\xi ds, \\ &\leq \sigma_1(x^2 + y^2 + z^2) + \sigma_2\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}\big(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)\big)d\xi ds,\end{aligned}$$

où $\sigma_1 = \frac{1}{2}\max\{\alpha C\delta_1 + C\delta_1, C\delta_1 + \frac{Bh_1d_0}{h_0^2} + \frac{\alpha}{h_0} + \frac{\alpha A\beta}{h_0^2}, 1 + \frac{\alpha}{h_0}\}$ et $\sigma_2 = \max\{1, \lambda\}$.
Comme $\int_{-\infty}^{+\infty}|h'(u)|du < \infty$ alors $\frac{\theta(t)}{\mu} \leq \frac{N}{\mu}$ nous avons

$$\eta_2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \leq \exp\left(-\frac{N}{\mu}\right)V \leq U = \exp\left(-\frac{\theta(t)}{\mu}\right)V \leq V,$$

où $\eta_2 = k\exp\left(-\frac{N}{\mu}\right)$.
Donc l'existence d'une fonction continue $W_1(\|X(t)\|) + W_2\left(\|X_t\|_2\right)$ qui satisfait l'inégalité

$$U\left(t, X_t\right) \leq W_1(\|X(t)\|) + W_2\left(\left(\int_{t-r}^{t}\|X(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Pour la dérivée totale de la fonctionnelle $V(t, x_t, y_t, z_t)$, le long des trajectoires du système (2.14), nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_{(2.14)} =& \alpha c'(t)F(x) + c'(t)yf(x) + b'(t)h(x)G\left(\frac{y}{h(x)}\right) \\ &+ \frac{\alpha}{h(x)}z^2 - a(t)\frac{z^2}{h(x)}\Psi\left(\frac{y}{h(x)}\right) - \alpha b(t)\frac{y}{h(x)}g\left(\frac{y}{h(x)}\right) \\ &+ \alpha a'(t)\int_0^{\frac{y}{h(x)}}\Psi(u)udu + \frac{c(t)f'(x)}{h(x)}y^2 + \lambda r y^2 \\ &+ \theta(t)\left[b(t)h^2(x)G\left(\frac{y}{h(x)}\right) - b(t)yh(x)g\left(\frac{y}{h(x)}\right) + \left(a(t)\Psi\left(\frac{y}{h(x)}\right) - \alpha\right)zy\right] \\ &+ c(t)\left(\frac{\alpha y}{h(x)} + z\right)\int_{t-r}^{t}y(s)\frac{f'(x(s))}{h(x(s))}ds - \lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz $|uv| \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ et $|f'(x)| \leq \delta_1$, nous obtenons les inégalités suivantes

$$\frac{\alpha c(t)}{h(x)}y\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{h(x(s))}f'(x(s))ds \leq \frac{C\delta_1\alpha r}{2h_0}y^2 + \frac{C\alpha\delta_1}{2h_0^3}\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi,$$

et

$$c(t)z\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{h(x(s))}f'(x(s))ds \leq \frac{C\delta_1 r}{2}z^2 + \frac{C\delta_1}{2h_0^2}\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.$$

En utilisant les conditions du Théorème 2.2 et les inégalités précédentes, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_{(2.14)} &\leq \alpha c'(t)F(x) + c'(t)yf(x) + b'(t)h(x)G\left(\frac{y}{h(x)}\right) \\ &- \left[\frac{a-\alpha}{h_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}\right]z^2 + \left[\frac{\alpha\delta_2\beta + b\left(\delta_1 h_1 - \alpha d_0\right)}{h_1^2}\right]y^2 \\ &+ |\theta(t)|\left[\frac{3}{2}d_1 By^2 + (A\beta-\alpha)|zy|\right] + \left(\lambda + \frac{\alpha C\delta_1}{2h_0}\right)ry^2 \\ &+ \left[\frac{C\delta_1}{2h_0^2}\left(1+\frac{\alpha}{h_0}\right) - \lambda\right]\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Nous affirmons que

$$Q(t,x,y) = \alpha c'(t)F(x) + c'(t)yf(x) + b'(t)h(x)G\left(\frac{y}{h(x)}\right) \leq 0,$$

pour tout x, y et $t \geq 0$. Il y a deux cas : $c'(t) = 0$ et $c'(t) < 0$.

Cas 1 : $c'(t) = 0$, alors $Q(t,x,y) = \frac{d_0 b'(t)}{2h(x)}y^2 \leq 0$.

Cas 2 : : $c'(t) < 0$, on observe que (H_2) implique que

$$G(y) \geq \frac{1}{2}d_0 y^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}Q(t,x,y) &\leq \alpha c'(t)\left[F(x) + \frac{1}{\alpha}yf(x) + \frac{d_0 b'(t)}{2\alpha h(x)c'(t)}y^2\right], \\ &\leq \alpha c'(t)\left[F(x) + \frac{d_0 b'(t)}{2\alpha h(x)c'(t)}\left(y + \frac{c'(t)h(x)f(x)}{d_0 b'(t)}\right)^2 - \frac{c'(t)h(x)f^2(x)}{2\alpha d_0 b'(t)}\right].\end{aligned}$$

Il est nécessaire que $\frac{c'(t)}{b'(t)} \leq 1$ par (ii), alors

$$\begin{aligned}Q(t,x,y) &\leq \alpha c'(t)\int_0^x \left(1 - \frac{h_1\delta_1}{\alpha d_0}\right)f(u)du, \\ &\leq c'(t)\frac{\delta_3}{c}F(x) \leq 0.\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a $Q(t,x,y) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$, x et y.

Comme $2|uv| \leq (u^2+v^2)$, on obtient

$$\begin{aligned}|\theta(t)|\left[\frac{3d_1}{2}By^2 + (A\beta-\alpha)|zy|\right] &\leq \frac{1}{2}|\theta(t)|\left[3d_1By^2 + (A\beta-\alpha)(y^2+z^2)\right]. \\ &\leq k_1|\theta(t)|\left(y^2+z\right),\end{aligned}$$

où $k_1 = \frac{1}{2}(A\beta + \alpha + 3d_1 B)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_{(2.14)} \leq &- \left[\frac{\sigma}{h_1^2} - \left(\lambda + \frac{\alpha C\delta_1}{2h_0}\right)r\right]y^2 - \left[\frac{a-\alpha}{h_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}\right]z^2\\ &+ \left[\frac{C\delta_1}{2h_0^2}\left(1+\frac{\alpha}{h_0}\right) - \lambda\right]\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi\\ &+ k_1|\theta(t)|\left(y^2+z^2\right).\end{aligned}$$

Remplaçant λ par $\frac{C\delta_1}{2h_0^2}\left(1+\frac{\alpha}{h_0}\right)$, la dernière inégalité devient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_{(2.14)} \leq &- \left[\frac{\sigma}{h_1^2} - \frac{C\delta_1}{2h_0}\left(\alpha + \frac{1}{h_0} + \frac{\alpha}{h_0^2}\right)r\right]y^2\\ &- \left[\frac{a-\alpha}{h_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}\right]z^2\\ &+ k_1|\theta(t)|\left(y^2+z^2\right).\end{aligned}$$

En combinant (2.15) avec (2.17) et en posant $\mu = \frac{k}{k_1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U_{(2.14)} &= \exp\left(-\frac{k_1}{k}\int_0^t |\theta(s)|ds\right)\left(\frac{d}{dt}V_{(3.1)} - \frac{k_1|\theta(t)|}{k}V\right)\\ &\leq \exp\left(-\frac{k_1}{k}\int_0^t |\theta(s)|ds\right)\left(-k_2y^2 - k_3z^2\right),\end{aligned} \tag{2.18}$$

où $k_2 = \frac{\sigma}{h_1^2} - \frac{C\delta_1 r}{2h_0}\left(\alpha + \frac{1}{h_0} + \frac{\alpha}{h_0^2}\right)$ et $k_3 = \frac{a-\alpha}{h_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}$.
En choisissant

$$r < \min\left\{\frac{2(a-\alpha)}{h_1 C\delta_1}, \frac{2\sigma h_0^3}{C\delta_1 h_1^2\left(\alpha + \alpha h_0^2 + h_0\right)}\right\},$$

an a

$$\frac{d}{dt}U\left(t,x_t,y_t,z_t\right) \leq -\alpha_0 \exp\left(-\frac{k_1 N}{k}\right)\left(y^2+z^2\right) \leq -\alpha_0\left(y^2+z^2\right), \quad \text{pour tout} \quad \alpha_0 > 0.$$

Ainsi, en vertu de ce qui précéde, nous concluons que toute solution de l'équation (2.2) est uniformément asymptotiquement stable. □

2.1.2 Bornitude

Dans le cas $e(t) \neq 0$, on établit le résultat suivant :

Théorème 2.3. *En plus des hypothèses du Théoréme 2.1, si on suppose que $e(t)$ est continue dans $\mathbb{R}$ et*

$$\int_0^t |e(s)|ds < E < \infty \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

alors toutes les solutions de l'équation perturbée (2.3) sont uniformément bornées.

Démonstration. L'équation (2.3) est équivalente au système

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{h(x)}y, \\ y' &= z, \\ z' &= -\frac{a(t)}{h(x)}z + \frac{a(t)h'(x)}{h^3(x)}y^2 - \frac{b(t)}{h(x)}y - c(t)f(x) + c(t)\int_{t-r}^t y(s)\frac{f'(x(s))}{h(x(s))}ds + e(t). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Par dérivation de U le long des trajectoires du système (2.19), on obtient

$$\dot{U}_{(2.19)}(t, x_t, y_t, z_t) = \dot{U}_{(2.5)}(t, x_t, y_t, z_t) + (y + \frac{d}{h(x)}z)e(t).$$

Puisque $\dot{U}_{(2.5)} \leq 0$ pour tout t, x, y, z, alors

$$\dot{U}_{(2.19)} \leq (y + \frac{d}{h(x)}z)e(t) \leq (|y| + \frac{d}{h(x)}|z|)|e(t)| \leq \eta_0(|y| + |z|)|e(t)|,$$

où $\eta_0 = \max\{1, \frac{d}{h_0}\}$. Notons que $|x| < 1 + x^2$, et puisque $k\|X\|^2 \leq U(t, x_t, y_t, z_t)$, nous avons

$$\begin{aligned} \dot{U}_{(2.19)} &\leq \eta_0\left(2 + y^2 + z^2\right)|e(t)|, \\ &\leq 2\eta_0|e(t)| + \eta_0\|X\|^2|e(t)|, \\ &\leq 2\eta_0|e(t)| + \frac{\eta_0}{k}U(t, x_t, y_t, z_t)|e(t)|. \end{aligned}$$

Soit $\eta = \max\left\{2\eta_0, \frac{\eta_3}{k}\right\}$, alors

$$\dot{U}_{(2.19)} - \eta U|e(t)| \leq \eta|e(t)|. \tag{2.20}$$

Intégrons (2.20) entre 0 et t, en utilisant le lemme de Gronwall.Bellman, on a

$$\begin{aligned} U &\leq U(0,x_0,y_0,z_0) + \eta\int_0^t U|e(s)|ds, \\ &+ \eta\int_0^t |e(s)|ds \\ &\leq (U_0 + \eta E)e^{\eta\int_0^t |e(s)|ds}, \\ &\leq K_1, \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $U_0 = U(0,x_0,y_0,z_0)$ et $K_1 = (U_0 + \eta E)e^{\eta E}$.
À partir des inégalités (2.10) et (2.21), nous avons

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq K_2,$$

où $K_2 = \frac{K_1}{k}$.
L'inégalité précédente implique que

$$|x(t)| \leq K_2 \quad |y(t)| \leq K_2 \quad |z(t)| \leq K_2 \quad \text{pour tout} \quad t \geq t_0.$$

D'aprés (2.19) et (i), (iv), on obient

$$|x(t)| \leq K_2, \quad |x'(t)| \leq K_2, \quad |x''(t)| \leq K_2 \quad \text{pour tout} \quad t \geq t_0,$$

ce qui achève la preuve de théorème . □

Dans le cas $p \neq 0$ on établit le résultat suivant :

Théorème 2.4. *En plus des hypothèses du Théoréme 2.1, si on suppose que*

$$|p(t, x, x(t-r), y, y(t-r), z)| \leq q(t),$$

où $q \in L^1(0,\infty)$, $L^1(0,\infty)$ étant l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue. Alors, toutes les solutions de l'équation perturbée (2.4) sont uniformément bornées.

