Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université D'Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

Mebarek Neghraoui

Thème

Transformation de Hilbert des fonctions presque périodiques

Soutenu publiquement le 06 /06 /2018 devant le jury composé de :

M. MAMOUNI Touhami	Maître assistant A	Université d'Adrar	Président
M. KHALLADI Mohammed Taha	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Rapporteur
M. GASMI Laid	Maître assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

2017–2018

Dédicace

Je dédie ce mémoire à :

Ma très chère mère

Mon père La miséricorde de Dieu,

Ma chère femme,

Mes fils,

Mes très chers frères et sœurs,

Tous mes amis et toute ma famille, qui m'ont encouragé tout le long de mes études.

Mebarek NEGHRAOUI

Remerciements

Avant toute considération, nous remercions le Grand Dieu le tout puissant qui, m'a aidé pour achever ce travail.

Je tiens a remercier *mon encadreur Monsieur KHALLADI Mohammed Taha,*

Je remercie enseignant Monsieur GASMI Laid de son aide,

Je remercie enseignant Monsieur MAMOUNI Touhami de son aide,

Je remercie également les membres du département de Mathématiques et Informatique,

Merci également à tous les enseignants qui m'ont aidé pendant mon cursus.

Mebarek NEGHRAOUI

Résumé : La transformée de Hilbert $\mathcal{H}f$ d'une fonction presque périodique f est donnée par

$$\mathcal{H}f\,(x) = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt,$$

si cette intégrale existe.

En général, Cette intégrale n'existe pas pour une fonction presque periodique quelconque. Dans ce travail nous allons montrer l'existence de la transformation de Hilbert pour une classe de fonctions presque périodiques de type $e^{i\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Une étude détaillée de cette classe suivie par une application aux équations intégro-différentielles ont été établies.

Mots clés : Fonction presque périodique, Transformée de Hilbert , Polynôme trigonométrique, Equation intégro-différentielle.

Abstract : The Hilbert transform $\mathcal{H}f$ of an almost periodic function f is given by

$$\mathcal{H}f\,(x) = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt,$$

provided this integral exists.

In general, this integral does not exist for some almost periodic functions. In this work we will show the existence of the Hilbert transformation for a class of almost periodic functions of type $e^{i\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. A detailed study of this class followed by an application to the integro-differential equations has been established.

Key words : Almost periodic functions, Hilbert transform, trigonometric polynomial, Integro-differential equation..

Table des matières

Introduction

La théorie des fonctions presque périodiques a été introduite et étudié par le mathématicien danois H. Bohr dans le début du siècle passé. La presque périodicité est une propriété structurelle qui généralise la notion de la périodicité pure. Cette théorie a des applications théoriques et pratiques nombreuses dans divers domaines scientifiques. De nombreux auteurs ont contribué au développement de cette théorie, parmi lesquels V. V. Stepanov, H. Weyl, A. S. Bsicovitch, A. S. Kovanko, S. Bochner, J. V. Neumann et d'autres. Il existe diverses extensions du concept de H. Bohr, notamment ceux introduites par S. Bochner, A. S. Besicovitch, V. V. Stepanov et H. Weyl. Notons que les fonctions presque périodiques au sens de Bohr sont restreintes à la classe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, alors qu'en 1925, V. V. Stepanov a généralisé cette classe sans utiliser l'hypothèse de la continuité. En outre, S. Bochner, en 1933, à défini et étudie les fonctions presque périodiques à valeurs dans les espaces de Banach. Il a montré aussi que ces fonctions comprennent certaines généralisations antérieures de la notion de fonction presque périodique. Pour plus de détails voir [3], [4], [5] et [8].

Historiquement, la théorie de la transformation de Hilbert est un outil mathématique qui a été basé sur les techniques d'analyse complexes. Avec le développement de l'école Calderon-Zygmund, les méthodes à variable réelle ont progressivement remplacé l'analyse complexe, ce qui a conduit à l'introduction d'intégrales singulières dans d'autres domaines des mathématiques. Les intégrales singulières sont aujourd'hui étroitement liées aux équations aux dérivées partielles, à la théorie des opérateurs et à d'autres problèmes différentiels. La transformation de Hilbert comme un opérateur défini explicitement par une intégrale est le prototype de toutes les intégrales singulières. La théorie de la transformation de Hilbert est l'objet de divers travaux scientifiques théoriques et pratiques en Mathématiques appliquées, physique mathématique, sciences de l'ingénieur, mécanique des fluides, aérodynamique, traitement du signal et en electronique, etc...

Le traitement du signal est un domaine en pleine croissance aujourd'hui et une efficacité souhaitée dans l'utilisation de la bande passante et de l'énergie rend la progression encore plus rapide. Les processeurs de signaux sont de nos jours fréquemment utilisés dans l'équipement pour la radio, le transport, la médecine et la production etc.

En 1743, le mathématicien suisse L. Euler a introduit la célèbre formule

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z),$$

150 ans plus tard, le physicien Arthur E. Kennelly a utilisé cette formule pour introduire la notation complexe des formes d'ondes harmoniques dans le génie électrique, c'est-à-dire

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t).$$

Plus tard, au début du $20^{ième}$ siècle, le mathématicien allemand D. Hilbert a montré que la fonction $\sin(\omega t)$ est la transformée de Hilbert de $\cos(\omega t)$. Cela nous a donné l'opérateur de déphasage $\pm\frac{\pi}{2}$ qui est une propriété fondamentale de la transformée de Hilbert. En effet, en mathématiques et particulièrement en traitement du signal, la transformée de Hilbert $\mathcal{H}(f(t))$ d'une fonction $f(t)$ de la variable réelle est une transformation linéaire qui permet d'étendre un signal réel dans le domaine complexe, de sorte qu'il vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

Une fonction réelle $f(t)$ et sa transformée de Hilbert $\mathcal{H}(f(t))$ sont liées les unes aux autres de sorte qu'elles créent ensemble un signal analytique dit fort. Le signal analytique fort peut être écrit avec une amplitude et une phase dans laquelle la dérivée de la phase peut être identifiée comme une fréquence instantanée. De plus, il n'est pas difficile de voir qu'une fonction et sa transformée de Hilbert sont orthogonales. Cette orthogonalité n'est pas toujours réalisée dans les applications à cause des troncatures dans les calculs numériques. Cependant, une fonction et sa transformée de Hilbert ont la même énergie et, par conséquent, l'énergie peut être utilisée pour mesurer la précision de calcul de la transformée de Hilbert approchée.

La Transformation de Hilbert des fonctions presque periodiques au sens de Bohr à èté introduite dans [15] d'une façon abrégé pour la premiere fois par J. N Pandey.

Le but principal de notre travail consiste en l'étude de la transformation de Hilbert des fonctions presque périodiques en exposant la définition exacte et les propriétés élémentaires de cette transformation intégrale. On s'intéresse aussi à l'étude de certaines applications aux équations intégrales singulières à données presque périodiques.

Le premier chapitre est un rappel de la notion de presque périodicité de H. Bohr et les propriétés fondamentales des fonctions presque périodiques en adoptant les trois définitions équivalentes introduites par H. Bohr et S. Bochner et enfin un sous-paragraphe qui présente quelques éléments de base de l'analyse harmonique dans l'espace des fonctions presque périodiques au sens de Bohr.

Le deuxième chapitre expose les différentes formules de la transformation de Hilbert et les conditions d'existence d'une telle transformation, ainsi que les propriétés fondamentales et quelques exemples de cette opération linéaire

Dans le troisième chapitre et d'une manière plus détaillée que celle suivie dans le travail de J. N Pandey [15], on introduit la transformation de Hilbert dans l'espace des fonctions presque périodiques au sens de Bohr en définissant d'abord la transformation de Hilbert des fonctions périodiques classiques. Nous donnons aussi quelques résultats importants.

Le dernier chapitre est consacré à une application aux quelques équations intégro-différentielles à coefficients constants et de second membre presque périodique.

À la fin de ce mémoire on donne une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Fonction presque périodique de H. Bohr

La presque périodicité est une propriété structurale des fonctions continues, qui est invariante par rapport aux opérations classiques d'addition et de multiplication, et aussi, dans certains cas, par la division, la différenciation et l'intégration. Il existe plusieurs approches pour introduire les fonctions presque périodiques au sens de Bohr, voir par exemple [3] ou [5]. Ce premier chapitre, regroupe l'ensemble des définitions et propriétés liées à l'espace des fonctions presque périodiques au sens de Bohr. Pour les preuves voir [3], [4], [5] et [8].

1.1 Définitions et propriétés

Dans ce paragraphe on donne les trois définitions équivalentes de la notion de presque périodicité ; à savoir la définition de Bohr, la définition de Bochner ou la normalié et la définition basée sur l'approximation polynômiale. Puis, on expose certaines de propriétés fondamentales de cette notion.

1.1.1 Définitions

On rappelle qu'une algèbre de Banach est un espace vectoriel normé $\mathcal{A}$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, muni d'une norme $\| \quad \|$ tel que :

(i) $(\mathcal{A}, \| \quad \|)$ est un espace de Banach.

(ii) Pour tous $x, y \in \mathcal{A}$ on a $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$.

On désigne par $\mathcal{C}_b$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes muni de la norme $|| \quad ||_\infty$ de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et rappellons que $(\mathcal{C}_b, || \quad ||_\infty)$ est une algèbre de Banach.

