Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Ahmed Draia D'Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

DJERRADI Fatima

Thème

Sur la théorie de la convexité et ses applications

Soutenu publiquement le ../../2018 devant le jury composé de :

M. BOUDAOUI Ahmed	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Président
M. DEBAGHE Mohammed	Maître assistant A	Université d'Adrar	Rapporteur
M. MAMOUNI Touhami	Maître assistant A	Université d'Adrar	Examinateur

2017–2018

Remerciements

En premier et avant tout je remercie le Dieu de m'avoir donné la force de réaliser ce travail. Je tiens a remercier chaleureusement, mon encadreur Mr. DEBAGHE Mohammed. pour avoir suivi l'évolution de ce travail tout au long de l'année, pour ses conseils judicieux et ses encouragements.
Tous mes remerciements et gratitude vont à Mr. BOUDAOUI Ahmed, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury. Mes vives remerciements vont aussi à Mr. MAMOUNI Touhami d'avoir accepté d'être membres du jury et d'examiner mon travail.
Mes remerciements les plus respectueux vont aussi aux professeurs de mathématiques du département mathématiques et informatique sans exception, et tous les enseignants qui ont contribué à l'enrichissement de mes connaissances du primaire jusqu 'à l'université.
Enfin, je remercie tous ceux qui a contribué de près ou de loin à la rèalisation de ce mémoire.

Dedicas

Je voudrais dédier ce travail

au printemps qui ne cesse de donner ... à ma mère

Au grand coeur ... mon cher père

Aux personnes qui ont ouvert notre voie de la science et du savoir

Tous nos professeurs distingués

à chaque personne qui m'a soutenu dans mes études

À mes amis de promotion 2^{eme} *annés Mastre Mathématiques*

À mes familles Djerradi

Résumé

Ce mémoire est consacrée à l'étude sur la théorie de convexités et leur application. L'objectif de cette travail est d'établir de l'étude générale sur les ensembles convexes et les fonctions convexes. Ce mémoire est devisé en trois chapitres. Le premier chapitre fournit quelques définitions et résultats auxiliaires qui seront utilisé plus tard. Dans le deuxième chapitre, nous comportons une étude des ensembles convexes et des fonctions convexes, nous examinons les propriétés de continuité, semi-continuité et la différentiabilité. Dans la troisième chapitre nous présentons des applications sur la convexité, et des résultat d'éxistance et d'unicité de minima pour des fonctions convexes.
Les mots clés :convexe, ensemble convexe, fonction convexe, semi-continuité, différentiabilité.

Abstract

This thesis is devoted to the study of convex theory and its applications. The aim of this work is to develop a general study of convex sets and convex functions. This memory is divided into three chapters. First chapter provides some additional definitions and results that will be used later. In the second chapter, we study convex sets and convex functions. We study properties of continuity, semi-continuity and differentiation. In the third chapter we present application on convexity, the results of existence and the singularity of the minimum limits of convex functions.
Key words :convex, convex set, convex function, semi-continuity, differentiation.

ملخص

هذه المذكرة مكرسة لدراسة نظرية التحدب وتطبيقاتها. الهدف من هذا العمل هو وضع دراسة عامة حول مجموعات و دوال محدبة. ينقسم هذا العمل إلى ثلاثة فصول. يقدم الفصل الأول بعض التعريفات والنتائج التي سيتم استخدامها لاحقًا. في الفصل الثاني نقوم بدراسة مجموعات ودوال محدبة ، ندرس خصائص الاستمرارية ، شبه الاستمرارية والتفاضل لدوال محدبة. في الفصل الثالث نقدم تطبيقات على التحدب ، ونتائج الوجود والتفرد من الحدود الدنيا لدوال محدبة.

الكلمات المفتاحية: التحدب، مجموعات محدبة، دوال محدبة، شبه الاستمرارية، التفاضل.