Démonstration. La preuve de ce théorème dépendra de la fonction estimée $U(t, x_t, y_t, z_t)$ déjà utilisée dans la preuve du Théorème 2.2. On a montré que

$$\eta_2\|X\|^2 \leq U(t, X_t) \leq \sigma_1\|X\|^2 + \sigma_2 \int_{t+s}^{0} \int_{t+s}^{t} \|X(\xi)\|^2 d\xi ds. \tag{2.22}$$

L'équation (2.4) est équivalente au système

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{h(x)}y,\\
y' &= z,\\
z' &= -\frac{a(t)}{h(x)}z\psi\left(\frac{y}{h(x)}\right) + \frac{a(t)h'(x)}{h^3(x)}y^2\psi\left(\frac{y}{h(x)}\right) - b(t)g\left(\frac{y}{h(x)}\right) - c(t)f(x)\\
&\quad + c(t)\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{h(x(s))}f'(x(s))ds + p\left(t, x(t), x(t-r), y(t), y(t-r), z(t)\right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Nous avons

$$\dot{U}_{(2.23)}\left(t,x_t,y_t,z_t\right)=\dot{U}_{(2.14)}\left(t,x_t,y_t,z_t\right)+(z+\frac{\alpha}{h(x)}y)p\left(t,x(t),x(t-r),y(t),y(t-r),z(t)\right).$$

Puisque $\dot{U}_{(2.14)}(t,x_t,y_t,z_t)\le 0$ pour tout t,x,y,z et $|p(t,x,x(t-r),y,y(t-r),z)|\le q(t)$, alors

$$\begin{aligned}\dot{U}_{(2.23)}(t,x_t,y_t,z_t)&\le (z+\frac{\alpha}{h(x)}y)p\left(t,x(t),x(t-r),y(t),y(t-r),z(t)\right),\\&\le (|z|+\frac{\alpha}{h_0}|y|)|p\left(t,x(t),x(t-r),y(t),y(t-r),z(t)\right)|,\\&\le \sigma_3(|y|+|z|)q(t),\end{aligned}$$

où $\sigma_3=\max\{1,\frac{\alpha}{h_0}\}$.
En utilisant les inégalitées $|y|<1+y^2$, $|z|<1+z^2$, et comme $\eta_2\|X\|^2\le U\left(t,x_t,y_t,z_t\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}\dot{U}_{(2.23)}(t,x_t,y_t,z_t)&\le \sigma_3\left(2+y^2+z^2\right)q(t),\\&\le 2\sigma_3 q(t)+\sigma_3\|X\|^2q(t),\\&\le \sigma_3(2+\frac{1}{\eta_2}U\left(t,x_t,y_t,z_t\right))q(t).\end{aligned}$$

Maintenant, en intégrant la dernière inégalité de 0 à t, en utilisant $q\in L^1(0,\infty)$ et l'inégalité de Gronwall-Reid-Bellman, on obtient

$$\begin{aligned}U\left(t,x_t,y_t,z_t\right)&\le U_0+2\sigma_3A+\sigma_3\frac{1}{\eta_2}\int_0^t U\left(s,x_s,y_s,z_s\right)q(s)ds,\\&\le \{U_0+2\sigma_3A\}\exp\left(\sigma_3\frac{1}{\eta_2}\int_0^t q(s)ds\right),\\&=\{U_0+2\sigma_3A\}\exp\left(\sigma_3\frac{1}{\eta_2}A\right)=K_1<\infty,\end{aligned}\tag{2.24}$$

où $K_1>0$ est une constante, $K_1=\{U(0)+2\sigma_3A\}\exp\left(\sigma_3\frac{1}{\eta_2}A\right)$, et $A=\int_0^\infty q(s)ds$ et $U_0=U(0,x_0,y_0,z_0)$.
Ainsi, nous avons de (2.22) et (2.24) que

$$x^2+y^2+z^2\le\frac{1}{\eta_2}U\left(t,x_t,y_t,z_t\right)\le K,$$

où $K=\frac{K_1}{\eta_2}$. Ainsi, nous concluons que

$$|x(t)|\le K,\quad |y(t)|\le K,\quad |z(t)|\le K,$$

pour tout $t \geq t_0$. C'est

$$|x| \leq K, \quad |x'(t)| \leq K, \quad |x''(t)| \leq K,$$

pour tout $t \geq t_0$. La preuve du théorème est complète. $\square$

2.1.3 Exemples

On donne deux exemples pour illustrer résultats les principaux .

Exemple 2.1. Nous considérons l'équation différentielle de troisiéme ordre non autonome avec retard suivante :

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\sin x}{1+x^2}+2\right)x'\right]'' + \left(\frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{2}\right)x'' + \left(\frac{1}{2+t^2}+1\right)x' \\ &+ \frac{1}{28}\left(\frac{1}{3+t^2}+\frac{1}{4}\right)\left(x(t-r)+\frac{x(t-r)}{1+x^2(t-r)}\right) = 0.\end{aligned} \tag{2.25}$$

On a

$$\frac{1}{4} \leq a(t) = \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}, \quad 1 \leq b(t) = \frac{1}{2+t^2} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$
$$\frac{1}{4} \leq c(t) = \frac{1}{3+t^2} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Alors $a = \frac{1}{4}, \quad A = \frac{3}{4}, \quad b = 1, \quad B = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{7}{12}$

$$c(t) \leq b(t) \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \leq b'(t) = -\frac{2t}{(2+t^2)^2} \leq c'(t) = -\frac{2t}{(3+t^2)^2} \leq 0 \quad \forall t \geq 0,$$

$$\frac{1}{28} \leq \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{28}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) \quad \text{avec} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{14} = \delta_1,$$

$$1 \leq h(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} + 2 \leq h_1 = 3,$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |h'(u)|du &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\cos u(1+u^2) - 2u\sin u}{(1+u^2)^2}|du, \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[|\frac{1}{1+u^2}|+|\frac{2u}{(1+u^2)^2}|\right]du, \\ &\leq \pi + 2 < \infty.\end{aligned}$$

$$h_1\delta_1 = \frac{3}{14} \quad alors \quad \frac{3}{14} < d < \frac{1}{4}.$$
$$\frac{1}{2}a'(t) = \frac{1}{8}\cos t < b\left(1 - \frac{h_1\delta_1}{d}\right) < \frac{1}{7}.$$

Toutes les hypothèses sont vériffiées, on peut conclure en utilisant le théorème 2.1 que toute solution de (2.25) est uniformément asymptotiquement stable.

Exemple 2.2. On considére l'équation différentielle non-autonome du troisième ordre à retard suivante

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\sin x}{1+x^2}+2\right)x'\right]'' + \left(\frac{1}{4}\sin t + 10\right)\left(\arctan x' + \pi\right)x'' \\ &+\left(\frac{1}{1+t}+1\right)\left(2x' + \frac{x'}{1+x^2}\right)x' + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+t}+1\right)\left(x(t-r) + \frac{x(t-r)}{1+x^2(t-r)}\right) \\ &= \frac{2}{1+t^2+x^2(t)+x'^2(t)+x^2(t-r)+x'^2(t-r)+x''^2(t)}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Il est facile de voir que

$$\frac{39}{4} \leq a(t) = \frac{1}{4}\sin t + 10 \leq \frac{41}{4}, \quad 1 \leq b(t) = \frac{1}{1+t} + 1 \leq 2,$$
$$\frac{1}{4} \leq c(t) = \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

Alors $a = \frac{39}{4}, \quad A = \frac{41}{4}, \quad b = 1, \quad B = 2, \quad c = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{2}$

$$c(t) \leq b(t) \quad \text{et} \quad -1 \leq b'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \leq c'(t) = -\frac{1}{4(1+t)^2} \leq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

$$1 \leq \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{1+x^2} \quad \text{avec} \quad x \neq 0, \text{ et } |f'(x)| \leq 2 = \delta_1.$$
$$1 \leq h(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} + 2 \leq 3 = h_1.$$

Un calcul simple montre que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |h'(u)|\, du &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left|\frac{\cos u}{1+u^2}\right| + \left|\frac{2u\sin u}{(1+u^2)^2}\right|\right] du, \\ &\leq \pi.\end{aligned}$$

$$1 \leq \psi(y) = \arctan y + \pi \leq 5 = \beta,$$
$$2 = d_0 \leq \frac{g(y)}{y} = 2 + \frac{1}{1+y^2} \leq 3 \text{ avec } y \neq 0,$$

$$\frac{h_1\delta_1}{d_0} = 3 < \alpha < \frac{39}{4} = a,$$

$$a'(t) = \frac{1}{4}\cos t \leq \frac{1}{4} \text{ pour tout } t \geq 0 \quad \text{alors} \quad \frac{1}{8}\cos t < \frac{b\,(\alpha d_0 - h_1\delta_1)}{\alpha^2\beta} < \frac{3}{10}.$$

Toutes les hypothèses sont vérifiées, on peut conclure en utilisant le théorème 2.2 que toute solution de (2.26) est uniformément asymptotiquement stable.

Finalement, on a

$$|p(t,x,x(t-r),y,y(t-r),z)| = \left|\frac{2}{1+t^2+x^2+y^2+x^2(t-r)+y^2(t-r)+z^2}\right| \leq \frac{2}{1+t^2} = q(t),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+, x, y, x(t-r), y(t-r), z$ et .

$$\int_0^\infty q(s)ds = \int_0^\infty \frac{2}{1+s^2}ds = \pi < \infty, \text{alors } q \in L^1(0,\infty).$$

Ainsi Toutes les hypothèses du Théorème 2.4 sont satisfaites, nous pouvons conclure que chaque solution de (2.26) est uniformément bornée.

Chapitre 3

Stabilité et bornitude de solutions de certaines équations différentielles du troisième ordre non autonome avec retard

Dans ce chapitre, on se propose de présenter notre résultat ce que manifeste d'étudié la stabilité des solutions d'équation différentielle à retard du type

$$\left(q(t)\left(p(t)x'(t)\right)'\right)' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = 0, \tag{3.1}$$

et la bornitude de

$$\left(q(t)\left(p(t)x'(t)\right)'\right)' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = e(t), \tag{3.2}$$

où $r > 0$, et les fonctions $p(.), q(.), a(.), b(.), c(.), e(.)$ et $f(x)$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$. En outre, il est supposé que les dérivées $a'(.)$,$b'(.)$,$c'(.)$, $p'(.)$, $q'(.)$ et $f'(x)$ existent et sont continues pour tout t, x dans $[0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement, avec $f(0) = 0$. En plus, il est également supposé que la fonction $t \longrightarrow f(x(t-r))$ satisfait une condition de Lipschitz en $x(t-r)$.

3.1 Hypothèses et résultats principaux

Tout au long de cette partie, nous utilisons les notations suivantes

$$A(t) = \frac{a(t)}{p(t)q(t)}, \quad B(t) = \frac{b(t)p(t) - a(t)p'(t)}{p^2(t)}.$$

On suppose qu'il existe des constantes positives a_0,b_0, c_0, a_1, n, m, μ, δ_0, δ_1, ε, C, L, M,N telles que les fonctions qui apparaissent dans l'équation (3.1) vérifient les conditions suivantes :

(i) $0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1$, $t \geq 0$.

(ii) $-L \leq p'(t) \leq 0, -L \leq q'(t) \leq 0, \quad t \geq 0$.

(iii) $f(0) = 0$, $0 < \delta_0 \leq \frac{f(x)}{x}$ avec $x \neq 0$ et $|f'(x)| \leq \delta_1$.

les résultats principaux sont les théorèmes suivants Notre contribution ce manifeste par le Théorème suivant :

3.1.1 Stabilité

Théorème 3.1. *En plus des hypothèses (i)-(iii), supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

S_1) $0 < m \leq q(t) \leq p(t) \leq M$, *pour tout* $t \geq 0$, *et* $p''(t) \geq 0$ *pour* $t \geq 0$,

S_2) $0 < b_0 \leq b(t) \leq b_1$ *et* $0 < c_0 \leq c(t) \leq c_1$, *pour tout* $t \geq 0$, $-N \leq b'(t) \leq c'(t) < 0$, *où* $N = \min\{b_1,c_1\}$

S_3) $(p(t)c(t))' \leq (q(t)c(t))' \leq 0, \quad t \geq 0$,

S_4) $\frac{M}{a_0} < \alpha < \frac{b_0}{Mc_1\delta_1}$,

S_5) $\frac{1}{2}a'(t) - (b_0 - \alpha M c_1 \delta_1) \leq -\varepsilon$.