Si f est périodique de période τ, alors $f(x + n\tau) - f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble discret $\{n\tau, n \in \mathbb{Z}\}$ des périodes de f vérifie

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{Z} : n_0 \tau \in [\alpha, \alpha + \tau].$$

La généralisation de cette propriété de l'ensemble des périodes au cas des fonctions presque périodiques est celle de partie relativement dense introduite par H. Bohr pour définir les fonctions presque périodiques.

Définition 1 *Un ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit relativement dense, s'il existe un nombre réel $l > 0$ telle que*

$$[a, a + l] \cap E \neq \phi, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Définition 2 *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé. Un nombre réel non nul τ est appelé ε-presque période de f, si*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$$

Définition 3 *L'ensemble des ε-presque périodes de f est noté et défini par*

$$E(\varepsilon, f) = \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Définition 4 *(Bohr) Une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes est dite presque périodique au sens de Bohr, si $\forall\varepsilon > 0$, l'ensemble $E(\varepsilon, f)$ est relativement dense.*

L'espace des fonctions presque périodiques sur $\mathbb{R}$ au sens de Bohr est noté par $\mathcal{C}_{pp}$.

Si f est périodique, alors l'ensemble $H(f) = \{f_h : f_h(x) = f(x+h), h \in \mathbb{R}\}$ des translatées de f forme un espace compact de $(\mathcal{C}_b, || \quad ||_\infty)$. En remplaçant la compacité de $H(f)$ par la compacité relative on obtient la définition de la presque périodicité (ou la normalité) donnée par S .Bochner.

Définition 5 *(Bochner) Une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes est dite presque periodique, si pour toute suite $(h_n)_n$ de $\mathbb{R}$ on peut extraire une sous suite $(h_{n_k})_k$ telle que la suite de fonctions*

$$(f(. + h_{n_k}))_k$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Définition 6 *On appelle polynôme trigonométrique tout la fonction T définie par*

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x}$$

où $c_k \in \mathbb{C}$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}, k \geq 1.$

Définition 7 *(Approximation polynômiale) Une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes est dite presque periodique, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonometrique T_ε telle que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Proposition 8 *Toute fonction périodique est presque périodique.*

Corollaire 9 *Tout polynôme trigonometrique est une fonction presque périodique.*

Remarque 10 *Il existe des fonctions presque périodiques qui ne sont pas périodiques, prenons par exemple la fonction*

$$f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x.$$

Il n'existe aucun nombre réel $T \neq 0$ vérifiant $f(x+T) = f(x)$, en effet, on a

$$\begin{aligned} f(x+T) - f(x) &= \cos(x+T) + \cos\sqrt{2}(x+T) - \cos x + \cos\sqrt{2}x \\ &= \cos x \cos T - \sin x \sin T + \cos\sqrt{2}x \cos\sqrt{2}T - \sin\sqrt{2}x \sin\sqrt{2}T - \cos x + \cos\sqrt{2}x \\ &= (\cos T - 1)\cos x + (\cos\sqrt{2}T - 1)\cos\sqrt{2}x - \sin T \sin x - \sin\sqrt{2}T \sin\sqrt{2}x. \end{aligned}$$

Supposons que $f(x+T) = f(x)$. Puisque les fonctions $\cos x$, $\cos\sqrt{2}x, \sin x$ et $\sin\sqrt{2}x$ sont linéairement indépendantes, alors T doit satisfaire aux conditions $\cos T = \cos\sqrt{2}T = 1$ et $\sin T = \sin\sqrt{2}T = 0$, donc $T = 2k\pi$ et $\sqrt{2}T = 2h\pi$ $k, h \in \mathbb{Z}$, par suite $k = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$ ce qui est en contradiction avec le fait que $k, h \in \mathbb{Z}$.

Le résultat fondamental des fonctions presque périodiques est donné par le théorème suivant.

Théorème 11 *On a*

$$\text{Définition } (4) \Longleftrightarrow \text{Définition } (5) \Longleftrightarrow \text{Définition } (7)\,.$$

1.1.2 Propriétés élémentaires

Le sous-paragraphe suivant expose les propriétés élémentaires des fonctions presque périodiques.

Proposition 12 *Toute fonction presque périodique est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 13 *Toute fonction presque périodique est bornée sur* $\mathbb{R}$.

Rappelons qu'une partie F est dite sous algèbre d'une algébre E sur le corps $\mathbb{K}$, si

(i) $1_E \in F$.

(ii) $\forall f, g \in F,\ f+g \in F$.

(iii) $\forall f, g \in F, fg \in F$.

(iv) $\forall f \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda f \in F$.

Théorème 14 *L'ensemble* $\mathcal{C}_{pp}$ *des fonctions presque périodiques au sens de Bohr forme une sous algébre fermée de l'algébre* $(\mathcal{C}_b, \|\ \ \|_\infty)$.

Corollaire 15 *Si la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$, *où* $a_n \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda_n \in \mathbb{R}$, *est uniformément convergente, alors elle est presque périodique.*

Proposition 16 *Si* f *est une fonction presque périodique et* $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| > 0$, *alors* $\dfrac{1}{f}$ *est aussi presque périodique.*

Proposition 17 *Si f est une fonction presque périodique, alors $|f|$ l'est aussi.*

Proposition 18 *Si f est une fonction presque périodique et F est une fonction uniformément continue sur $\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$, alors $F \circ f$ est presque périodique.*

Nous exposons maintenant les résultats liés à la presque périodicité de la dérivée et de la primitive des fonctions presque périodiques.

Proposition 19 *Si la dérivée f' d'une fonction f presque périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est presque périodique.*

Rappelons la primitive d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ , où } a \in \mathbb{R}.$$

Nous avons vue que toute fonction presque périodique est bornée sur $\mathbb{R}$. La version réciproque de ce résultat pour la primitive d'une fonction presque périodique est donnée par le théorème de Bohl-Bohr suivant.

Théorème 20 (*Bohl-Bohr*) *Si la primitive F d'une fonction presque périodique f est bornée, alors elle est presque périodique.*

1.2 Analyse harmonique

Le présent paragraphe est un rappel de quelques éléments de base de l'analyse harmonique dans la théorie des fonctions presque périodiques. À savoir, la valeur moyenne, l'inégalité de Bessel, l'égalité de Parseval, les exposants de Fourier, les coefficients de Fourier et les séries de Fourier de ces fonctions presque périodiques.

1.2.1 Valeur moyenne

Définition 21 *On appelle valeur moyenne d'une fonction f et on la note $\mathcal{M}(f)$, la limite définie par*

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx,$$

si elle existe.

Théorème 22 *La valeur moyenne de toute fonction presque périodique existe.*

Théorème 23 *L'application*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}: \quad (\mathcal{C}_{pp}, \|\ \ \|_\infty) &\longrightarrow \mathbb{C}\\ f &\longrightarrow \mathcal{M}(f)\end{aligned}$$

est une forme linéaire continue vérifiant

(i) $\mathcal{M}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{M}(f)}$, *où* $\overline{f}$ *désigne la conjuguée complexe de* f.

(ii) Si $f \geq 0$, *alors* $\mathcal{M}(f) \geq 0$.

(iii) $\mathcal{M}(f) = \lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_a^{a+T} f(x)dx$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Exemple 24 *Remarquons que* $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $e^{i\lambda x}$ *est une fonction périodique, et a fortiori presque périodique, et par suite sa valeur moyenne existe, elle est donée par*

$$\mathcal{M}(e^{i\lambda x}) = \lim_{T\longrightarrow+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\lambda x}dx = \begin{cases} 0 & si\ \lambda \neq 0 \\ 1 & si\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Si f est une fonction presque périodique, alors $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction $f(x)e^{-i\lambda x}$ est presque périodique, et donc sa valeur moyenne et aussi existe, on la note par $a(\lambda)$, i.e.

$$a(\lambda) = \mathcal{M}(fe^{-i\lambda x})$$

Proposition 25 *Soit f une fonction presque périodique et soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N, N$ nombres réels arbitraires distincts et $b_1, b_2, ..., b_N, N$ nombres complexes arbitraires, et soit $a(\lambda_k) = \mathcal{M}(fe^{-i\lambda_k x})$, alors on a*

$$0 \leq \mathcal{M}\left(\left|f - \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\lambda_k x}\right|^2\right) = \mathcal{M}(|f|^2) - \sum_{k=1}^{N} |a(\lambda_k)|^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k - a(\lambda_k)|^2 .$$

En particulier, si $c_k = a(\lambda_k)$, on obtient l'inégalité de Bessel

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a(\lambda_k)|^2 \leq \mathcal{M}(|f|^2).$$

Proposition 26 *Il existe un ensemble fini ou dénombrable de λ pour lesquels*

$$a(\lambda) \neq 0.$$

Définition 27 *Les nombres $\lambda_n, n \geq 1$, telle que $a(\lambda_n) \neq 0$ sont appelés exposants de Fourier de f et les nombres $A_n = a(\lambda_n), n \geq 1$ sont appelés coefficients de Fourier de f. La série formelle*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$$

est appelée série de Fourier associée à f.

1.2.2 Égalité de Parseval

Pour énoncé le théorème d'unicité on a besoin de résultat suivant.

Proposition 28 *Si la valeur moyenne d'une fonction f positive presque périodique est nulle, alors $f \equiv 0$.*

Comme conséquence immédiate du théorème précédent, le résultat suivant qui affirme l'unicité dans l'espace des fonctions presque périodiques.

Théorème 29 (*Unicité*) *Si deux fonctions presque périodiques ont la même série de Fourier, alors elles sont égales.*

Corollaire 30 *Si la série de Fourier d'une fonction f presque périodique est uniformément convergente vers une somme, alors la fonction f coincide avec cette somme.*

On a déjà vu que l'inégalité de Bessel est vérifiée pour les fonctions presque périodiques. En fait, nous allons le résultat général suivant.

Théorème 31 *Soit f une fonction presque périodique telle que $f(x) \backsim \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_k e^{i\lambda_n x}$, alors on a l'égalité de Parseval*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |A_n|^2 = \mathcal{M}(|f|^2)$$

Proposition 32 *Si la suite de fonctions presque périodiques*

$$f_k(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^{(k)} e^{i\lambda_n x},\ k \geq 1$$

converge uniformément vers la fonction f, alors la série de Fourier de f est donnée par la formule

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{i\lambda_n x},\ \text{où } A_n = \lim_{k \longrightarrow \infty} A_n^{(k)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 33 *Si la dérivée (respectivement, la primitive) d'une fonction presque périodique est presque périodique alors sa série de Fourier est obtenue par differentiation (respectivement, intégration) formelle de la série associée à la fonction.*

Proposition 34 *Si f est une presque périodique telle que $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$, alors*

(*i*) $\overline{f}(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} e^{-i\lambda_n x}$.

(ii) $f(x+a) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{i\lambda_n a}.e^{i\lambda_n x}$.

(iii) $e^{i\lambda x} f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{i(\lambda_n+\lambda)x}$.

où a et λ sont des nombres réels.

1.2.3 Convergences uniforme et en moyenne

Dans ce paragraphe nous donnons quelques types de convergences dans l'espace des fonctions presque périodiques.

Définition 35 *On dit qu'une suite de fonctions presque périodiques $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ converge en moyenne quadratique vers f , si elle vérifie*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+, \forall n \geq N, \mathcal{M}(|f_n - f|^2) \leq \varepsilon$$

Proposition 36 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ est une suite de fonctions presque périodiques uniformément convergente, alors elle est convergente en moyenne quadratique.*

Remarque 37 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ est une suite de fonctions presque périodiques convergente en moyenne quadratique vers la fonction f, alors f n'est généralement pas presque périodique.*

Remarque 38 *La convergence en moyenne quadratique n'implique pas en général la convergence uniforme.*

Pour étudier la réciproque considérons une famille $\mathcal{F}$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et rappelons les notions suivantes.

Définition 39 *On dit que $\mathcal{F}$ est uniformément équi-continue, si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Définition 40 *On dit que $\mathcal{F}$ est équi-presque périodique, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l > 0$, telle que tout intervalle de longueur l contient au moins un nombre τ, pour lequel*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Le résultat suivant donne la réciproque de la proposition (36).

Proposition 41 *Si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ est une famille équi-continue, équi-presque périodique et convergente en moyenne quadratique, alors elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Chapitre 2

Transformation de Hilbert

David Hilbert a introduit une transformation intégrale, connue aujourd'hui sous le nom de transformée de Hilbert. Les propriétés fondamentales de cette transformation ont été développées principalement par G.H. Hardy et E.C. Titchmarsh. Ce chapitre expose la définition et les conditions nécessaires d'existence d'une telle transformation de Hilbert, suivie par des exemples et certaines de ces propriétés fondamentales. Pour plus de détails voir [2], [7], [9], [11] et [12].

2.1 Définition et Conditions d'existence

Rappelons d'abord qu'une transformation intégrale d'une fonction f à variable réelle est définie en général par la formule

$$g(x) = \int_D \mathcal{K}(x,t) f(t) dt,$$

où $D \subset \mathbb{R}$ est le domaine d'intégration fini ou infini et la fonction donnée $\mathcal{K}$ est le noyau de la transformation intégrale.

Il existe plusieurs formules différentes pour définir la transformation de Hilbert. Dans ce paragraphe on donne deux définitions équivalentes, l'une est basée sur la valeur principale de Cauchy et l'autre en utilisant le produit de convolution.

Définition 42 *La transformée de Hilbert tronquée d'une fonction* f, *est définie par*

$$\mathcal{H}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|>\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt,$$

si cette intégrale existe.

Définition 43 *La transformée de Hilbert* $\mathcal{H}f$ *d'une fonction* f, *est définie par*

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon f(x),$$

si cette limite existe.

L'intégrale

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \tag{2.1}$$

ne converge pas absolument, et donc n'est pas définie. Mais ceci n'exclut pas que

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt + \int\limits_{x+\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \right)$$

existe, i.e. l'intégrale (2.1) est définie comme une limite des intégrales absolument convergentes

$$\int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt,$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Une telle limite est appelée valeur principale de Cauchy et est notée par vp.

En utilisant cette notation, la définition de la transformation de Hilbert devient comme suit.

Définition 44 *La transformée de Hilbert d'une fonction* f *est définie par*

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)}{t} dt = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \tag{2.2}$$

si l'intégrale est existe.

Rappelons aussi que le produit de convolution de deux fonctions f et g, est notée et définie par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt,$$

si cette intégrale existe.

En adoptant cette définition, la transformée de Hilbert de f peut être écrite sous la forme d'un produit de convolution de f avec la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\pi x}$, i.e.

Remarque 45 *La transformée de Hilbert d'une fonction* f *est définie par*

$$\mathcal{H}f(x) = f(x) * \frac{1}{\pi x} \tag{2.3}$$

si ce produit est existe.

Maintenant, nous allons établir les conditions auxquelles doit satisfaire la fonction f, pour que sa transformée de Hilbert existe sur $\mathbb{R}$. Rappelons tout d'abord la définition de l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R})$, où $1 \leq p \leq \infty$ et $\mathbb{R}$ est muni de la mésure de Lebesgue dx.

Pour toute fonction mesurable f et tout nombre réel p, $1 \leq p \leq \infty$, on pose

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & , \text{ si } 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{L^\infty} = \inf\{c,\ |f(x)| < c \ p.p \text{ sur } \mathbb{R}\} & , \text{ si } p = +\infty \end{cases}$$

La notion presque partout notée $p.p$, signifie qu'une propriété est vérifié sauf pour un ensemble négligeable, i.e. de mesure nule.

Définition 46 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *L'espace* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ *est l'espace des fonctions mesurables sur* $\mathbb{R}$ *et* p*-intégrables au sens de Lebesgue, i.e.*

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable : } \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ *est l'espace des fonctions mesurables menu de la norme dite sup-essentielement bornée. i.e.*

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ mesurable}, \exists C > 0,\ |f(x)| \leq C,\ p.p \text{ sur } \mathbb{R} \}.$$

Définition 47 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, *l'espace*

$$L^p(\mathbb{R}) = \frac{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})}{\mathcal{R}},$$

où $\mathcal{R}$ *est la relation d'équivalence définie par*

$$f \mathcal{R} g \Longleftrightarrow f - g \equiv 0 \ p.p \text{ sur } \mathbb{R},$$

est la classe d'équivalence d'éléments de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Remarque 48 *Le couple* $(L^p(\mathbb{R}), \| \quad \|_{L^p})$ *forme un espace vectoriel normé.*

Définition 49 *Soient* $p, q \in [1, +\infty]$. *On dit que* p *et* q *sont deux exposants conjugués si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Proposition 50 *(Inégalité de Hölder) Soient* p *et* q *deux exposants conjugés de* $[1, +\infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R})$. *Alors*

(i) $f.g \in L^1(\mathbb{R})$.

(ii) $\| fg \|_{L^1} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q}$.

Posons

$$\mathcal{K}(x,t) = \frac{1}{\pi(x-t)} \tag{2.4}$$

Le résultat suivant donne les conditions nécessaires d'existence de la transformée de Hilbert.

Théorème 51 *Soit $1 < p, q < +\infty$ deux exposants conjugués. Alors si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{K} \in L^q(\mathbb{R}^2)$, la transformée de Hilbert $\mathcal{H}f$ existe presque partout.*

preuve. En considérant l'identification (2.4) et en appliquant l'inégalité de Hölder sur la transformée de Hilbert tronquée donnée par la définition (42), on obtient

$$\begin{aligned} H_\varepsilon f(x) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt \\ &= \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \mathcal{K}(x,t) f(t)\, dt \\ &\leq \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} |\mathcal{K}(x,t) f(t)|\, dt \\ &\leq \left(\int\limits_{|x-t|>\varepsilon} |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{|x-t|>\varepsilon} |\mathcal{K}(x,t)|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Si l'ensemble

$$\left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2, |x-t| \leq \varepsilon \right\},$$

est négligeable, le noyau $\mathcal{K} \in L^q(\mathbb{R}^2)$ pour $q > 1$. Par conséquent, la transformée de Hilbert tronquée $\mathcal{H}_\varepsilon f$ existe.

Supposons maintenant que $x \in [-\alpha, \alpha]$ où $\alpha > 0$ et posons

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

où

$$f_1(x) = \chi_{[-2\alpha,2\alpha]} f(x).$$

Alors

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f_1(t)}{x-t} dt + \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f_2(t)}{x-t} dt.$$

La deuxième intégrale peut être écrite sous la forme

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f_2(t)}{x-t} dt = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{|t|>2\alpha} \frac{f(t)}{x-t} dt,$$

qui est non singulière et puisque $f \in L^p(\mathbb{R})$, cette intégrale existe presque partout.