Alors la solution nulle de (3.1) est uniformément asymptotiquement stable, pourvu que

$$r < \min\left\{\frac{2\varepsilon m^2}{c_1\delta_1\left(1+\alpha+m^2\right)}, \frac{2c_3}{\alpha\delta_1 c_1}\right\},$$

où $c_3 = \frac{1}{M}\left(\frac{\alpha a_0}{M} - 1\right) > 0$.

Démonstration. Considérons dans l'espace des phases x, y, z le système différentiel équivalent à l'équation (3.1) :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{p(t)} y, \\ y' &= \frac{1}{q(t)} z, \\ z' &= -A(t)z - B(t)y - c(t)f(x) + c(t) \int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{p(s)} f'(x(s))ds. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On définit la fonction $W(t, x_t, y_t, z_t)$ comme suit

$$W(t, x_t, y_t, z_t) = \exp\left(-\frac{\theta(t)}{\nu}\right) V(t, x_t, y_t, z_t), \tag{3.4}$$

où

$$\begin{aligned} V(t, x_t, y_t, z_t) =& p(t)c(t)F(x) + \alpha q(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)c(t)f(x)y \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{a(t)}{p(t)}y^2 + \alpha z^2 + 2yz\right) + \lambda \int_{-r}^{0} \int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds, \end{aligned} \tag{3.5}$$

et $F(x) = \int_0^x f(u)du$, ν et λ étant des constantes positives qui seront déterminées plus tard. Notons $\theta(t) = \int_0^t D(s)ds$ avec

$$D(t) = \frac{\alpha M}{2}\left[\frac{2a_1 p'^2(t) - a_2 p(t)p'(t)}{p^3(t)} - a_3 c'(t)\right] \geq 0,$$

où $a_2 = \frac{1}{\alpha M}a_1 + 2n(1 - \alpha M c_1 \delta_1) + b_0$, et $a_3 = \frac{b_1}{c_0 m} + \frac{a_1 L}{c_0 m^2}$.

On va montrer que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \theta(t) < \infty$.

En utilisant (ii), (S_1) et (S_2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^t D(s)ds &= \alpha M \int_0^t \left[\frac{a_1 p'^2(s)}{p^3(s)} - \frac{a_2 p'(s)}{2p^2(s)} - \frac{a_3}{2}c'(s)\right] ds, \\ &= a_1 \alpha M \int_0^t \left(\frac{-p'(s)}{p^2(s)}\right)\left(-\frac{p'(s)}{p(s)}\right) ds - \frac{\alpha a_2 M}{2} \int_0^t \frac{p'(s)}{p^2(s)} ds - \frac{\alpha a_3 M}{2} \int_0^t c'(s)ds, \\ &\leq a_1 \alpha M \int_0^t \left(\frac{-p'(s)}{p^2(s)}\right)\left(-\frac{p'(s)}{p(s)}\right) ds + \frac{\alpha a_2 M}{2}\frac{1}{p(t)} + \frac{\alpha a_3 M N}{2}, \\ &\leq a_1 \alpha M \int_0^t \left(\frac{-p'(s)}{p^2(s)}\right)\left(-\frac{p'(s)}{p(s)}\right) ds + \frac{\alpha a_2 M}{2m} + \frac{\alpha a_3 M N}{2}, \\ &\leq \frac{a_1 \alpha M L}{m^2} + \frac{\alpha a_2 M}{2m} + \frac{\alpha a_3 M N}{2} \leq \omega < \infty. \end{aligned}$$

On peut être réécrire la fonction V comme suit :

$$V = V_1 + V_2 + \lambda \int_{-r}^{0} \int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds,$$

où

$$V_1 = p(t)c(t)F(x) + \alpha q(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)c(t)f(x)y,$$

et

$$V_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a(t)}{p(t)}y^2 + \alpha z^2 + 2yz\right).$$

Tout d'abord considérons

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{a(t)}{p(t)}y^2 + \alpha z^2 + 2yz\right), \\ &= \frac{\alpha}{2}\left(z^2 + \frac{2}{\alpha}yz\right) + \frac{a(t)}{2p(t)}y^2, \\ &= \frac{\alpha}{2}\left(z + \frac{y}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}y^2\left(\frac{a(t)}{p(t)} - \frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Grace à (i), (S_1) et (S_4) nous avons

$$\frac{a(t)}{p(t)} - \frac{1}{\alpha} \geq \frac{a_0}{M} - \frac{1}{\alpha} > 0.$$

Donc il existe une constante positive δ_2 telle que

$$V_2 \geq \delta_2\left(y^2 + z^2\right). \tag{3.6}$$

D'autre part, en utilisant les hypothèses du théorème 3.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} V_1 &= p(t)c(t)F(x) + \alpha q(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)c(t)f(x)y, \\ &= p(t)c(t)F(x) + \frac{\alpha}{2}q(t)B(t)\left(y + \frac{c(t)f(x)}{B(t)}\right)^2 - \frac{\alpha q(t)f^2(x)c^2(t)}{2B(t)}, \\ &\geq p(t)c(t)F(x) - \frac{\alpha q(t)f^2(x)c^2(t)}{2B(t)}. \end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{1}{2}f^2(x) = \int_0^x f(u)f'(u)du \leq \delta_1\int_0^x f(u)du.$$

Les conditions (i)-(iii), (S_1) et (S_2) nous donnent

$$-\frac{\alpha c^2(t)q(t)f^2(x)}{2B(t)} \geq -\alpha p(t)c(t)\frac{c(t)}{B(t)}\frac{f^2(x)}{2} \geq -p(t)c(t)\frac{\alpha M\delta_1 c_1}{b_0}\int_0^x f(u)du.$$

D'où

$$V_1 \geq p(t)c(t)\int_0^x\left(1 - \frac{\alpha M\delta_1 c_1}{b_0}\right)f(u)du \geq \delta_4\int_0^x f(u)du,$$

et

$$\delta_4 = nm\left(1 - \alpha M \delta_1\right),$$

et d'aprés (S_4) nous avons

$$\delta_4 = c_0 m \left(1 - \frac{\alpha M \delta_1 c_1}{b_0}\right) > mc_0 \left(1 - \frac{\alpha M \delta_1 c_1}{b_0} \frac{b_0}{\alpha M \delta_1 c_1}\right) = 0.$$

Ainsi à partir de (iii), on obtient

$$V_1 \geq \delta_4 \delta_0 \int_0^x u du = \frac{\delta_4 \delta_0}{2} x^2. \tag{3.7}$$

Il est clair que à partir de (3.5), (3.6) et (3.7), nous avons

$$V\left(t, x_t, y_t, z_t\right) \geq \delta_2 y^2 + \delta_2 z^2 + \frac{\delta_4 \delta_0}{2} x^2 + \lambda \int_{-r}^{0} \int_{t+s}^{t} y^2(\xi) d\xi ds.$$

Par conséquent, la positivité de $\int_{t+s}^{t} y^2(\xi) d\xi$ entraîne qu'il existe une constante positive suffsamment petite k, de sorte que

$$V\left(t, x_t, y_t, z_t\right) \geq k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = k\|X(t)\|^2, \tag{3.8}$$

où $k = \min\left\{\delta_2, \frac{\delta_0 \delta_0}{2}\right\}$ et $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Nous pouvons donc trouver une fonction continue $W_0(\|X(t)\|)$ telle que

$$W_0(\|X(t)\|) \geq 0 \quad \text{et} \quad W_0(\|X(t)\|) \leq W\left(t, X_t\right).$$

Puisque $f'(x) \leq \delta_1$ alors $f(x) \leq \delta_1 x$ et cela implique que $F(x) \leq \delta_1 \frac{x^2}{2}$. Selon les hypothèses du théorème (i), (S_1) et (S_2), nous obtenons

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{b(t)}{p(t)} - \frac{a(t)p'(t)}{p^2(t)}, \\ &\leq \frac{N}{m} + \frac{a_1 L}{m^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant les hypothèses de théorème 3.1 et puis l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$

devient

$$
\begin{aligned}
V =& p(t)c(t)F(x) + \alpha q(t)B(t)\frac{y^2}{2} + \alpha q(t)c(t)f(x)y \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{a(t)}{p(t)}y^2 + \alpha z^2 + 2yz\right) + \lambda \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds, \\
&\leq \frac{Mc_1\delta_1}{2}x^2 + \frac{\alpha M}{2}\left(\frac{b_1}{m} + \frac{a_1 L}{m^2}\right)y^2 + \alpha M c_1\delta_1 xy \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{m}y^2 + \alpha z^2 + 2yz\right) + \lambda \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} \left(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)\right) d\xi ds \\
&+ \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} \left(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)\right) d\xi ds, \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(c_1 M\delta_1(1+\alpha)\Big)x^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha M\left(\frac{b_1}{m} + \frac{a_1 L}{m^2}\right) + \alpha M c_1\delta_1 + \frac{a_1}{m} + 1\right)y^2 \\
&+ \frac{1}{2}\Big(\alpha + 1\Big)z^2 + (\lambda+1)\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} \left(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)\right) d\xi ds, \\
&\leq \delta_5(x^2 + y^2 + z^2) + \delta_6 \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} \left(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi)\right) d\xi ds,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

où

$$
\delta_5 = \frac{1}{2}\max\left\{c_1 M\delta_1(1+\alpha), \alpha M\left(\frac{b_1}{m} + \frac{a_1 L}{m^2}\right) + \alpha M c_1\delta_1 + \frac{a_1}{m} + 1, \alpha + 1\right\},
$$

et

$$
\delta_6 = \max\{1, \lambda\}.
$$

Comme $0 \leq \frac{\theta(t)}{\nu} \leq \frac{\omega}{\nu}$, alors

$$
\eta_1\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \leq V\exp\left(-\frac{\omega}{\nu}\right) \leq W = V\exp\left(-\frac{\theta(t)}{\nu}\right) \leq V, \tag{3.10}
$$

où $\eta_1 = k\exp\left(-\frac{\omega}{\nu}\right)$.

Donc l'existence d'une fonction continue $W_1(\|X(t)\|) + W_2\left(\|X_t\|_2\right)$ qui satisfait l'inégalité $W\left(t, X_t\right) \leq W_1(\|X(t)\|) + W_2\left(\left(\int_{t-r}^{t}\|X(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right)$.

Par conséquent, la premiére condition du Théorème 1.9 est satisfaite.

Pour la dérivée totale de la fonctionnelle $V(t, x_t, y_t, z_t)$ le long des trajectoires du système (3.3), nous avons

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(3.3)}\,(t,x_t,y_t,z_t) =&(p(t)c(t))'F(x)+\frac{\alpha}{2}q'(t)B(t)y^2+\alpha(q(t)c(t))'f(x)y\\&+\left(\frac{\alpha}{2}q(t)B'(t)-\frac{a(t)p'(t)}{2p^2(t)}+G(t)+\lambda r\right)y^2\\&+\left(\frac{1}{q(t)}-\alpha A(t)\right)z^2\\&+c(t)(y+\alpha z)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f'(x(s))ds-\lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Où

$$G(t)=\frac{a'(t)}{2p(t)}+\alpha c(t)\frac{q(t)}{p(t)}f'(x)-B(t).$$

Comme $q'c=(qc)'-qc'$, nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}q'(t)B(t)y^2&=\frac{\alpha}{2}\frac{q'(t)c(t)}{c(t)}B(t)y^2,\\&=\frac{\alpha}{2c(t)}(q(t)c(t))'B(t)y^2-\frac{\alpha}{2c(t)}q(t)c'(t)B(t)y^2.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(3.3)}=&\,(p(t)c(t))'F(x)+\frac{\alpha}{2c(t)}(q(t)c(t))'B(t)y^2+\alpha(q(t)c(t))'f(x)y\\&+\left[\frac{\alpha q(t)B'(t)}{2}-\frac{\alpha q(t)c'(t)B(t)}{2c(t)}-\frac{a(t)p'(t)}{2p^2(t)}+G(t)+\lambda r\right]y^2\\&+\left[\frac{1}{q(t)}-\alpha A(t)\right]z^2\\&+c(t)(y+\alpha z)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{p(s)}f'(x(s))ds-\lambda\int_{t-r}^{t}y^2(\xi)d\xi.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Maintenant, nous vérifions

$$H(t,x,y)=(p(t)c(t))'F(x)+\frac{\alpha}{2c(t)}(q(t)c(t))'B(t)y^2+\alpha(q(t)c(t))'f(x)y\le 0,$$

pour tout x, y et $t\ge 0$.