La première intégrale peut être exprimée comme suit

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f_1(t)}{x-t} dt = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left(\int\limits_{-2\alpha}^{x-\varepsilon} \frac{f_1(t)}{x-t} dt + \int\limits_{x+\varepsilon}^{2\alpha} \frac{f_1(t)}{x-t} dt \right),$$

et puisque $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ cette intégrale existe presque partout et comme α est arbitraire, ceci donne le résultat. ■

2.2 Propriétés élémentaires

Dans ce paragraphe, nous allons établit quelques propriétés élémentaires de la transformation de Hilbert.

Proposition 52 *La transformation de Hilbert est une opération linéaire.*

preuve. Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}f$, $\mathcal{H}g$ ses transformées de Hilbert respectivement et soient α et β deux scalaires complexes. Puisque l'intégrale est une opération linéaire, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\alpha f+\beta g)(x) &= \mathcal{H}(\alpha f(t)+\beta g(t)) \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha f(t)+\beta g(t)}{x-t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha f(t)}{x-t} dt + \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta g(t)}{x-t} dt \\
&= \frac{\alpha}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt + \frac{\beta}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{x-t} dt \\
&= \alpha \mathcal{H}(f(t)) + \beta \mathcal{H}(g(t)) \\
&= \alpha \mathcal{H} f(x) + \beta \mathcal{H} g(x).
\end{aligned}$$

■

Proposition 53 *La transformée de Hilbert d'une fonction constante est nulle.*

preuve. Soit f une fonction constante, i.e.

$$f(t)=c, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f(t)) &= \mathcal{H}(c) \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{t} dt \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^{+}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{-\varepsilon} \frac{c}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{c}{t} dt \right).
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t=-u$, on obtient

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{-\varepsilon} \frac{c}{t} dt = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\varepsilon} \frac{c}{u} du = -\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{c}{u} du,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f(t)) &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^{+}} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{c}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{c}{t} dt \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^{+}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} (\frac{c}{t} - \frac{c}{t}) dt \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{H}(c) = 0$. ■

Proposition 54 *Soit f une fonction de $L^{p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}f$ sa transformée de Hilbert et a,b deux constantes arbitraires, on a les propriétés suivantes :*

(*i*) $\mathcal{H}(f(at)) = \mathcal{H}f(ax)$ *si* $a > 0$.

(*ii*) $\mathcal{H}(f(-at)) = -\mathcal{H}f(-ax)$ *si* $a > 0$.

(*iii*) $\mathcal{H}(f(at+b)) = \operatorname{sign}(a)\mathcal{H}f(ax+b)$

(*iv*) $\mathcal{H}(tf(t)) = x\mathcal{H}f(x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt,$

preuve. (i) En effectuant le changement de variable $at = u$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f(at)) &= \frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(at)}{x-t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{x - \frac{u}{a}} \frac{du}{a} \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{ax-u} du \\
&= \mathcal{H}f(ax).
\end{aligned}$$

(ii) En effectuant le changement de variable $-at = u$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f(-at)) &= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(-at)}{x-t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{x - (-\frac{u}{a})} \frac{du}{a} \\
&= -\frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{(-ax) - u} du \\
&= -\mathcal{H} f(-ax)
\end{aligned}$$

(iii) Le changement de variable $at + b = u$, donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f(at+b)) &= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(at+b)}{x-t} dt \\
&= \begin{cases}
\frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{a\left(x - \frac{u-b}{a}\right)} du & \text{si } a > 0 \\
\frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(b)}{x-u} du & \text{si } a = 0 \\
-\frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{a\left(x - \frac{u-b}{a}\right)} du & \text{si } a < 0
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
\frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{(ax+b)-u} du & \text{si } a > 0 \\
0 & \text{si } a = 0 \\
-\frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{(ax+b)-u} du & \text{si } a < 0
\end{cases} \\
&= \operatorname{sign}(a)\ \mathcal{H} f(ax+b)
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(tf(t)) &= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)}{x-t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-(x-t))f(t)}{x-t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(t)}{x-t} dt \ - \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)f(t)}{x-t} dt \\
&= \frac{x}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \ - \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)f(t)}{x-t} dt \\
&= x\mathcal{H}f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.
\end{aligned}$$

■

La transformée de Hilbert de la dérivée d'une fonction est équivalente à la dérivée de la transformée de Hilbert de cette fonction comme le montre le résultat suivant.

Proposition 55 *Soit f une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}f$ sa transformée de Hilbert, on a*

$$\mathcal{H}(\frac{d}{dt} f(t)) = \frac{d}{dx} \mathcal{H}f(x).$$

preuve. On a

$$\mathcal{H}(\frac{d}{dt} f(t)) = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{d}{dt} f(t)}{x-t} dt \ .$$

Une intégration par parties, donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\frac{d}{dt} f(t)) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{f(t)}{x-t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2} dt \\
&= -\frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2} dt \\
&= \frac{d}{dx} \mathcal{H}f(x).
\end{aligned}$$

Rappelons la définition de la transformation de Fourier. Voir [2], [10], [11] et [12].

Définition 56 *La transformée de Fourier d'une fonction f integrable sur $\mathbb{R}$ est définie par*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \ \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \ \mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}dt. \end{aligned}$$

Rappelons aussi les deux résultats suivants.

Théorème 57 *La transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$, i.e.*

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}\,.$$

preuve. Voir [10]. ■

Théorème 58 *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}f$, $\mathcal{F}g$ ses transformées de Fourier respectivement, alors on a*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f\ .\mathcal{F}g.$$

preuve. Voir [10]. ■

Notons que la fonction sign est définie par

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La connexion entre la transformation de Fourier et la transformation de Hilbert est donnée par la formule suivante.

Proposition 59 *Soit* $f \in L^p(\mathbb{R})$. *On a*

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(x) = -i\,\mathrm{sign}\,(x)\,\mathcal{F}(f)(x)$$

preuve. Puisque

$$\mathcal{H}f(x) = (f * g)(x) \tag{2.5}$$

où $g(t) = \dfrac{1}{\pi t}$, alors du théorème (58) et en appliquant la transformée de Fourier sur les deux membres de (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(x) &= \mathcal{F}(f * g)(x) \\ &= \mathcal{F}(f)(x)\ \mathcal{F}(g)(x) \\ &= \mathcal{F}(f)(x)\mathcal{F}(\frac{1}{\pi t}).\end{aligned}$$

Or

$$\mathcal{F}(\frac{1}{\pi t}) = -i\,\mathrm{sign}\,x,$$

donc

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(x) = -i\,\mathrm{sign}\,(x)\ \mathcal{F}(f)(x).$$

Théorème 60 *Si* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *est une fonction paire (respectivement, impaire), alors sa transformée de Hilbert est impaire (respectivement, paire)*

preuve. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(vp \int_{-\infty}^{0} \frac{f(t)}{x-t} dt + vp \int_{0}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \right).\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = -t$, donne

$$vp\int_{-\infty}^{0}\frac{f(t)}{x-t}dt = vp\int_{0}^{+\infty}\frac{f(-t)}{x+t}dt$$

alors

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi}\left(vp\int_{0}^{+\infty}\frac{f(-t)}{x+t}dt + vp\int_{0}^{+\infty}\frac{f(t)}{x-t}dt\right)\\ &= \frac{1}{\pi}vp\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{f(-t)}{x+t}+\frac{f(t)}{x-t}\right)dt.\end{aligned}$$

Si f est une fonction paire, i.e. $f(-t) = f(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi}vp\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{f(t)}{x+t}+\frac{f(t)}{x-t}\right)dt\\ &= \frac{1}{\pi}vp\int_{0}^{+\infty}\frac{(x-t)f(t)+(x+t)f(t)}{x^2-t^2}dt\\ &= \frac{2x}{\pi}vp\int_{0}^{+\infty}\frac{f(t)}{x^2-t^2}dt,\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{H}f(-x) = -\mathcal{H}f(x)$, en conséquence $\mathcal{H}f$ est impaire.

Si f est une fonction impaire, i.e. $f(-t) = -f(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi}vp\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{f(t)}{x-t}-\frac{f(t)}{x+t}\right)dt\\ &= \frac{1}{\pi}vp\int_{0}^{+\infty}\frac{(x+t)f(t)-(x-t)f(t)}{x^2-t^2}dt\\ &= \frac{2}{\pi}vp\int_{0}^{+\infty}\frac{tf(t)}{x^2-t^2}dt,\end{aligned}$$

ce qui entraîne $\mathcal{H}f(-x) = \mathcal{H}f(x)$. D'où $\mathcal{H}f$ est paire. ■

Théorème 61 *Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}f$, $\mathcal{H}g$ ses transformées de Hilbert respectivement. Alors, si $\mathcal{H}f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}g \in L^1(\mathbb{R})$, on a*

$$\mathcal{H}(f * g)(x) = (\mathcal{H}f * g)(x) = (f * \mathcal{H}g)(x)$$

preuve. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f * g)(x) &= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(f * g)(t)}{x - t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{x - t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(t - y) dy \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{x - t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y - x + t) g(x - y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{y - t} g(x - y) dy \\
&= (\mathcal{H}f * g)(x),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f * g)(x) &= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(f * g)(t)}{x - t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{x - s} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(s - y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(s - y) ds}{x - s} dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t) dt}{x - y - t} dy \\
&= (f * \mathcal{H}g)(x).
\end{aligned}$$

∎

Théorème 62 *Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Alors*

(i) $\mathcal{H}f$ *est une fonction de* $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{H}$ *est une isométrie de* $L^2(\mathbb{R})$ *sur* $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{H}f$ *est donnée par*

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx} vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ln(1-\frac{x}{t})dt.$$

preuve. (i) D'après la proposition (59), on a

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}f)(x) = -i\,\mathrm{sign}\,(x)\,\mathcal{F}(f)(x) \tag{2.6}$$

et comme $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$, il vient que $\mathcal{F}(\mathcal{H}f) \in L^2(\mathbb{R})$. Or, d'après le théorème (57), la transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{H}f$ est un élément de $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) De (2.6) et du théorème (57), on a

$$\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$

ce qui montre que $\mathcal{H}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

(iii) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\frac{1}{x-t}) dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{1}{t(\frac{x}{t}-1)} \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{x}{t}+1} \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{d}{dx} \left(\ln(1-\frac{x}{t}) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} vp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ln(1-\frac{x}{t}) dt.
\end{aligned}$$

■

L'un des résultats les plus importants de la théorie des transformations de Hilbert est le théorème suivant.