cas 1 : Si $(q(t)c(t))'=0$, alors

$$H(t,x,y)=(p(t)c(t))'F(x)\le 0.$$

cas 2 : Si $(q(t)c(t))' < 0$, peut être écrite H comme suit,

$$\begin{aligned} H(t,x,y) &= (q(t)c(t))' \left[\frac{(p(t)c(t))'}{(q(t)c(t))'} F(x) + \frac{\alpha}{2c(t)} B(t) y^2 + \alpha f(x) y \right], \\ &= (q(t)c(t))' \left[\frac{(p(t)c(t))'}{(q(t)c(t))'} F(x) + \frac{\alpha B(t)}{2c(t)} \left(y + \frac{c(t)f(x)}{B(t)} \right)^2 - \frac{\alpha c(t) f^2(x)}{2B(t)} \right], \\ &\leq (q(t)c(t))' \left(\frac{(p(t)c(t))'}{(q(t)c(t))'} F(x) - \frac{\alpha c(t) f^2(x)}{2B(t)} \right), \end{aligned}$$

l'hypothèse (S_3) implique que $\frac{(p(t)c(t))'}{(q(t)c(t))'} \geq 1$, d'où

$$H(t,x,y) \leq (q(t)c(t))' \int_0^x \left[1 - \frac{\alpha c(t)}{B(t)} f'(u) \right] f(u) du.$$

De (S_1), (S_2) et (iii) nous obtenons

$$\begin{aligned} H(t,x,y) &\leq (q(t)c(t))' \int_0^x \left(1 - \frac{\alpha M \delta_1 c_1}{b_0} \right) f(u) du, \\ &\leq (q(t)c(t))' \frac{\delta_4}{c_0 m} F(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Donc, en combinant les deux cas, nous avons $H(t,x,y) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$, x et y. Selon les hypothèses du théorème, nous obtenons

$$B(t) \leq \frac{b_1}{m} + \frac{a_1 L}{m^2},$$

et

$$\begin{aligned} B'(t) &= \frac{b'(t)p^2(t) - (b(t) + a'(t))\, p(t)p'(t) - a(t)p(t)p''(t) + 2a(t)p'^2(t)}{p^3(t)}, \\ &\leq \frac{2a_1 p'^2(t) - [2(b_0 - \alpha M \delta_1 c_1) + b_1]\, p(t)p'(t)}{p^3(t)}. \end{aligned}$$

par conséquent, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha q(t) B'(t)}{2} - \frac{\alpha q(t) c'(t) B(t)}{2c(t)} - \frac{a(t)p'(t)}{2p^2(t)}, \\ \leq \;& \frac{\alpha M}{2} \left[\frac{2a_1 p'^2(t) - a_2 p(t)p'(t)}{p^3(t)} - a_3 c'(t) \right] = D(t). \end{aligned}$$

En utilisant (S_4) et (S_5), nous avons

$$\begin{aligned} G(t)| &\leq \frac{a'(t)}{2p(t)} + \alpha c(t) \frac{q(t)}{p(t)} f'(x) - \frac{b(t)}{p(t)}, \\ &\leq \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} a'(t) + \alpha c_1 M \delta_1 - b_0 \right] \leq \frac{-\varepsilon}{M} < 0, \end{aligned}$$

nous avons aussi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{q(t)} - \alpha A(t) &= \frac{1}{q(t)}\left(1 - \frac{\alpha a(t)}{p(t)}\right),\\ &\le \frac{1}{M}\left[1 - \frac{\alpha a_0}{M}\right] = -c_3 < 0.\end{aligned}$$

En conséquence (3.12) devient

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(3.3)}(t, x_t, y_t, z_t) \le{}& [D(t) - \varepsilon + \lambda r]\, y^2 - c_3 z^2 - \lambda \int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi\\ &+ c(t)(y + \alpha z)\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{p(s)} f'(x(s))ds.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz $|uv| \le \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ et $|f'(x)| \le \delta_1$, nous avons

$$c(t)y\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{p(s)} f'(x(s))ds \le \frac{\delta_1 c_1 r}{2} y^2 + \frac{\delta_1 c_1}{2m^2}\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi,$$

et

$$\alpha c(t)z\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{p(s)} f'(x(s))ds \le \frac{\alpha c_1 \delta_1 r}{2} z^2 + \frac{\alpha c_1 \delta_1}{2m^2}\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi.$$

D'où

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(3.3)}(t, x_t, y_t, z_t) \le{}& -\left[\varepsilon - D(t) - r\left(\lambda + \frac{\delta_1 c_1}{2}\right)\right] y^2 - \left[c_3 - \alpha\frac{\delta_1 c_1 r}{2}\right] z^2\\ &+ \left[\frac{\delta_1 c_1}{2m^2}(1+\alpha) - \lambda\right]\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Si on prend $\lambda = \frac{\delta_1 c_1}{2m^2}(1+\alpha)$ la dernière inégalité devient

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(3.3)}(t, x_t, y_t, z_t) \le{}& -\left[\varepsilon - D(t) - \frac{\delta_1 c_1}{2}\left(\frac{1+\alpha}{m^2} + 1\right) r\right] y^2\\ &- \left[c_3 - \alpha\frac{c_1 \delta_1 r}{2}\right] z^2.\end{aligned}$$

Par (3.4), (3.6) et en prenant $\nu = k$ nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{W}_{(3.3)}(t, x_t, y_t, z_t) ={}& \exp\left(-\frac{\theta(t)}{k}\right)\left(\frac{d}{dt}V(t, x_t, y_t, z_t) - \frac{D(t)}{k}V(t, x_t, y_t, z_t)\right),\\ \le{}& \exp\left(-\frac{\theta(t)}{k}\right)\left[-\left(\varepsilon - \frac{\delta_1 c_1}{2}\left(\frac{1+\alpha}{m^2} + 1\right) r\right) y^2\right.\\ &\left. - \left(c_3 - \alpha\frac{\delta_1 c_1 r}{2}\right) z^2\right].\end{aligned}$$

Par conséquent, si

$$r < \min\left\{\frac{2\varepsilon m^2}{\delta_1 c_1 (1 + \alpha + m^2)}, \frac{2c_3}{\alpha\delta_1 c_1}\right\},$$

on a

$$\dot{W}_{(3.3)}(t, x_t, y_t, z_t) \leq -\gamma \left(y^2 + z^2\right), \qquad \text{pour } \gamma > 0.$$

Posons $W_3(\|X\|) = \gamma\,(y^2 + z^2)$. W_3 est définie positive, en effet,
si $\|X\| = 0$, cela implique que $x = y = z = 0$, et donc $W_3(0) = 0$.
Inversement, si $W_3(\|X\|) = \gamma\,(y^2 + z^2) = 0$ alors $y = z = 0$ et le système (3.3) se réduit à

$$\begin{aligned} x' &= 0, \\ y' &= 0, \\ z' &= -c(t)f(x) = 0. \end{aligned}$$

La condition (S_2) entraîne $f(x) = 0$, et par (iii) on conclut que f ne s'annule que pour $x = 0$. D'où, la seule solution du système (3.3) pour lequel $W_3(\|X\|) = 0$ est la solution $x = y = z = 0$. Ainsi, en vertu de ce qui précède, nous concluons que la deuxième condition du Théorème 1.9 est satisfaite, donc la solution nulle de l'équation (3.1) est uniformément asymptotiquement stable. □

3.1.2 Bornitude

Dans le cas $e(t) \neq 0$ nous établissons les résultats suivants :

Théorème 3.2. *En plus des hypothèses de Théorème 3.1, si nous supposons que $e(t)$ est continue dans $\mathbb{R}$ et*

$$\int_0^t |e(s)|ds < \eta_2 < \infty \qquad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

Alors toutes les solutions de l'équation perturbée (3.2) sont uniformément bornées.

Démonstration. L'équation (3.2) est équivalente au système

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{p(t)}y \\ y' &= \frac{1}{q(t)}z \\ z' &= -A(t)z - B(t)y - c(t)f(x)\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{p(s)} f'(x(s))ds + e(t). \end{aligned} \tag{3.13}$$

De (3.10) et (3.9), on a

$$\eta_1\|X\|^2 \leq W\left(t, X_t\right) \leq \delta_5\|X\|^2 + \delta_6 \int_{t+s}^{0}\int_{t+s}^{t} \|X(\xi)\|^2 d\xi ds. \tag{3.14}$$

Par dérivation de W le long des trajectoires du système (3.13), on obtient

$$\dot{W}_{(3.13)}\left(t, x_t, y_t, z_t\right) = \dot{W}_{(3.3)}\left(t, x_t, y_t, z_t\right) + (y+\alpha z)e(t).$$

Puisque $\dot{W}_{(3.3)} \leq 0$ pour tout t, x, y, z, alors

$$\dot{W}_{(3.13)} \leq (y+\alpha z)e(t) \leq (|y|+\alpha|z|)|e(t)| \leq \eta_3(|y|+|z|)|e(t)|,$$

où $\eta_3 = \max\{1,\alpha\}$. Notons que $|x| < 1+x^2$, et puisque $\eta_1\|X\|^2 \leq W\left(t, x_t, y_t, z_t\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}\dot{W}_{(3.13)} &\leq \eta_3\left(2+y^2+z^2\right)|e(t)|,\\ &\leq 2\eta_3|e(t)| + \eta_3\|X\|^2|e(t)|,\\ &\leq 2\eta_3|e(t)| + \frac{\eta_3}{\eta_1}W\left(t, x_t, y_t, z_t\right)|e(t)|.\end{aligned}$$

Soit $\eta = \max\left\{2\eta_3, \frac{\eta_3}{\eta_1}\right\}$, alors

$$\dot{W}_{(3.13)} - \eta W|e(t)| \leq \eta|e(t)|. \tag{3.15}$$

Intégrons (3.15) entre 0 et t, en utilisant le lemme de Gronwall.Bellman, on a

$$\begin{aligned} W &\leq W(0,x_0,y_0,z_0) + \eta\int_0^t W|e(s)|ds\\ &+\eta\int_0^t |e(s)|ds,\\ &\leq (W_0+\eta\eta_2)e^{\eta\int_0^t |e(s)|ds},\\ &\leq K\end{aligned} \tag{3.16}$$

où $W_0 = W(0,x_0,y_0,z_0)$ et $K = (W_0+\eta\eta_2)e^{\eta\eta_2}$.
À partir des inégalités (3.14) et (3.16), nous avons

$$x^2+y^2+z^2 \leq K_2,$$

où $K_1 = \frac{K}{\eta}$.
L'inégalité précédente implique que

$$|x(t)| \leq K_1 \quad |y(t)| \leq K_1 \quad |z(t)| \leq K_1,$$

pour tout $t \geq t_0$. C'est

$$|x| \leq K_1, \quad |x'(t)| \leq K_1, \quad |x''(t)| \leq K_1,$$

pour tout $t \geq t_0$, ce qui achève la preuve de théorème . □

3.1.3 Exemples

Nous donnons exemple pour illustrer les résultats principaux

Exemple 3.1. Nous considérons l'équation différentielle suivante du troisième ordre à retard non autonome

$$\begin{aligned}&\left(\Big(\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{2}\Big)\left(\Big(\frac{2}{1+t^2}+\frac{1}{2}\Big)x'(t)\right)'\right)'+\Big(\frac{1}{4}\sin t+10\Big)x''(t)\\&+\Big(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\Big)x'(t)+\left(\frac{1}{4(1+t)}+\frac{1}{4}\right)\left(x(t-r)+\frac{x(t-r)}{1+x^2(t-r)}\right)=e^{-t}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

On a

$$\frac{39}{4} \leq a(t) = \frac{1}{4}\sin t + 10 \leq \frac{41}{4}, \forall t \in [1, +\infty[,$$

alors $a_0 = \frac{39}{4}$.

$$-1 \leq p'(t) \leq 0, -1 \leq q'(t) \leq 0, \text{ et } p''(t) \geq 0 \text{ pour tout } t \in [1, +\infty[.$$

$$1 \leq \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{1+x^2} \quad \text{avec} \quad x \neq 0, \text{ et } |f'(x)| \leq 2 = \delta_1,$$

alors $\delta_0 = 1$.

$$\frac{1}{2} \leq p(t) = \frac{2}{1+t^2} + \frac{1}{2} \leq q(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{4} \leq c(t) = \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leq b(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } t \in [1, +\infty[,$$

$$-1 \leq b'(t) \leq c'(t) \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in [1, +\infty[.$$

On a

$$(p(t)c(t))' = -\left[\frac{4t}{(1+t^2)^2}\Big(\frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{2}{1+t^2} + \frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{4(1+t)^2}\Big)\right] \leq 0,$$

et

$$(q(t)c(t))' = -\Big[\frac{2t}{(1+t^2)^2}\big(\frac{1}{4(1+t)}+\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{2}\big)\big(\frac{1}{4(1+t)^2}\big)\Big] \leq 0.$$

Alors

$$(p(t)c(t))' \leq (q(t)c(t))' \leq 0 \qquad \text{pour tout } t \in [1,+\infty[.$$

$$\frac{M}{a_0} = \frac{2}{13} < \alpha < \frac{1}{3} = \frac{b_0}{Mc_1\delta_1},$$

$$\frac{1}{2}a'(t) - (b_0 - \alpha M c_1 \delta_1) \leq -\frac{1}{8} = -\varepsilon.$$

Alors Toutes les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites, donc les solutions de (3.17) sont uniformément asymptotiquement stable.

Finalement, on a

$$e(t) = e^{-t},$$

d'où

$$\int_1^\infty e^{-s}ds < \infty.$$

Ainsi Toutes les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites, nous pouvons conclure que chaque solution de (3.17) est uniformément bornée.

Chapitre 4

Stabilité asymptotique uniforme et la bornitude des équations différentielles non linéaires du troisième ordre

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier le comportement asymptotique des solutions des équations suivantes :

$$\big(P(x(t))x'(t)\big)'' + a(t)\big(Q(x(t))x'(t)\big)' + b(t)\big(R(x(t))x'(t)\big) + c(t)f(x(t-r)) = 0. \tag{4.1}$$

$$[P(x(t))x'(t)]'' + a(t)\left(Q(x(t))x'(t)\right)' + b(t)\left(R(x(t))x'(t)\right) + c(t)f(x(t)) = 0, \tag{4.2}$$

et la bornitude de

$$\begin{aligned} &[P(x(t))x'(t)]'' + a(t)\left(Q(x(t))x'(t)\right)' + b(t)\left(R(x(t))x'(t)\right) + c(t)f(x(t)) \\ &= s\left(t, x(t), x'(t), x''(t)\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Les fonctions $a, b, c \; : \; [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $P, Q, R \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ et $f \; : \; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $s\left(t, x(t), x'(t), x''(t)\right)$ sont continues, et $xf(x) > 0$ pour $x \neq 0$ ($f(0) = 0$), r est une constante positive et un retard fixé.

4.1 Hypothèses et résultats principaux

Dans cette section, les résultats suivants sont établis. Nous supposons qu'il existe des constantes positives $a_0, b_0, c_0, d, A, B, C, p_0, p_1, q_0, q_1, r_0, r_1, \delta_0,\ \delta_1$ et ε telles que les hypothèses (A_1)-(A_5) sont satisfaites :

(A_1) $P(x), Q(x), R(x)$ et $f(x)$ sont fonctions continues différentiables sur $\mathbb{R}$,
$a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont fonctions continues différentiables sur $[0, +\infty[$.

(A_2) $0 < a_0 \leq a(t) \leq A$, $0 < b_0 \leq b(t) \leq B$, $0 < c_0 \leq c(t) \leq C$.

(A_3) $0 < p_0 \leq P(x) \leq p_1$, $0 < q_0 \leq Q(x) \leq q_1$, $0 < r_0 \leq R(x) \leq r_1$.

(A_4) $f(0) = 0$, $\frac{f(x)}{x} \geq \delta_0 > 0 : (x \neq 0)$ et $|f'(x)| \leq \delta_1$ pour tout x.

(A_5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \big(|P'(u)|+|Q'(u)|+|R'(u)|\big)du < \infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} P'(x)$ existe.

Pour des raisons de commodité, on introduit les fonctions suivantes :

$$\theta_1(t) = \frac{P'(x(t))}{P^2(x(t))}x'(t),$$

$$\theta_2(t) = \frac{Q'(x(t))P(x(t)) - Q(x(t))P'(x(t))}{P^2(x(t))}x'(t),$$

et

$$\theta_3(t) = \frac{R'(x(t))P(x(t)) - R(x(t))P'(x(t))}{P^2(x(t))}x'(t).$$

L'équation (4.1) équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{P(x)}y, \\ y' &= z, \\ z' &= -a(t)\theta_2(t)y - \frac{a(t)Q(x)}{P(x)}z - \frac{b(t)R(x)}{P(x)}y \\ &\quad - c(t)f(x) + c(t)\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{P(s)} f'(x(s))ds. \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.1.1 Stabilité

les théorèmes suivantes présentent des critères asymptotiques uniformes pour (4.1) :

Théorème 4.1. *Suite aux hypothèses de base (A_1)-(A_5), supposons que les conditions suivantes sont réunies :*

i) $c(t) \leq b(t),\ -L \leq b'(t) \leq c'(t) \leq 0 \quad$ *pour* $\quad t \in [0, +\infty[$.

ii) $\frac{p_1\delta_1}{r_0} < d < a_0 q_0$.

iii) $\frac{1}{2} d a'(t) Q(x) - b_0(d r_0 - p_1\delta_1) \leq -\varepsilon < 0$.

Alors toutes les solutions de l'équation (4.1) *sont uniformément asymptotiques stables et vérifient*

$$x(t) \to 0, \quad x'(t) \to 0, \quad x''(t) \to 0, \quad \text{quand } t \to \infty, \tag{4.5}$$

à condition

$$r < \min\left\{\frac{2(a_0 q_0 - d)}{p_1 C \delta_1}, \frac{2 p_0^3 \varepsilon}{C \delta_1 p_1^2 (d + d p_0^2 + p_0)}\right\}.$$

Démonstration. Nous définissons la fonctionnelle $U = U(t, x_t, y_t, z_t)$ comme suit :

$$U(t, x_t, y_t, z_t) = (\exp\big(-\frac{\gamma(t)}{\mu}\big)) V(t, x_t, y_t, z_t) = (\exp\big(-\frac{\gamma(t)}{\mu}\big)) V, \tag{4.6}$$

où

$$\gamma(t) = \int_0^t \big(|\theta_1(s)| + |\theta_2(s)| + |\theta_3(s)|\big) ds, \tag{4.7}$$

et

$$\begin{aligned} V &= d c(t) F(x) + c(t) f(x) y + \frac{b(t) R(x)}{2P(x)} y^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} z^2 + \frac{d}{P(x)} y z + \frac{d a(t) Q(x)}{2P^2(x)} y^2 \\ &\quad + \lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\xi) d\xi ds, \end{aligned} \tag{4.8}$$

telle que $F(x) = \int_0^x f(u) du$, μ et λ sont constantes positives qui seront déterminées plus tard. De la définition de V dans (4.8), on constate que la fonctionnelle précédente peut être réécrite comme suite

$$V = V_1 + V_2 + \lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\xi) d\xi ds,$$

où

$$V_1 = d c(t) F(x) + c(t) f(x) y + \frac{b(t) R(x)}{2P(x)} y^2,$$

et

$$V_2 = \frac{1}{2} z^2 + \frac{d}{P(x)} y z + \frac{d a(t) Q(x)}{2P^2(x)} y^2.$$

Compte tenu des hypothèses du Théorème, et aprés quelques réarrangements nous avons

$$\begin{aligned}
V_1 &= dc(t)F(x) + c(t)f(x)y + \frac{b(t)R(x)}{2P(x)}\Big(y + \frac{c(t)f(x)P(x)}{b(t)R(x)}\Big)^2 - \frac{c^2(t)f^2(x)P(x)}{2b(t)R(x)},\\
&\geq dc(t)F(x) - \frac{c^2(t)f^2(x)P(x)}{2b(t)R(x)},\\
&= dc(t)\int_0^x f(u)du - \frac{c^2(t)P(x)}{b(t)R(x)}\int_0^x f^{'}(u)f(u)ds,\\
&\geq dc(t)\int_0^x \left[1 - \frac{\delta_1 c(t)P(x)}{db(t)R(x)}\right]f(u)du,\\
&\geq dc(t)\int_0^x (1 - \frac{p_1\delta_1}{dr_0})f(u)du,\\
&\geq \delta_2 F(x),
\end{aligned}$$

où

$$\delta_2 = dc_0(1 - \frac{p_1\delta_1}{dr_0}) > dc_0(1 - \frac{d}{d}) = 0.$$

Ainsi,par (A_4), on obtient

$$\begin{aligned}
V_1 &\geq \delta_2\delta_0\int_0^x udu,\\
&\geq \frac{\delta_2\delta_0}{2}x^2.
\end{aligned}$$

V_2 est définie positive. Cela découle des conditions $a(t) \geq a_0$, $Q(x) \geq q_0$ et (ii). De ce fait,

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{1}{2}\big(z + \frac{d}{P(x)}y\big)^2 + \frac{da(t)Q(x) - d^2}{2P^2(x)}y^2,\\
&\geq \frac{1}{2}\big(z + \frac{d}{P(x)}y\big)^2 + \frac{d(a_0q_0 - d)}{2P^2(x)}y^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Puisque l'intérgrale $\int_{-r}^0\int_{t+s}^t y^2(\xi)d\xi ds$ est positive, alors nous pouvons donc trouver une constante $\delta = \delta(\delta_0,\delta_2,a_0,q_0,p_1,d) > 0$ telle que :

$$V \geq \delta(x^2 + y^2 + z^2). \tag{4.9}$$

Aprés un changement des variables dans l'intégrale de (4.7) et par (A_3) et (A_5) on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &\leq \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)}\frac{|P'(u)|}{P^2(u)}\big(1 + Q(u) + R(u)\big)du + \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)}\frac{|R'(u)|+|Q'(u)|}{P(u)}du,\\
&\leq (1 + r_1 + q_1)\int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)}\frac{|P'(u)|}{P^2(u)} + \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)}\frac{|R'(u)|+|Q'(u)|}{P(u)}du,\\
&\leq \frac{(1 + r_1 + q_1)}{p_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|P'(u)|du + \frac{1}{p_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(|R'(u)|+|Q'(u)|\big)du,\\
&\leq N < \infty
\end{aligned}$$

où $\alpha_1(t) = \min\{x(0),x(t)\}$ et $\alpha_2(t) = \max\{x(0),x(t)\}$.

Maintement, nous pouvons en déduire qu'il existe une fonction continue $W_0(\|X(t)\|)$ telle que

$$W_0(\|X(t)\|) \geq 0 \quad \text{et} \quad W_0(\|X(t)\|) \leq U(t, X_t). \tag{4.10}$$

D'autre part. En utilisant (A_2), (A_3) et (A_4), nous avons

$$\begin{aligned}
V &= dc(t)F(x) + c(t)f(x)y + \frac{b(t)R(x)}{2P(x)}y^2 \\
&+ \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{P(x)}yz + \frac{da(t)Q(x)}{2P^2(x)}y^2 + \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds, \\
&\leq dC\int_0^x\int_0^u f'(\nu)d\nu du + Cy\int_0^x f'(u)du + \frac{Br_1}{2p_0}y^2 + \frac{1}{2}z^2 \\
&+ \frac{d}{p_0}yz + \frac{dAq_1}{2p_0^2}y^2 + \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi))d\xi ds \\
&+ \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi))d\xi ds.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $ab \leq (a^2 + b^2)$, devient

$$\begin{aligned}
V &\leq \frac{1}{2}dC\delta_1 x^2 + \frac{1}{2}C\delta_1(x^2 + y^2) + \frac{Br_1}{2p_0}y^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{2p_0}(y^2 + z^2) \\
&+ \frac{dAq_1}{2p_0^2}y^2 + \lambda\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi))d\xi ds \\
&+ \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi))d\xi ds, \\
&\leq \frac{C\delta_1}{2}(1 + d)x^2 + \frac{1}{2}(C\delta_1 + \frac{Br_1}{p_0} + \frac{d}{p_0} + \frac{dAq_1}{p_0^2})y^2 + \frac{1}{2}(1 + \frac{d}{p_0})z^2 \\
&+ (1 + \lambda)\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi))d\xi ds.
\end{aligned}$$