Théorème 63 $(Riesz)$ *Soit* $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$. *Alors*

(i) $\mathcal{H}f \in L^p(\mathbb{R})$.

(ii) $\exists c > 0$ *tel que*

$$\|\mathcal{H}f\|_{L^p} \leq c \|f\|_{L^p} \tag{2.7}$$

preuve. Voir [11]. ■

Remarque 64 *L'inégalité de Riesz* (2.7) *montre que la transformée de Hilbert est un opérateur borné de* $L^p(\mathbb{R})$ *dans lui même.*

2.3 Transformations multiples de Hilbert et transformée de Hilbert inverse

Dans ce paragraphe, nous allons étudier une propriété importante de la transformation de Hilbert. Il s'agit de la relation d'itération de cet opérateur. En effet, en appliquant la transformée de Hilbert deux fois sur une fonction réelle on obtient la même fonction d'origine mais avec un signe opposé. Plus précisement, on a

Proposition 65 *Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors*

$$\mathcal{H}\left(\mathcal{H}\left(f\left(t\right)\right)\right) = -f(t).$$

preuve. En utilisant la formule de Hardy-Poincaré-Bertrand suivante

$$\frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{x-t} dx \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_2(y)}{y-x} dy = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(y) dy \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{(x-t)(y-x)} dx - \varphi_1(t)\varphi_2(t),$$

où $\varphi_1 \in L^p$, pour $1 < p < +\infty$, et $\varphi_2 \in L^q$, pour $1 < q < +\infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. et prenons $\varphi_1(x) = e^{-ax^2}, a > 0$ et $\varphi_2(y) = f(y)$, on obtient

$$\frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}}{x-t} dx \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-x} dy = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}}{(x-t)(y-x)} dx - e^{-at^2} f(t) \tag{2.8}$$

Puisque

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}}{(x-t)(y-x)} dx = \frac{1}{y-t} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax^2}}{x-t} + \frac{e^{-ax^2}}{y-x} \right) dx \tag{2.9}$$

en remplaçant (2.9) dans (2.8) et en passant à la limite quand $a \to 0$ dans (2.8), on obtient

$$\frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{t-x} \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy = -f(t).$$

D'où

$$\mathcal{H}\left(\mathcal{H}f\right)(t) = -f(t).$$

■

Remarque 66 *De la proposition précédente, on peut écrire*

$$\mathcal{H}^2 = -I,$$

où I *est l'opérateur identité.*

De plus, une application de la transformation de Hilbert trois fois sur la même fonction réelle, donne

$$\mathcal{H}^3 = -\mathcal{H}.$$

La transformée de Hilbert appliquée quatre fois sur la même fonction réelle nous redonne la fonction d'origine, i.e.

$$\mathcal{H}^4 = I.$$

En général, on peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a la propriété d'itération suivante :*

$$\mathcal{H}^n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} I & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{H} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

D'après la remarque (66), il est possible d'utiliser la transformée de Hilbert multiple pour déterminer la transformée de Hilbert inverse. En effet, la proposition (65) motive la définition suivante.

Définition 67 *La transformée inverse de Hilbert d'une fonction* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *est notée et définie par*

$$\mathcal{H}^{-1}\left(f(t)\right) = -\mathcal{H}\left(f(t)\right). \tag{2.10}$$

Théorème 68 *Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}f$, $\mathcal{H}g$ ses transformées de Hilbert respectivement. Si $\mathcal{H}f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}g \in L^1(\mathbb{R})$, on a*

$$(f * g)(x) = -(\mathcal{H}f * \mathcal{H}g)(x).$$

preuve. D'après le théorème (61) , on a

$$\mathcal{H}(f * g)(x) = (f * \mathcal{H}g)(x),$$

en appliquant l'opérateur $\mathcal{H}^{-1}$ sur les deux membres de cette égalité on obtient

$$\mathcal{H}^{-1}\mathcal{H}(f * g)(x) = \mathcal{H}^{-1}(f * \mathcal{H}g)(x),$$

i.e.

$$(f * g)(x) = \mathcal{H}^{-1}(f * \mathcal{H}g)(x).$$

Or, d'après (2.10) de la définition (67) et le théorème (61) , on obtient

$$\mathcal{H}^{-1}(f * \mathcal{H}g)(x) = -\mathcal{H}(f * \mathcal{H}g)(x) = -(\mathcal{H}f * \mathcal{H}g)(x).$$

D'où

$$(f * g)(x) = -(\mathcal{H}f * \mathcal{H}g)(x).$$

■

2.4 Transformation de Hilbert du produit

La détermination de la transformée de Hilbert d'un produit de fonctions quelconques est généralement plus dificile, car il n'existe pas de formule simple pour évaluer cette transformée de Hilbert. Néanmoins, dans certains cas particuliers des simplifications considérables peuvent être obtenues pour déterminer une telle transformation de produit. Certains de ces cas particuliers se produisent dans quelques applications et problèmes d'ingénierie. Pour plus de détails sur la transformation de Hilbert du produit de fonctions voir [11]. Rapellons la définition du signal analytique.

Définition 69 *Un signal analytique est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = g(x) + ih(x)$$

où g et h sont des fonctions à valeurs réelles et h est la transformée de Hilbert de g, i.e. $h(x) = \mathcal{H}g(x)$.

En particulier, un signal analytique assosié à une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, est la fonction g définie par

$$g = f + i\mathcal{H}f.$$

Remarque 70 *D'après ce qui précède, le signal analytique est obtenu en ajoutant à f une partie imaginaire égale à sa transformée de Hilbert.*

Soit le signal analytique

$$f(x) = g(x) + ih(x).$$

En supposant que h possède une transformée de Hilbert, la transformée de Hilbert de f est donc donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f(x) &= \mathcal{H}g(x) + i\mathcal{H}h(x) \\ &= h(x) + i\mathcal{H}^2 g(x). \end{aligned}$$

En utilisant la propriété d'itération de la transformée de Hilbert (Proposition (65)), on obtient

$$\mathcal{H}f(x) = h(x) - ig(x).$$

Il en résulte que

$$\mathcal{H}f(x) = -if(x). \tag{2.11}$$

Considérons maintenant les deux signaux analytiques f_1 et f_2, définis par

$$f_1(x) = g_1(x) + ih_1(x) \tag{2.12}$$

et

$$f_2(x) = g_2(x) + ih_2(x). \tag{2.13}$$

De la théorie d'analyse complexe, le produit de deux signaux analytiques est aussi un signal analytique. Par conséquent, le produit $f_1(x)f_2(x)$ de (2.12) et (2.13) , noté $f(x)$ est donné par

$$f(x) = f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x) - h_1(x)h_2(x) + i\left(g_1(x)h_2(x) + g_2(x)h_1(x)\right).$$

Puisque f est un signal analytique, de la formule (2.11) , on obtient la transformation de Hilbert de la partie réelle de f

$$\mathcal{H}\left(g_1(x)g_2(x) - h_1(x)h_2(x)\right) = g_1(x)h_2(x) + g_2(x)h_1(x). \tag{2.14}$$

D'où

$$\mathcal{H}\left(f_1(x)f_2(x)\right) = -if_1(x)f_2(x),$$

i.e.

$$\mathcal{H}\left(g_1(x)g_2(x) - h_1(x)h_2(x) + i\left(g_1(x)h_2(x) + g_2(x)h_1(x)\right)\right) \tag{2.15}$$

$$= -i\left[g_1(x)g_2(x) - h_1(x)h_2(x) + i\left(g_1(x)h_2(x) + g_2(x)h_1(x)\right)\right] \tag{2.16}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires de (2.15) et (2.16) et en utilisant (2.14) , on obtient la transformation de Hilbert de la partie imaginaire de f

$$\mathcal{H}\left(g_1(x)h_2(x)+g_2(x)h_1(x)\right)=-\left(g_1(x)g_2(x)-h_1(x)h_2(x)\right)$$

D'après ce qui précède, nous avons le résultat suivant.qui motive la définition de la transformée de Hilbert du produit de deux signaux analytiques.