Par suite

$$V \leq \delta_3(x^2 + y^2 + z^2) + \delta_4\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t}(x^2(\xi) + y^2(\xi) + z^2(\xi))d\xi ds, \tag{4.11}$$

où

$$\delta_3 = \frac{1}{2}\max\{C\delta_1(1 + d), C\delta_1 + \frac{Br_1}{p_0} + \frac{d}{p_0} + \frac{dAq_1}{p_0^2}, 1 + \frac{d}{p_0}\},$$

et

$$\delta_4 = \max\{1, \lambda\}.$$

Alors il existe une fonction continue $W_1(\|X(t)\|) + W_2(\|X_t\|_2)$ qui satisfait l'inégalité

$$U\big(t, X_t\big) \leq W_1(\|X(t)\|) + W_2\Big(\Big(\int_{t-r}^{t}\|X(s)\|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big).$$

La dérivée totale de la fonctionnelle $V(t, x_t, y_t, z_t)$, le long des trajectoires du système (4.4), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V &= dc'(t)F(x) + c'(t)f(x)y + \frac{b'(t)R(x)}{2P(x)}y^2 - \lambda\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi \\
&- d\theta_1(t)(yz + \frac{a(t)Q(x)}{2P^2(x)}y^2) - a(t)\theta_2(t)(yz + \frac{d}{2P(x)}y^2) + \frac{b(t)}{2}\theta_3(t)y^2 \\
&+ c(t)(z + \frac{d}{P(x)}y)\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{P(x(s))}f'(x(s))ds + \frac{1}{P(x)}(d - a(t)Q(x))z^2 \\
&+ \left[\frac{da'(t)Q(x) + 2c(t)P(x)f'(x) - 2db(t)R(x)}{2P^2(x)}\right]y^2 + \lambda r y^2.
\end{aligned}$$

De plus, les conditions (A_3), (A_4) et (i), nous donnent

$$\begin{aligned}
&da'(t)Q(x) + 2c(t)P(x)f'(x) - 2db(t)R(x), \\
&\leq da'(t)Q(x) + 2c(t)P(x)\delta_1 - 2db(t)r_0 \\
&\leq da'(t)Q(x) + 2b(t)\left(p_1\delta_1 - dr_0\right), \\
&\leq -\varepsilon.
\end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses (A_2), (A_3), (ii) et (iii), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V &\leq w_1 + w_2 + w_3 - \lambda\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi \\
&- \frac{1}{p_1}\left(a_0q_0 - d\right)z^2 - \left(\frac{\varepsilon}{p_1^2} - \lambda r\right)y^2,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

où

$$\begin{aligned}
w_1 &= dc'(t)F(x) + c'(t)f(x)y + \frac{b'(t)R(x)}{2P(x)}y^2, \\
w_2 &= d|\theta_1(t)|(|yz| + \frac{a(t)Q(x)}{2P(x)}y^2) + a(t)|\theta_2(t)|(|yz| + \frac{d}{2P(x)}y^2) + \frac{B}{2}|\theta_3(t)|y^2, \\
w_3 &= c(t)(z + \frac{d}{P(x)}y)\int_{t-r}^{t} \frac{y(s)}{P(x(s))}f'(x(s))ds.
\end{aligned}$$

Nous affirmons que $w_1 \leq 0$. Pour montrer cela, nous distinguons deux cas :

cas 1 : Si $c'(t) = 0$, alors $w_1 = \frac{b'(t)R(x)}{2P(x)}y^2 \leq 0$.

cas 2 : Si $c'(t) < 0$, la quantité entre les crochets ci-dessous peut être écrite comme

$$\begin{aligned}
w_1 &= dc'(t)\left[F(x) + \frac{1}{d}yf(x) + \frac{b'(t)R(x)}{2dP(x)c'(t)}y^2\right], \\
w_1 &= dc'(t)\left[F(x) + \frac{b'(t)R(x)}{2dP(x)c'(t)}\left(y + \frac{c'(t)P(x)f(x)}{R(x)b'(t)}\right)^2 - \frac{c'(t)P(x)f^2(x)}{2dR(x)b'(t)}\right],
\end{aligned}$$

par (i) on obtient :

$$\begin{aligned} w_1 &\leq dc'(t)\Big(\int_0^x f(u)du - \frac{c'(t)P(x)f^2(x)}{2dR(x)b'(t)}\Big), \\ &\leq dc'(t)\Big(\int_0^x f(u)du - \frac{P(x)f^2(x)}{2dR(x)}\Big), \\ &\leq dc'(t)\int_0^x \Big(1 - \frac{p_1\delta_1}{dr_0}\Big)f(u)du, \\ &\leq c'(t)\frac{\delta_2}{c_0}F(x) \leq 0. \end{aligned}$$

En combinant les deux cas, nous trouvons $w_1 \leq 0$ pour tout x, y et $t \geq 0$.

En utilisant les conditions du théorème 4.1, et par $2|xy| \leq x^2+y^2$, nous avons l'estimation :

$$\begin{aligned} w_2 &\leq \Big[\frac{d}{2}|\theta_1(t)|(1+\frac{Aq_1}{p_0}) + \frac{A}{2}|\theta_2(t)|(1+\frac{d}{p_0})\Big]\big(y^2+z^2\big) + \frac{B}{2}|\theta_3(t)|y^2, \\ &\leq k_1\big[|\theta_1(t)|+|\theta_2(t)|+|\theta_3(t)|\big]\big(y^2+z^2\big), \end{aligned} \tag{4.13}$$

où $k_1 = \max\left\{\frac{d}{2}(1+\frac{Aq_1}{p_0}), \frac{A}{2}(1+\frac{d}{p_0}), \frac{B}{2}\right\}$.

En utilisant l'inégalité de Schwartz $|uv| \leq \frac{1}{2}(u^2+v^2)$ et $|f'(x)| \leq \delta_1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} w_3 &\leq C\delta_1\int_{t-r}^t |z|\frac{|y(s)|}{P(x(s))}ds + \frac{dC\delta_1}{p_0}\int_{t-r}^t |y|\frac{|y(s)|}{P(x(s))}ds, \\ &\leq \frac{C\delta_1 r}{2}z^2 + \frac{C\delta_1 dr}{2p_0}y^2 + \frac{C\delta_1}{2p_0^2}(1+\frac{d}{p_0})\int_{t-r}^t y^2(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Les estimations de w_1, w_2 et w_3 dans (4.12), donnent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V \leq &-\Big[\frac{\varepsilon}{p_0^2} - (\lambda + \frac{dC\delta_1}{2p_0})\Big]ry^2 - \Big[\frac{a_0q_0-d}{p_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}\Big]z^2 \\ &+ \Big[\frac{C\delta_1}{2p_0^2}(1+\frac{d}{p_0}) - \lambda\Big]\int_{t-r}^t y^2(\xi)d\xi \\ &+ k_1\big[|\theta_1(t)|+|\theta_2(t)|+|\theta_3(t)|\big]\big(y^2+z^2\big). \end{aligned}$$

En choisissant $\lambda = \frac{C\delta_1}{2p_0^2}(1+\frac{d}{p_0})$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V \leq &-\Big[\frac{\varepsilon}{p_0^2} - \frac{C\delta_1}{2p_0}(d+\frac{1}{p_0}+\frac{d}{p_0^2})r\Big]y^2 - (\frac{a_0q_0-d}{p_1} - \frac{C\delta_1 r}{2})z^2 \\ &+ k_1\big[|\theta_1(t)|+|\theta_2(t)|+|\theta_3(t)|\big]\big(y^2+z^2\big). \end{aligned}$$

De (2.22), (4.9) et en prend $\mu = \frac{\delta}{k_1}$ donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U &= -\frac{k_1}{\delta}\gamma'(t)\exp(\frac{-k_1\gamma(t)}{\delta})V + \exp(\frac{-k_1\gamma(t)}{\delta})\frac{d}{dt}V,\\ &= \exp(\frac{-k_1\gamma(t)}{\delta})\Big(\frac{d}{dt}V - \frac{k_1(|\theta_1(t)|+|\theta_2(t)|+|\theta_3(t)|)}{\delta}V\Big),\\ &\leq K\Big[-[\frac{\varepsilon}{p_1^2} - \frac{C\delta_1}{2p_0}(d+\frac{1}{p_0}+\frac{d}{p_0^2})r]y^2 - (\frac{a_0q_0-d}{p_1} - \frac{C\delta_1 r}{2})z^2\Big],\end{aligned}$$

où $K = \exp(-\frac{k_1N}{\delta})$.

Ainsi, si

$$r < \min\left\{\frac{2(a_0q_0-d)}{p_1C\delta_1}, \frac{2p_0^3\varepsilon}{C\delta_1p_1^2(d+dp_0^2+p_0)}\right\}.$$

Alors

$$\frac{d}{dt}U(t,x_t,y_t,z_t) \leq -\beta(y^2+z^2) \quad \text{pour} \quad \beta > 0. \tag{4.15}$$

Posons $W_3(\|X\|) = \beta\,(y^2+z^2)$. W_3 est définie positive, en effet,

si $\|X\| = 0$, cela implique que $x = y = z = 0$, et donc $W_3(0) = 0$.

Inversement, si $W_3(\|X\|) = \beta\,(y^2+z^2) = 0$ alors $y = z = 0$ et le système (4.4) se réduit à

$$\begin{aligned} x' &= 0,\\ y' &= 0,\\ z' &= -c(t)f(x) = 0.\end{aligned}$$

La condition (A_2) entraîne $f(x) = 0$, et par (A_4) on conclut que f ne s'annule que pour $x = 0$. D'où, la seule solution du système (4.4) pour lequel $W_3(\|X\|) = 0$ est la solution $x = y = z = 0$. Ainsi, en vertu de ce qui précède, nous concluons que la deuxième condition du Théorème 1.9 est satisfaite.

À savoir, la seule solution du système (4.4) pour le quel $\frac{d}{dt}U(t,x_t,y_t,z_t) = 0$ est la solution $x = y = z = 0$. Ainsi, en vertu de ce qui précéde, nous concluons que $(x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow 0$. D'où, P étant continue et grace à la condition (A_3), on conclut que la solution $x(t)$ de (4.1) et ses dérivées $x'(.)$ et $x''(.)$ sont uniformément asymptotiquement stables. $\square$

Théorème 4.2. *En plus les hypothèses (A_1)-(A_5), supposons que les conditions suivantes sont réunies :*

(j_1) $\frac{p_1C}{b_0r_0}\delta_1 < d < a_0q_0$.

(j_2) $da'(t)Q(x) + b'(t)P(x)R(x) - P^2(x)\frac{\delta_1}{d}c'(t) < db_0r_0 - p_1C\delta_1$.

(j_3) $\int_0^{+\infty}|c'(s)|ds \le N_1 < \infty$ *et* $c'(t) \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow 0$.

Alors toutes les solutions de (4.1) *sont uniformément asymptotiquement stables et vérifient (4.5) à condition*

$$r < \min\left\{\frac{2(a_0q_0 - d)}{p_1C\delta_1}, \frac{p_0^3(db_0r_0 - p_1C\delta_1)}{p_1^2C\delta_1(d + dp_0^2 + p_0)}\right\}.$$

Démonstration. La preuve dépend de certaines propriétés fondamontales d'une fonctionnelle continûement différentiable de Lyapunov, que l'on notera $W = W(t,x_t,y_t,z_t)$ définie par

$$W(t,x_t,y_t,z_t) = \exp(-\beta(t))V(t,x_t,y_t,z_t), \tag{4.16}$$

où

$$\beta(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{\mu}(|\theta_1(s)|+|\theta_2(s)|+|\theta_3(s)|+\frac{1}{c_0}|c'(s)|)\right]ds, \tag{4.17}$$

et $V = V(t,x_t,y_t,z_t)$ est déjà définie dans le théorème 4.1.