Proposition 71 *La transformée de Hilbert d'un produit de deux signaux analytiques f_1, f_2 vérifie les propriétés suivantes :*

$$\mathcal{H}\left(f_1(x)f_2(x)\right)=f_1(x)\mathcal{H}f_2(x)=\mathcal{H}f_1(x)f_2(x)=-if_1(x)f_2(x).$$

preuve. On a

$$\begin{aligned}
f_1(x)\mathcal{H}f_2(x) &= f_1(x)\mathcal{H}\left(g_2(x)+ih_2(x)\right)\\
&= f_1(x)\left(h_2(x)-ig_2(x)\right)\\
&= -if_1(x)f_2(x),
\end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}f_1(x)f_2(x) &= \mathcal{H}\left(g_1(x)+ih_1(x)\right)f_2(x)\\
&= \left(h_1(x)-ig_1(x)\right)f_2(x)\\
&= -if_1(x)f_2(x).
\end{aligned}$$

■

Remarque 72 *Dans le cas où $f_1=f_2=f$, on obtient*

$$\mathcal{H}f^2(x)=f(x)\mathcal{H}f(x)=-if^2(x)$$

En général, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\mathcal{H}f^n(x) = f^{n-1}(x)\mathcal{H}f(x) = -if^n(x).$$

Exemple 73 *Soit $a > 0$. Calculons la transformation de Hilbert*

$$\mathcal{H}\left(\frac{x^2 - a^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2}\right).$$

Il est clair que la fonction

$$\frac{x^2 - a^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2}$$

est la partie réelle du signal analytique

$$\left(\frac{1}{x + ia}\right)^2.$$

D'après (2.11), *on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\left(\frac{1}{x + ia}\right)^2\right) &= -i\left(\frac{1}{x + ia}\right)^2 \\
&= -i\left(\frac{x - ia}{x^2 + a^2}\right)^2 \\
&= \frac{-2ax - i\left(x^2 - a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^2},
\end{aligned}$$

i.e.

$$\mathcal{H}\left(\left(\frac{1}{x + ia}\right)^2\right) = \frac{-2ax}{\left(x^2 + a^2\right)^2} - i\frac{\left(x^2 - a^2\right)}{\left(x^2 + a^2\right)^2} \tag{2.17}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\left(\frac{1}{x + ia}\right)^2\right) &= \mathcal{H}\left(\left(\frac{x - ia}{x + ia}\right)^2\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\frac{x^2 - a^2 - 2aix}{\left(x^2 + a^2\right)^2}\right),
\end{aligned}$$

i.e.

$$\mathcal{H}\left(\left(\frac{1}{x+ia}\right)^2\right)=\mathcal{H}\left(\frac{x^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right)+i\mathcal{H}\left(\frac{-2ax}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right) \tag{2.18}$$

De (2.17) *et* (2.18) *on en déduit que*

$$\mathcal{H}\left(\frac{x^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right)=\frac{-2ax}{\left(x^2+a^2\right)^2}.$$

2.5 Exemples

Exemple 74 *Soit la fonction*

$$f(t)=\begin{cases}1 & si \quad |t|<a\\ 0 & si \quad |t|>a\end{cases}$$

où $a\in\mathbb{R}_+^*$.

Par définition, on a

$$\mathcal{H}f(x)=\frac{1}{\pi}vp\int_{-a}^{a}\frac{dt}{x-t}$$

si $|t|<a$, l'intégral a une singularité à $t=x$ et donc, si $|x|<a$ on a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(\int_{-a}^{x-\epsilon}\frac{dt}{x-t}+\int_{x+\varepsilon}^{a}\frac{dt}{x-t}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left([\ln|x-t|]_{-a}^{x-\varepsilon}+[\ln|x-t|]_{x+\varepsilon}^{a}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}[\ln|\varepsilon|-\ln|x+a|+\ln|x-a|-\ln|\varepsilon|]\\ &= \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\end{aligned}$$

si $|x|>a$, on obtient

$$\mathcal{H}f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{x-t}=-\frac{1}{\pi}\left[\ln|x-t|\right]_{-a}^{a}=-\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

Finalement, la transformée de Hilbert de f est

$$\mathcal{H}f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| & \text{si } |x| < a \\ -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

Exemple 75 *Considéron les deux fonctions*

$$f(t) = \cos\omega t \;\; et \;\; g(t) = \sin\omega t$$

où $\omega \in \mathbb{R}$.

Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{x-t} dt = \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x - \omega(x-t))}{x-t} dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega x \cos\omega(x-t) + \sin\omega x \sin\omega(x-t)}{x-t} dt \\
&= \frac{\cos\omega x}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega(x-t)}{x-t} dt + \frac{\sin\omega x}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega(x-t)}{x-t} dt \\
&= \frac{\cos\omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega u}{u} du + \frac{\sin\omega x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega u}{u} du \qquad (u = x-t) \\
&= \frac{\sin\omega x}{\pi}.\pi \\
&= \sin\omega x
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}g(x) &= \frac{1}{\pi}vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{x-t}dt = \frac{1}{\pi}vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega x-\omega(x-t))}{x-t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega x\cos\omega(x-t)-\cos\omega x\sin\omega(x-t)}{x-t}dt \\
&= \frac{\sin\omega x}{\pi}vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega(x-t)}{x-t}dt - \frac{\cos\omega x}{\pi}vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega(x-t)}{x-t}dt \\
&= \frac{\sin\omega x}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega u}{u}du - \frac{\cos\omega x}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega u}{u}du \qquad (u = x-t) \\
&= -\frac{\cos\omega x}{\pi}.\pi \\
&= -\cos\omega x
\end{aligned}$$

Exemple 76 *Soit la fonction*

$$f(t) = \frac{t}{(t^2+a^2)}$$

où $a > 0$.

Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}f(x) &= \frac{1}{\pi}vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{(t^2+a^2)(x-t)}dt \\
&= \frac{-1}{\pi(a^2+x^2)}vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\frac{a^2}{t^2+a^2} - \frac{x}{x-t} - \frac{xt}{t^2+a^2}]dt \\
&= \frac{-1}{\pi(a^2+x^2)}\left[a^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+a^2} + x\ vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-dt}{x-t} - x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{tdt}{t^2+a^2}\right] \\
&= \frac{-1}{\pi(a^2+x^2)}.(a\pi) \\
&= \frac{-a}{(a^2+x^2)}
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Transformations de Hilbert des fonctions presque périodique

L'idée de l'introduction de la transformation de Hilbert dans l'espace des fonctions presque périodiques de Bohr a été donnée récemment (en 2004) par J. N Pandey. En effet, dans [15] Pandey à introduit une nouvelle classe des fonctions presque périodiques qui est stable par rapport aux opérateurs de différentiation et de transformation de Hilbert. Cette classe à été construite à partir de la relation entre les polynômes trigonométriques, les séries de Fourier et les fonctions presque périodiques. La transformation de Hilbert des fonctions presque périodiques à des applications nombreuses, en particulier dans la théorie des équations intégrales singulières et d'autres problèmes de la Physique mathématique. Voir [6],[13],[14] et [15].

3.1 Transformée de Hilbert d'une fonction périodique

Il existe plusieurs formules équivalentes définissant la transformation de Hilbert d'une fonction périodique, voir par exemple [11], [13] ou [14].

Définition 77 *Soit $\tau \in \mathbb{R}$ et $1 < p < +\infty$. On note par $L^p_{2\tau}$, l'epace des fonctions L^p-intégrables au sens de Lebesgue sur $[-\tau, \tau]$ et périodiques de période 2τ, i.e.*

$$L^p_{2\tau} = \{f \in L^p([-\tau, \tau]) : \ f \text{ est périodique de période } 2\tau\}.$$

D'après le chapitre 2, toute fonction de l'espace $L^p_{2\tau}$, vérifie les conditions d'existence de sa transformée de Hilbert, et donc elle possède une transformée de Hilbert. Elle est donnée par la définition suivante.

Définition 78 *La transformation de Hilbert d'une fonction $f \in L^p_{2\tau}$ est définie par*

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\tau} vp \int_{-\tau}^{\tau} f(x-t) \cot(\frac{\pi t}{2\tau}) dt \tag{3.1}$$

Remarque 79 *En décomposant l'intégrale (3.1) et en éffectuant un changement de variable convenable, la transformée de Hilbert d' une fonction $f \in L^p_{2\tau}$, peut être réecrire comme suit*

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{2\tau} vp \int_{0}^{\tau} [f(x-t) - f(x+t)] \cot(\frac{\pi t}{2\tau}) dt.$$

Remarque 80 *Lorsque $\tau \longrightarrow +\infty$ dans la formule (3.1), on retrouve la définition standard de la transformation de Hilbert. En effet, puisque*

$$\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2\tau} \cot(\frac{\pi t}{2\tau}) = \lim_{\xi \longrightarrow 0} \xi \cot(\pi t \xi) = \frac{1}{\pi t},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \mathcal{H}f(x) &= \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2\tau} vp \int_{-\tau}^{\tau} f(x-t) \cot\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t)dt}{t} \\
&= \frac{1}{\pi} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)dt}{x-t}.
\end{aligned}$$

3.2 Exemples

Exemple 81 *Soit la fonction périodique* $\cos ax$ *de la période* $\dfrac{2\pi}{a}$, *où* $a > 0$, *En éffectuant les changements de variables*

$$\tau = \frac{\pi}{a} \text{ et } y = \frac{at}{2},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\cos ax) &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \cos a(x-t) \cot\left(\frac{at}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax - 2y) \cot y dy \\
&= \frac{\cos ax}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2y \cot y dy + \frac{\sin ax}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2y \cot y dy \\
&= \frac{\sin ax}{\pi} . \pi,
\end{aligned}$$

car

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2y \cot y dy = 0 \text{ et } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2y \cot y dy = \pi$$

D'où

$$\mathcal{H}(\cos ax) = \sin ax.$$

Exemple 82 *Soit la fonction périodique* $x \longmapsto \sin ax$ *de la période* $\dfrac{2\pi}{a}$*, où* $a > 0$*, on a*

$$\mathcal{H}(\sin ax) = \frac{a}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \sin a(x-t)\cot(\frac{at}{2})dt.$$

Les changements de variables

$$\tau = \frac{\pi}{a} \text{ et } y = \frac{at}{2},$$

donnent

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\sin ax) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(ax-2y)\cot y dy \\
&= \frac{\sin ax}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2y \cot y dy \;-\; \frac{\cos ax}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2y \cot y dy \\
&= -\cos ax.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{H}(\sin ax) = -\cos ax.$$

L'exemple suivant généralise les deux exemples précédents.