Afin de montrer que V est une fonction définie positive par les conditions de théorème 4.2, nous réécrivons V ainsi

$$V = dc(t)V_0 + V_1 + V_2 + \lambda\int_{-r}^0\int_{t+s}^t y^2(\xi)d\xi ds,$$

où

$$V_0 = F(x) + \frac{1}{d}f(x)y + \frac{\delta_1}{2d^2}y^2,$$
$$V_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{b(t)R(x)}{P(x)} - \frac{c(t)\delta_1}{d}\right]y^2,$$

et

$$V_2 = \frac{1}{2}z^2 + \frac{d}{P(x)}yz + \frac{da(t)Q(x)}{2P^2(x)}y^2,$$

Par nos hypothèses du théorème 4.2 on obtient :

$$\begin{aligned} dc(t)V_0 &= dc(t)\left[F(x) + \frac{1}{d}f(x)y + \frac{\delta_1}{2d^2}y^2 + \frac{1}{2\delta_1}f^2(x) - \frac{1}{2\delta_1}f^2(x)\right], \\ &= dc(t)\left[F(x) + \frac{\delta_1}{2d^2}\big(y + \frac{d}{\delta_1}f(x)\big)^2 - \frac{1}{2\delta_1}f^2(x)\right], \\ &\ge dc(t)\big[F(x) - \frac{1}{2\delta_1}f^2(x)\big], \\ &\ge dc(t)\bigg(\int_0^x(1 - \frac{db_0r_0}{p_1C}\frac{1}{\delta_1})f(u)du\bigg) \ge 0, \qquad \text{car} \quad \frac{db_0r_0}{p_1C\delta_1} > 1. \end{aligned}$$

En utilisant la condition (j_1) nous avons :

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{1}{2}\Big[\frac{b(t)R(x)}{P(x)} - \frac{c(t)\delta_1}{d}\Big]y^2,\\ &\geq \frac{1}{2}\Big(\frac{b_0r_0}{p_1} - \frac{C\delta_1}{d}\Big)y^2 \geq 0.\end{aligned}$$

On a montrer que V_2 est définie positive (preuve théorème 4.1), et puisque l'intégrale $\int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(\xi)d\xi ds$ positive .

Par la changement des variables dans l'intégrale de (4.17), et par (A_3) et (A_5) on obtient

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \frac{|P'(u)|}{P^2(u)}\big(1+Q(u)+R(u)\big)du + \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \frac{|R'(u)|+|Q'(u)|}{P(u)}du\\ &+ \frac{1}{c_0}\int_0^t |c'(s)|ds,\\ &\leq \frac{1}{\mu}\Big(\frac{1+r_1+q_1}{p_0^2}\Big)\int_{-\infty}^{+\infty}|P'(u)|du + \frac{1}{p_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(|R'(u)|+|Q'(u)|\big)du\\ &+ \frac{1}{c_0}\int_0^t |c'(s)|ds,\\ &\leq \frac{N}{\mu} + \frac{1}{c_0}N_1 < \infty,\end{aligned}$$

où $\alpha_1(t) = \min\{x(0),x(t)\}$ et $\alpha_2(t) = \max\{x(0),x(t)\}$.

Alors, il existe une constante positive $\delta > 0$ suffisamment petite telle que

$$V \geq \delta(x^2+y^2+z^2).$$

Maintement, nous pouvons trouver une fonction continue $W_0(\|X(t)\|)$ telle que

$$W_0(\|X(t)\|) \geq 0 \quad \text{et} \quad W_0(\|X(t)\|) \leq W(t,X_t).$$

D'auter part, on a montrer que l'existence d'une fonction continue $W_1(\|X(t)\|)+W_2(\|X_t\|_2)$ qui satisfait l'inégalité $W\big(t,X_t\big) \leq W_1(\|X(t)\|) + W_2\Big(\big(\int_{t-r}^{t}\|X(s)\|^2 ds\big)^{\frac{1}{2}}\Big)$ (Preuve théorème 4.1) .

Soit (x,y,z) une solution de (4.4). Dérivons la fonctionnelle $V(t,x_t,y_t,z_t)$ le long des trajectoires du système (4.4), nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &= dc'(t)F(x) + c'(t)f(x)y + \frac{c'(t)\delta_1}{2d}y^2 - \lambda\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi + \lambda r y^2 \\ &- d\theta_1(t)\Big(yz + \frac{a(t)Q(x)}{2P(x)}y^2\Big) - a(t)\theta_2(t)\Big(yz + \frac{d}{2P(x)}y^2\Big) + \frac{b(t)}{2}\theta_3(t)y^2 \\ &+ c(t)\big(z + \frac{d}{P(x)}y\big)\int_{t-r}^{t}\frac{y(s)}{P(x(s))}f'(x(s))ds + \frac{1}{P(x)}\big(d - a(t)Q(x)\big)z^2 \\ &+ \Big(\frac{c(t)f'(x)}{P(x)} - \frac{db(t)R(x)}{P^2(x)}\Big)y^2 + \Big(\frac{da'(t)Q(x)}{2P^2(x)} + \frac{b'(t)R(x)}{2P(x)} - \frac{c'(t)\delta_1}{2d}\Big)y^2\end{aligned}.$$

En utilisant les définitions de w_2 et w_3, il est clair que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &\leq dc'(t)F(x) + c'(t)f(x)y + \frac{c'(t)\delta_1}{2d}y^2 - \lambda\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi + \lambda r y^2 \\ &+ w_1 + w_3 + \frac{1}{P(x)}\big(d - a(t)Q(x)\big)z^2 + \Big(\frac{c(t)f'(x)}{P(x)} - \frac{db(t)R(x)}{P^2(x)}\Big)y^2 \\ &+ \Big(\frac{da'(t)Q(x)}{2P^2(x)} + \frac{b'(t)R(x)}{2P(x)} - \frac{c'(t)\delta_1}{2d}\Big)y^2.\end{aligned}$$

Par les hypothèses (A_2)-(A_4) et les inégalités (4.13), (4.14), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &\leq dc'(t)\Big[F(x) + \frac{1}{d}yf(x) + \frac{\delta_1}{2d^2}y^2\Big] + \big(\frac{C\delta_1}{2p_0^2}(1 + \frac{d}{p_0}) - \lambda\big)\int_{t-r}^{t} y^2(\xi)d\xi \\ &- \Big[\frac{db_0r_0 - p_1C\delta_1}{p_1^2} - (\lambda + \frac{C\delta_1 d}{2p_0})r\Big]y^2 - \Big[\frac{1}{p_1}(a_0q_0 - d) - \frac{C\delta_1 r}{2}\Big]z^2 \\ &+ \Big[da'(t)Q(x) + b'(t)R(x)P(x) - P^2(x)\frac{c'(t)\delta_1}{d}\Big]\frac{y^2}{2P^2(x)} \\ &+ k_1\big[|\theta_1(t)|+|\theta_2(t)|+|\theta_3(t)|\big]\big(y^2 + z^2\big).\end{aligned}$$

En choisissant $\lambda = \frac{C\delta_1}{2p_0^2}(1 + \frac{d}{p_0})$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V &\leq dc'(t)\Big[F(x) + \frac{1}{d}yf(x) + \frac{\delta_1}{2d^2y^2}\Big] \\ &- \Big[\frac{db_0r_0 - p_1C\delta_1}{2p_1^2} - \frac{C\delta_1}{2p_0}(d + \frac{1}{p_0} + \frac{d}{p_0^2})r\Big]y^2 \\ &- \Big[\frac{1}{p_1}(a_0q_0 - d) - \frac{C\delta_1 r}{2}\Big]z^2 \\ &+ k_1\big[|\theta_1(t)|+|\theta_2(t)|+|\theta_3(t)|\big]\big(y^2 + z^2\big).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Alors

$$\frac{d}{dt}W(t,x_t,y_t,z_t) = \exp(-\beta(t))\big(\frac{d}{dt}V - \frac{1}{\mu}\beta'(t)V\big),$$

$$\frac{d}{dt}W(t,x_t,y_t,z_t) = \exp(-\beta(t))\big(\frac{d}{dt}V - (\frac{1}{\mu}\gamma'(t) + \frac{1}{c_0}|c'(t)|)V\big).$$

En appliquant les inégalités (4.9), (4.18) et en remarquant que

$$dc'(t)\left[F(x) + \frac{1}{d}yf(x) + \frac{\delta_1}{2d^2y^2}\right] = dc'(t)V_0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V - \left(\frac{1}{\mu}\gamma'(t) + \frac{1}{c_0}\left|c'(t)\right|\right)V \leq &- \left[\frac{db_0r_0 - p_1C\delta_1}{2p_1^2} - \frac{C\delta_1}{2p_0}\left(d + \frac{1}{p_0} + \frac{d}{p_0^2}\right)r\right]y^2 \\ &- \left[\frac{a_0q_0 - d}{p_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}\right]z^2 + d\left|c'(t)\right|V_0 \\ &- \frac{\delta}{\mu}\gamma'(t)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \frac{1}{c_0}\left|c'(t)\right|V \\ &+ k_1\gamma'(t)\left(y^2 + z^2\right).\end{aligned}$$

Posons $\mu = \frac{\delta}{k_1}$. Par le fait que $V \geq dc_0V_0$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W \leq &- M\left[\frac{db_0r_0 - p_1C\delta_1}{2p_1^2} - \frac{C\delta_1}{2p_0}\left(d + \frac{1}{p_0} + \frac{d}{p_0^2}\right)r\right]y^2 \\ &- M\left[\frac{a_0q_0 - d}{p_1} - \frac{C\delta_1 r}{2}\right]z^2,\end{aligned}$$

où $M = \exp(-(\frac{K_1}{\delta}N + \frac{N_1}{c_0}))$.
Donc, si

$$r < \min\left\{\frac{2(a_0q_0 - d)}{p_1C\delta_1}, \frac{2p_0^3(db_0r_0 - p_1C\delta_1)}{C\delta_1p_1^2(d + dp_0^2 + p_0)}\right\},$$

alors

$$\frac{d}{dt}W(t,x_t,y_t,z_t) \leq -\alpha(y^2 + z^2) \quad \text{pour} \quad \alpha > 0.$$

Ainsi, en vertu de ce qui précéde, nous concluons que toute solution de l'équation (4.1) est uniformément asymptotiquement stable. □

Remarque 4.1. Toutes les hypothèses du Théorème 4.1 sont vérifiées dans le cas $r = 0$. Alors toute solution de (4.2) est uniformément asymptotiquement stable.

4.1.2 Bornitude

Dans le cas $s \neq 0$ on établit le résultat suivant :

Théorème 4.3. *En plus des hypothèses du Théoréme 4.1, si on suppose que*

$$|s(t, x, y, z)| \leq q(t),$$

où $q \in L^1(0,\infty)$, $L^1(0,\infty)$ étant l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue. Alors, toutes les solutions de l'équation perturbée (4.3) sont uniformément bornées.

Démonstration. La preuve de ce théorème dépendra de la fonction estimée $U(t, x_t, y_t, z_t)$ qu'on a utilisée dans la preuve du Théorème 2.2 dans le cas $r = 0$. On a montré que

$$\delta\|X\|^2 \leq U(t, X_t) \leq \delta_3\|X\|^2. \tag{4.19}$$

L'équation (4.3) est équivalente au système

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{P(x)}y, \\ y' &= z, \\ z' &= -a(t)\theta_2(t)y - \frac{a(t)Q(x)}{P(x)}z - \frac{b(t)R(x)}{P(x)}y \\ &\quad - c(t)f(x) + s(t,x(t),y(t),z(t)). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Nous avons

$$\dot{U}_{(4.20)}(t, x_t, y_t, z_t) = \frac{d}{dt}U(t, x_t, y_t, z_t) + (z + \frac{d}{P(x)}y)s(t, x(t), y(t), z(t)).$$

La preuve du Théorème 2.2 dans le cas $r = 0$ on obtient $\frac{d}{dt}U \leq 0$ pour tout t, x, y, z, et comme $|s(t, x, y, z)| \leq q(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} \dot{U}_{(4.20)}(t, x_t, y_t, z_t) &\leq (z + \frac{d}{P(x)}y)s(t, x(t), y(t), z(t)), \\ &\leq (|z| + \frac{d}{p_0}|y|)|s(t, x(t), y(t), z(t))|, \\ &\leq \alpha_1(|y| + |z|)q(t) \end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \max\{1, \frac{d}{p_0}\}$.

En utilisant les inégalitées $|y| < 1+y^2$, $|z| < 1+z^2$, et comme $\delta\|X\|^2 \leq U(t, x_t, y_t, z_t)$,nous avons

$$\begin{aligned} \dot{U}_{(4.20)}(t, x_t, y_t, z_t) &\leq \alpha_1\left(2 + y^2 + z^2\right)q(t), \\ &\leq 2\alpha_1 q(t) + \alpha_1\|X\|^2 q(t), \\ &\leq \alpha_1(2 + \frac{1}{\delta}U(t, x_t, y_t, z_t))q(t). \end{aligned}$$

Maintenant, en intégrant la dernière inégalité de 0 à t, en utilisant $q \in L^1(0,\infty)$ et l'inégalité de Gronwall.Bellman, on obtient

$$\begin{aligned} U\left(t, x_t, y_t, z_t\right) &\leq U(0,x_0,y_0,z_0) + 2\alpha_1 A + \alpha_1 \frac{1}{\delta} \int_0^t U\left(s, x_s, y_s, z_s\right) q(s) ds, \\ &\leq \left\{U_0 + 2\alpha_1 A\right\} \exp\left(\alpha_1 \frac{1}{\delta} \int_0^t q(s) ds\right), \\ &= \left\{U_0 + 2\alpha_1 A\right\} \exp\left(\alpha_1 \frac{1}{\delta} A\right) = K < \infty, \end{aligned} \tag{4.21}$$

□

où $K > 0$ est une constante, $K = \{U\left(0\right) + 2\alpha_1 A\} \exp\left(\frac{\alpha_1}{\delta} A\right)$, et $A = \int_0^\infty q(s) ds$, $U(0,x_0,y_0,z_0) = U_0$.