Exemple 83 *Soit la fonction périodique* e^{iax} *de la période* $\dfrac{2\pi}{a}$ *où* $a \in \mathbb{R}$*. En effectuant les changements de variables*

$$\tau = \frac{\pi}{a} \text{ et } y = \frac{at}{2},$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(e^{iax}) &= \frac{a}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} e^{ia(x-t)}\cot(\frac{at}{2})dt \\
&= \frac{a}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} (\cos a(x-t) + i\sin a(x-t))\cot(\frac{at}{2})dt \\
&= \frac{a}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \cos a(x-t)\cot(\frac{at}{2})dt + i\frac{a}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \sin a(x-t)\cot(\frac{at}{2})dt \\
&= \begin{cases}
\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax-2y)\cot y dy + i\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(ax-2y)\cot y dy & si\ a>0 \\
0 & si\ a=0 \\
-\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax-2y)\cot y dy - i\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(ax-2y)\cot y dy & si\ a<0
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
-i(i\sin ax + \cos ax) \\
0 \\
i(i\sin ax + \cos ax)
\end{cases},
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\mathcal{H}(e^{iax}) = -i\,\mathrm{sign}(a)\ e^{iax}.$$

L'exemple ci-dessous est une généralisation importante qui motive le paragraphe suivant.

Exemple 84 *Soit la suite* $(P_n)_n$ *des polynômes trigonométriques définie par*

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j x}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\mathcal{H}P_n(x) = -i\sum_{j=1}^{n} a_j\,\mathrm{sign}(\lambda_j)\,e^{i\lambda_j x}.$$

En effet, de la linéarité de $\mathcal{H}$ on a

$$\mathcal{H}P_n(x) = \mathcal{H}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j x}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{H}\left(e^{i\lambda_j x}\right).$$

De l'exemple (83), *on en déduit que*

$$\mathcal{H}P_n(x) = -i\sum_{j=1}^{n} a_j \operatorname{sign}(\lambda_j) e^{i\lambda_j x}.$$

3.3 Transformée de Hilbert d'une fonction presque périodique

Le présent paragraphe à pour objectif d'étendre l'opération de la transformation de Hilbert à des fonctions presque périodiques au sens de Bohr. Dans le paragraphe précédent nous avons vue que la transformation de Hilbert de toute fonction périodique existe presque par tout. En général la transformée de Hilbert d'une fonction presque périodique au sens de Bohr n'existe pas. Cependant, pour les fonctions presque périodiques de type $f(x) = e^{iax}, a \in \mathbb{R}$, qui sont périodiques, la limite $\lim\limits_{\tau \longrightarrow +\infty} \int\limits_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{iay}}{x-y} dy$ est existe, et par suite la transformée de Hilbert de f est bien définée et on a d'après l'exemple (83)

$$\mathcal{H}\left(e^{iax}\right) = \lim_{\tau \longrightarrow +\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{iay}}{x-y} dy = -i \operatorname{sign}(a) e^{iax}.$$

De plus, d'après le corollaire (9) du chapitre 1, tout polynôme trigonométrique

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j x}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R},$$

est une fonction périodique, et par conséquent, sa transformée de Hilbert existe, elle est définie d'après l'exemple (84) par

$$\mathcal{H}P_n(x) = -i\sum_{j=1}^{n} a_j \operatorname{sign}(\lambda_j)\, e^{i\lambda_j x}.$$

D'autre part, puisque toute fonction presque périodique f est (d'après le Corollaire (15)) une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite $(P_n)_n$ de polynômes trigonométriques qui est possède une transformée de Hilbert, il peut arriver que f soit transformable par Hilbert en général. Donc la transformée de Hilbert d'une fonction presque périodique f qui est la limite uniforme de la suite des polynômes trigonométriques

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j x}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R},$$

peut être définie par

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{H}P_n(x) = -i\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \operatorname{sign}(\lambda_j)\, e^{i\lambda_j x} \tag{3.2}$$

si cette limite existe. Plus précisement on a la définition suivante.

Définition 85 *Soit* $f \in \mathcal{C}_{pp}$ *telle que*

$$f(x) \sim \sum_{j=1}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Si f *est une limite uniforme sur* $\mathbb{R}$ *d'une suite* $(P_n)_n$ *de polynômes trigonométriques*

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j x}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R},$$

i.e.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R},$$

alors sa transformée de Hilbert $\mathcal{H}f$ *est définie par*

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathcal{H}P_n(x) = -i\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \operatorname{sign}(\lambda_j)\, e^{i\lambda_j x}.$$

En fait, il existe une classe assez vaste de fonctions presque périodiques pour laquelle la limite (3.2) existe. Ceci motive la définition suivante.

Définition 86 *L'espace des fonctions presque périodiques transformables au sens de Hilbert est notée et définie par la classe*

$$\mathcal{HC}_{pp} =: \left\{ f \in \mathcal{C}_{pp} : f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque 87 *L'espace $\mathcal{HC}_{pp}$ est l'ensemble de toutes les fonctions presque périodiques qui coïncident avec les sommes de leurs séries de Fourier associées.*

Proposition 88 *$\mathcal{HC}_{pp}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_{pp}$.*

preuve. Il est clair que pour tout $f, g \in \mathcal{HC}_{pp}$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \alpha f + \beta g \in \mathcal{HC}_{pp}$. Il reste à montrer que $fg \in \mathcal{HC}_{pp}$, ce qui découle facilement de propriétés classiques des series de Fourier. ∎

Proposition 89 *On a les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{HC}_{pp}$ est stable par rapport à $\mathcal{H}$, i.e. $\forall f \in \mathcal{HC}_{pp}$, $\mathcal{H}f \in \mathcal{HC}_{pp}$.

(ii) $\forall f \in \mathcal{HC}_{pp}$, $(\mathcal{H}f)^{(k)} = \mathcal{H}\left(f^{(k)}\right), k \in \mathbb{N}$.

(iii) $\forall f \in \mathcal{HC}_{pp}$, $\mathcal{H}^2 f = -f + f_0$, où f_0 est une constante arbitraire dépend de f.

preuve. Soit $f \in \mathcal{HC}_{pp}$ telle que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x} \text{ où } a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

(i) On a

$$\mathcal{H}f(x) = -i\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \operatorname{sign}(\lambda_j) e^{i\lambda_j x} = \sum_{j=1}^{+\infty} (-ia_j \operatorname{sign}(\lambda_j)) e^{i\lambda_j x}.$$

Du fait que $-ia_j \operatorname{sign}(\lambda_j) \in \mathbb{C}$ et $\lambda_j \in \mathbb{R}$, il en résulte que $\mathcal{H}f \in \mathcal{HC}_{pp}$.

(ii) $\forall k \in \mathbb{Z}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}f(x))^{(k)} &= \left(-i\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \operatorname{sign}(\lambda_j) e^{i\lambda_j x}\right)^{(k)} \\
&= -i\sum_{j=1}^{+\infty} (i)^k a_j (\lambda_j)^k \operatorname{sign}(\lambda_j) e^{i\lambda_j x} \\
&= \mathcal{H}\left[\left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x}\right)^{(k)}\right] \\
&= \mathcal{H}\left(f^{(k)}(x)\right).
\end{aligned}$$

(iii) En posant

$$f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x} = f_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq 0}}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x}, \text{ où } f_0 = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j,$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^2 f(x) &= \mathcal{H}^2\left(f_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq 0}}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x}\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\mathcal{H}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq 0}}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x}\right)\right) \\
&= -i\mathcal{H}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq 0}}^{+\infty} a_j \operatorname{sign}(\lambda_j) e^{i\lambda_j x}\right) \\
&= -\sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq 0}}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j x} \\
&= -f(x) + f_0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\blacksquare$

Chapitre 4

Applications aux équations intégrales

Dans ce chapitre nous étudierons deux types d'applications dans la classe $\mathcal{HC}_{pp}$ des fonctions presque périodiques transformables par Hilbert : une application aux équations différentielles linéaires et d'autres applications aux équations intégrales à coefficients constants.

Application 1 : Soit l'équation différentielle linéaire

$$y'(x) + \mathcal{H}f'(x) = 0 \tag{4.1}$$

Où $f \in \mathcal{HC}_{pp}$ et y est la fonction inconnue de la variable indépendante x.

Définition 90 *Une fonction* $x \longmapsto y(x)$, *est solution de l'équation* (4.1) *si et seulement si :*

(i) $y \in \mathcal{HC}_{pp}$.

(ii) y *vérifie l'identité* (4.1).

Résolution de l'équation (4.1) **:**

L'équation (4.1), peut être réecrire sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)+\mathcal{H}f(x)\right]=0,$$

en intégrant, on obtient

$$y(x)+\mathcal{H}f(x)=c,\ \text{où } c \text{ est une constante arbitraire.}$$

Puisque $f\in\mathcal{HC}_{pp}$, alors

$$\mathcal{H}f(x)=-i\sum_{j=1}^{+\infty}a_j\,\mathrm{sign}(\lambda_j)\,e^{i\lambda_j x},\ \text{où } a_j\in\mathbb{C},\lambda_j\in\mathbb{R}.$$

Par conséquent, la solution générale y dans $\mathcal{HC}_{pp}$ de (4.1) est donnée par

$$x\longmapsto y(x)=i\sum_{j=1}^{+\infty}a_j\,\mathrm{sign}(\lambda_j)\,e^{i\lambda_j x}+c.\ \text{où } c \text{ est une constante arbitraire.}$$

Application 2 : Soit l'équation intégrale linéaire

$$\mathcal{H}y(x)=f(x) \tag{4.2}$$

Où $f\in\mathcal{HC}_{pp}$ est une fonction donnée et y est la fonction inconnue de la variable indépendante x.

Définition 91 *Une fonction $x\longmapsto y(x)$ est dite solution de l'équation intégrale* (4.2) *si et seulement si :*

(i) $y\in\mathcal{HC}_{pp}$.

(ii) y *vérifie l'identité* (4.2).

Résolution de l'équation (4.2) :

En appliquant la transformé de Hilbert sur les deux membres de l'équation (4.2), on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}^2 y(x) = \mathcal{H}f(x),$$

En utilisant la propriété (iii) de la proposition (89), on trouve

$$-y(x) + y_0 = \mathcal{H}f(x),$$

où y_0 est une constante arbitraire. Ainsi

$$y(x) = -\mathcal{H}f(x) + y_0.$$

Comme $f \in \mathcal{HC}_{pp}$, on a

$$\mathcal{H}f(x) = -i\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \operatorname{sign}(\lambda_j) e^{i\lambda_j x}, \text{où } a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, la solution générale y dans $\mathcal{HC}_{pp}$ de l'équation (4.2) est donnée par la fonction

$$x \longmapsto y(x) = y_0 + i\sum_{j=1}^{+\infty} a_j \operatorname{sign}(\lambda_j) e^{i\lambda_j x}, \text{ où } a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

Application 3 : Considérons l'équation intégro-différentielle linéaire suivante

$$y'(x) + a\mathcal{H}y(x) = 0 \tag{4.3}$$

Où $a \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{HC}_{pp} \in \mathcal{G}_{spp}$ et y est la fonction inconnue de la variable indépendante x.

Définition 92 *Une fonction $x \longmapsto y(x)$ est dite solution de l'équation intégrale* (4.3) *si et seulement si :*

(i) $y \in \mathcal{HC}_{pp}$.

(ii) y *vérifie l'identité* (4.3).

Résolution de l'équation (4.3) :

En appliquant la transformée de Hilbert sur les deux membres de l'équation (4.3) et en utilisant la propriété (iii) de la proposition (89), on obtient

$$\mathcal{H}y'(x) + a(-y(x) + y_0) = 0 \tag{4.4}$$

où y_0 est une constante arbitraire.

En multipliant par a, l'équation (4.4), devient

$$a\mathcal{H}y'(x) + a^2(-y(x) + y_0) = 0$$

ou

$$a\mathcal{H}\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) + a^2(-y(x) + y_0) = 0 \tag{4.5}$$

D'après la proposition (55), on a

$$\mathcal{H}\left(\frac{d}{dx}y(x)\right) = \frac{d}{dx}(\mathcal{H}y(x)),$$

Donc l'équation (4.5) devient

$$\frac{d}{dx}(a\mathcal{H}y(x)) + a^2(-y(x) + y_0) = 0 \tag{4.6}$$

De l'équation (4.3), on a

$$a\mathcal{H}y(x) = -y'(x) = -\frac{d}{dx}y(x),$$

par suite l'équation (4.6) est équivalente à l'équation différentielle de second ordre suivante

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + a^2y(x) = a^2y_0 \tag{4.7}$$

Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = y_0$ est une solution particulière de (4.7) , de plus, pour tout$x \in \mathbb{R}$, la solution générale de l'équation homogène associée à (4.7) , est de la forme

$$y(x) = b\cos ax + c\sin ax, \text{ où } b, c \in \mathbb{C}.$$

En conséquence, la solution générale dans $\mathcal{HC}_{pp}$ de l'équation (4.7) est de la forme

$$x \longmapsto y(x) = y_0 + b\cos ax + c\sin ax,$$

où b, c sont des constantes complexes arbitraires.

Application 4 : Considérons l'équation integro-différentielle singulière dans l'espace de la fonction presque périodique

$$y''(t) + \mathcal{H}y(t) = f(t) \tag{4.8}$$

où $f \in \mathcal{HC}_{pp}$ et y est la fonction inconnue de la variable indépendante t.

Théorème 93 *La solution générale de l'équation* (4.8) *est donnée par*

$$y = c + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-a_n}{\lambda_n^2 + i\,\mathrm{sign}(\lambda_n)} e^{i\lambda_n t}$$

preuve. On cherche les solutions générales de l'équation homogène associée

$$y'' + \mathcal{H}y = 0 \tag{4.9}$$

Soit $y = e^{i\lambda t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a

$$y'' = -\lambda^2 e^{i\lambda t} \text{ et } \mathcal{H}y = -i\,\mathrm{sign}(\lambda) e^{i\lambda t},$$

donc

$$-\lambda^2 - i\,\mathrm{sign}(\lambda) = 0,$$

ce qui montre que $\lambda \in \mathbb{C}$, or $\lambda \in \mathbb{R}^{*}$, alors il n'existe aucune solution de la forme $e^{i\lambda t}$. On peut vérifier facilement que $y \equiv c$ où c est une constante arbitraire, est une solution de l'équation homogène (4.9) .

Supposons que

$$f(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j e^{i\lambda_j t},$$

et que

$$y(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} b_j e^{i\lambda_j t}.$$

est solution particulière de (4.8). En remplaçant y et f dans (4.8) on obtient

$$b_j = \frac{-a_j}{\lambda_j^2 + i\,\mathrm{sign}(\lambda_j)}, j \in \mathbb{N}^{*}.$$

Donc la solution particulière de (4.8) est de la forme

$$y = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{-a_j}{\lambda_j^2 + i\,\mathrm{sign}(\lambda_j)} e^{i\lambda_n t}$$

et sa solution générale est donnée par la fonction

$$t \longmapsto y(t) = c + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-a_n}{\lambda_n^2 + i\,\mathrm{sign}(\lambda_n)} e^{i\lambda_n t},$$

où c est une constant arbitraire. ■

Conclusion et Perspectives

Le but principal de notre travail a été de faire une étude assez détaillée d'une transformation intégrale de type Hilbert en construisant une nouvelle classe $\mathcal{HC}_{pp}$ de fonctions presque périodiques au sens de Bohr stable par rapport à la transformation de Hilbert.

Bien que cette classe ait été introduite récemment, certaines de ses propriétés qui jouent un rôle important dans plusieurs domaines théoriques et pratiques ne sont pas encore établies. En outre, ce travail est loin d'être exhaustif, de nombreux problèmes de la théorie des fonctions presque périodiques n'ont pas été abordés.

Néanmoins, nous espérons que ce travail, soit un document utile et un point de départ pour développer d'autres projets de recherche.

En perspectives, nous sommes intéressé par l'étude de certaines questions liées à la recherche des solutions de quelques problèmes différentiels et intégrales dans l'espace $\mathcal{C}_{pp}$ des fonctions presque périodiques. À titre d'exemple, le problème ouvert suivant :

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\mathcal{H}y = b(t),$$

où a et b sont des fonctions presque périodiques.

REFERENCES

[1] Akhiezer N. I, and Glazman I. M., Theory of linear operators in Hilbert space, Dover Publications, Inc, Ney York, (1993) .

[2] Alexander.D Poularikas. Transforms and applications handbook. Third Edition, CRC Press Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton London New York, (2010).

[3] Besicovitch A.S., Almost periodic functions, Dover, (1954) .

[4] Bohr H., Almost periodic functions. Chelsea Publishing Company, (1947).

[5] Corduneanu C., Almost periodic functions, Interscience Publishers, (1968) .

[6] Cossar. J. Hilbert transforms and almost periodic functions. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, volume 56, 354.366,.Cambridge University Press, (1960).

[7] Debnath L and Bhatta D., Integral transforms and their applications. Second Edition, CRC Press Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton London New York, (2007).

[8] Fink A. M., Almost periodic differential equations, Lecture Notes in Math., 377, Springer, (1974) .

[9] Frank.R Kschischang. The hilbert transform. University of Toronto, 83 :277. 285, (2006).

[10] Grafakos. L., Classical Fourier Analysis, Second Edition, Springer Science, Business Media, LLC, (2008) .

[11] Frederick.W King. Hilbert transforms, volume 1. Cambridge University Press Cambridge, (2009).

[12] Hahn S.L., The transforms and applications handbook. Second Edition, CRC Press Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton London New York, (2000) .

[13] Pandey, J.N., The Hilbert transform of Schwartz distributions and applications, John Wiley and Sons, Inc., Jan (1996) .

[14] Pandey, J.N., The Hilbert Transform of periodic distributions, Journal of Integral Transform and Special Functions, 5, No. 2, 117-142, (1997).

[15] Pandey J. N., The hilbert transform of almost periodic functions and Distributions, Journal of Computational Analysis and Applications,Vol.6,No.3,199-210, (2004) .