Ainsi, nous avons de (4.19) et (4.21) que

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{\delta} U\left(t, x_t, y_t, z_t\right) \leq K_1,$$

où $K_1 = \frac{K}{\delta}$. Ainsi, nous concluons que

$$|x(t)| \leq K_1, \quad |y(t)| \leq K_1, \quad |z(t)| \leq K_1,$$

pour tout $t \geq t_0$. C'est

$$|x| \leq K_1, \quad |x'(t)| \leq K_1, \quad |x''(t)| \leq K_1,$$

pour tout $t \geq t_0$,, ce qui achève la preuve de théorème.

4.1.3 Exemples

Nous concluons avec un exemple pour illustrer les résultats.

Exemple 4.1. On considére l'équation différentielle du troisième ordre non autonome suivante

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\sin x}{1+x^2} + 2\right) x'\right]'' + \left(\frac{\sin t}{4\left(1+t^2\right)} + \frac{1}{2}\right) \left(\left(\frac{\cos x - 1}{1+x^2} + 3\right) x'\right)' \\ &+ \left(\frac{1}{2+t^2} + 1\right) \left(\frac{1}{3+x^2} + 2\right) x' + \frac{1}{50} \left(\frac{1}{3+t^2} + \frac{1}{4}\right) \left(x + \frac{x}{1+x^2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Maintenant, il vérifiée les hypotèses du théorème 4.1 devient :

Il clair que $P(x), Q(x), R(x)$ et $f(x)$ sont fonctions continues différentiables sur $\mathbb{R}$, et

$a(t), b(t)$ et $c(t)$ sont fonctions continues différentiables sur $[0, +\infty[$.

$$\frac{1}{2} = a_0 \leq a(t) = \frac{\sin t}{4\,(1+t^2)} + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} \text{ pour tout } t \geq 0,$$

$$1 = b_0 \leq b(t) = \frac{1}{2+t^2} + 1 \leq \frac{3}{2} = B, \quad c_0 = \frac{1}{4} \leq c(t) = \frac{1}{3+t^2} + \frac{1}{4} \leq \frac{7}{12} = C,$$

$$p_0 = 2 \leq P(x) = \tfrac{\sin x}{1+x^2} + 2 \leq 3 = p_1,$$
$$q_0 = 1 \leq Q(x) = \tfrac{\cos x - 1}{1+x^2} + 3 \leq 3 = q_1,$$
$$r_0 = 2 \leq R(x) = \tfrac{1}{3+x^2} + 2 \leq \tfrac{7}{3} = r_1.$$

$$\delta_0 = \frac{1}{50} \leq \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{50}\left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) \text{ avec } x \neq 0, \text{ et } |f'(x)| \leq \frac{1}{25} = \delta_1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P'(u)|\, du \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left|\frac{\cos u}{1+u^2}\right| + \left|\frac{2u \sin u}{(1+u^2)^2}\right|\right] du \leq \pi + 2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Q'(u)|\, du \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left|\frac{-\sin u}{1+u^2}\right| + \left|\frac{2u(\cos u - 1)}{(1+u^2)^2}\right|\right] du \leq \pi + 2,$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R'(u)|\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{-2u}{(3+u^2)^2}\right| du = \frac{2}{3}.$$

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \big(|P'(u)| + |Q'(u)| + |R'(u)|\big) du < \infty$, et

$$\lim_{x \longrightarrow 0} P'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x(1+x^2) - 2x \sin x}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$\text{Il clair que} \quad c(t) \leq b(t), \quad b'(t) = \frac{-2t}{(2+t^2)^2} \leq c'(t) = \frac{-2t}{(3+t^2)^2} \leq 0,$$

$$\frac{p_1 \delta_1}{r_0} = \frac{3}{50} < d < \frac{1}{4} = a_0 q_0,$$

$$\frac{1}{2} d a'(t) Q(x) - b_0\,(d r_0 - p_1 \delta_1) \leq d\left(\frac{3}{32(3 - 2\sqrt{2})} - 2\right) + \frac{3}{25} < 0 \quad \text{pour } d = \frac{1}{10}.$$

Toutes les hypothèses des Théorèmes 4.1 sont satisfaites, nous pouvons conclure que toute solution de (4.22) est uniformément asymptotiquement stable.

Conclusion et Perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié la stabilité et la bornitude des solutions de certaines d équations différentielles du troisème ordre non autonoume à retard. En donnant des conditions sur les coefficients de ces équations et sur le constante du retard, et puis en utilisant la fonction de Lyapunov.
Il reste des questions ouvertes comme perspectives de recherche. Parmi ces questions on peut notamment citer :

1. Quelles sont les conditions suffisantes pour lesquelles les solutions d'équation différentielle suivante sont uniformément bornées.
$$\begin{aligned}&[h(x(t))x'(t)]'' + a(t)\psi\left(x'(t-r)\right)x''(t-r) + b(t)g\left(x'(t-r)\right) + c(t)f(x(t-r))\\&= p\left(t, x(t), x(t-r), x'(t), x'(t-r), x''(t), x''(t-r)\right).\end{aligned}$$
2. A t-on les mêmes résultats si les fonctions a et b n'sont pas bornées dans l'équation suivante :
$$\left(q(t)\left(p(t)x'(t)\right)'\right)' + a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)f(x(t-r)) = 0.$$
3. Quel les conditions de la stabilité des solutions de l'équation de la forme suivante
$$\left(P(x(t))x'(t)\right)'' + a(t)\left(Q(x(t))x'(t)\right)' + b(t)\left(R(x(t))x'(t-r(t))\right) + c(t)f(x(t-r(t))) = 0.$$

Bibliographie

[1] A. I. Sadek, Stability and Boundedness of a Kind of Third-Order Delay Differential System, *Applied Mathematics Letters, 16 (5) (2003), 657-662.*

[2] A. M. Lyapunov, Stability of Motion, *Academic Press, London,* 1966.

[3] A. T. Ademola, et P. O. Arawomo, Uniform stability and boundedness of solutions of nonlinear delay differential equations of third order. *Math. J. Okayama Univ.* 55 (2013), 157-166.

[4] A. T. Ademola, et O. M. Arawomo, Ogunlaran et E.A. Oyekan. Uniform stability, boundedness and asymptotic behaviour of solutions of some third order nonlinear delay differential equations. *Differential Equations and Control Processes,* N4, (2013), 43-66.

[5] B. Mehri et D. Shadman, Boundedness of Solutions of Certain Third Order Differential Equation, *Math. Inequal. Appl,* 2(4), (1999), 545-549.

[6] B. Yuzhen et G. Cuixia, New results on stability and boundedness of third order nonlinear delay differential equations. *Dynam. Systems Appl.* 22, no. 1 (2013), 95-104.

[7] Burton T. A, Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations. *Mathematics in science and engineering, Volume 178, Academic Press, INC,* 1985.

[8] Burton T. A, Volterra Integral and Differential Equations, *Mathematics in Science and Engineering V(202)(2005), 2nd edition.*

[9] C. Tunç, Boundedness in third order nonlinear differential equations with bounded delay, *Bol. Mat.* 16 (1) (2009), 1-10.

[10] C. Tunç. On the stability and boundedness of a class of higher order delay differential equations. *Journal of the Franklin Institute* 348 (2011) 1404-1415.

[11] C. Tunç, Some stability and boundedness conditions for non-autonomous differential equations with deviating arguments, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ, No.1.(2010), 1-12.*

[12] C. Tunç, Stability and boundedness of solutions of nonlinear differential equations of third-order with delay, *Journal Differential Equations and Control Processes, No.3,* (2007), 1-13.

[13] Emmanuel Moulay. Stabilité des équations différentielles ordinaires. 2007.

[14] H. Yao, W. Meng. On the Stability of Solutions of Certain Non-Linear Third-Order Delay Differential Equations. *International Journal of Nonlinear Science Vol.6, No.3, (2008), 230-237.*

[15] H. K. Khalil, Nonlinear systems. *Prentice -Hall, New York, 2002.*

[16] H. O. Tejumola, A note on the boundedness of solutions of some nonlinear differential equations of the third order, *Ghana J. of Science, 11 (2), (1970), 117-118.*

[17] Hale, Jack K and Lunel, Sjoerd M Verduyn Introduction to functional differential equations, *volume 99, 2013, Springer Science et Business Media*

[18] J. K. Hale, Theory of Functional Differential Equations,*Springer-Verlag, New York, 1977.*

[19] J. O. C. Ezeilo, On The Boundedness of Solutions of a Certain Differential Equation of the Third Order, *Proc. London Math. Soc. (3) 9 (1959), 74-114.*

[20] K. E. Swick, Asymptotic behavior of the solutions of certain third order differential equations, *SIAM J. Appl. Math. 19 (1969), 96-102.*

[21] M. Goldwyn et S. Narendra, Stability of Certain Nonlinear Differential Equations Using the Second Method of Lyapunov, *Craft Laboratory, Harvard University, Cambridge, Mass, USA, 1963.*

[22] M. O. Omeike, Stability and boundedness of solutions of some non-autonomous delay differential equation of the third order,*An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.* (N.S.), 55 (1) (2009), 49-58.

[23] Moussadek Remili and Lynda Damerdji Oudjedi. Stability and boundedness of the solutions of non autonomous third order differential equations with delay. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica,* 53(2) :139-147, 2014.

[24] Moussadek Remili, LYNDA D Oudjedi, and Djamila Beldjerd. On the qualitative behaviors of solutions to a kind of nonlinear third order differential equation with delay. *Commun. Appl. Anal,* 20(1) :53-64, 2016.

[25] Moussadek Remili and Lynda D Oudjedi. On asymptotic stability of solutions to third order nonlinear delay differential equation. *Filomat,* 30(12) : 3217-3226, 2016.

[26] P. Ponzo, Some stability conditions for linear differential equations . *IEEE Transactions on Automatic Control,* 13 (6), (1968), 721-722.

[27] T. Hara. On the stability of solutions of certain third order differential equations, *Proc. Japan Acad. 47 (1971), 894-902.*

[28] T. Yoshizawa, Stability theory by Liapunov's second method, *The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.*

[29] T. A. Ademola, M. O. Ogundiran, P. O. Arawomo c, et O. A. Adesina, Boundedness results for a certain third order nonlinear differential equation. *Applied Mathematics and Computation 216 (2010), 3044-3049.*

[30] Y.F. Zhu, On stability, boundedness and existence of periodic solution of a kind of third order nonlinear delay differential system. *Ann. Differential Equations 8 (2) (1992), 249-259.*

[31] Zhang Li Juan, Si Li Geng, Globally asymptotic stability of a class of third order nonlinear system, *(Chinese) Acta Math. Appl. Sin. 3 0 (no.1) (2007) 99-103.*

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة السلوك النوعي لحلول المعادلات التفاضلية غير الخطية ذات معاملات متغيرة من الدرجة الثالثة مع تأخير ، وبالتحديد استقرار وحدود ، وذالك بإستخدام دالة لبانويوف.

الكلمات المفتاحية : وظيفة لبانويوف ، الاستقرار ، المحدودية ، المعادلات التفاضلية غير الخطية من الدرجة الثالثة مع التأخير.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le comporte qualitative des solutions d'équations différentielles non linéaires non autonomes du troisième ordre avec retard, précisément la stabilité et la bornitude, en utilisant l'approche de la fonction de Lyapunov.

Mots clés: Fonction de Lyapunov, Stabilité, Bornitude, Équations différentielles non linéaires de troisième ordre non autonome avec retard.

Abstract

The aim of this memoir is to study the qualitative behavior of solutions of third-order nonlinear non-autonomous differential equations with delay, precisely the stability and the bornitide, by using the approach to Lyapunov function.

Key words : Lyapunov function, Stability, Boundedness, Non linear differential equation non autonome of third order with delay.