Table des matières

Introduction

L'analyse convexe est une discipline qui n'a connu son essor que très tardivement. La notion d'ensemble convexe était connue depuis longtemps et a été fortement étudiée par Minkowski. Son intérêt pour cette notion a germé au cours de son étude de la théorie géométrique des nombres entre la fin des années 1800 et le début des années 1900. Avec le développement de l'analyse fonctionnelle, cette notion a gagné en importance. Mais la communauté mathématique n'attachait que trop peu d'importance aux fonctions convexes vu qu'elles étaient elles-mêmes incorporées dans diverses théories. Plus tard, en 1934, W. Fenchel publia un livre consacré sur les ensembles convexes, puis vers 1950, il écrivit un livre sur les ensembles et les fonctions convexes dans lequel il posa les bases de l'analyse convexe dans $\mathbb{R}^n$. Les fondateurs de l'analyse convexe moderne en tant que discipline à part entière sont R. T. Rockafellar, W. Fenchel et J. J. Moreau qui ont étudié les fonctions convexes de façon approfondie. En particulier, R. T. Rockafellar a permis une avancée énorme dans le domaine durant les années 1970 en étendant l'analyse convexe à des espaces vectoriels plus généraux que $\mathbb{R}^n$ dans ses divers papiers. C'est plus ou moins à cette période que l'analyse convexe a reçu plus de considérations des mathématiciens car les champs d'applications étaient divers (théorie des jeux, ingénierie, optimisation, . . .).

Nous nous proposons d'étudier la convexité et leur applications. La première partie de ce travail comportera quelques notions de base (espace affine, espace topologie et espace de Hilbert).

La seconde chapitre, est consacrée à l'étude des fonctions convexes. La premiére partie de ce chapitre comportera une étude des ensembles convexes, et leur propriétés algébrique et topologique, nous établissons des théorèmes importants de la géométrie convexe : le théorème de Carathéodory, les théorèmes de séparation de convexes. La seconde partie, nous abordons la notion de fonctions convexes. Nous étudions ses propriétés en plusieurs niveaux. Nous examinons les propriétés de semi-continuité, de continuité puis de dérivabilité, nous introduisons le concept de sous-différentiel. Ce dernier sera mis en lien avec la notion de dérivabilité.

Dans le troisième chapitre, nous établissons des théorèmes importants le théorème de Krein-Milman et théorème de point fixe de Schauder. Nous attacherons une importance particulière à l'étude des minima. On commencera par établir des résultats d'existence et d'unicité de minima pour des fonctions convexes.

Chapitre 1

Préliminaires

Cette chapitre est un rappel de quelques définitions et résultats généraux dans différents espaces : espace affine, topologie et espace de Hilbert, qui sont base de ce travail. Voir [1], [8], [9] et [14]

1.1 Espaces affines

Définition 1.1. Soit $\overrightarrow{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.
Un espace affine attache à $\overrightarrow{E}$ (ou bien un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$) est un couple $(\mathcal{E}, \widetilde{+})$ où $\tilde{+}$ est une loi externe :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \overrightarrow{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ (A, \overrightarrow{u}) & \rightarrow & A \widetilde{+} \overrightarrow{u} \end{array}$$

verifier :

1. pour tout $A \in \mathcal{E}$: $A \widetilde{+} \overrightarrow{0_{\overrightarrow{E}}} = A$.
2. $\forall\ A \in \mathcal{E}, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}, A \widetilde{+} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (A \widetilde{+} \overrightarrow{u}) \widetilde{+} \overrightarrow{v}$.
3. $\forall\ A\ ,\ B\ \in\ \mathcal{E}\ , \exists\ \overrightarrow{u}\ \in \overrightarrow{E}$ tel que $B = A \widetilde{+} \overrightarrow{u}$ ce veteur est noté par $\overrightarrow{AB}$, i. e. $B = A \widetilde{+} \overrightarrow{AB}$ et $A = B \widetilde{+} \overrightarrow{BA}$.

On dit que $\overrightarrow{E}$ est la direction de $\mathcal{E}$. les éléments de $\mathcal{E}$ sont des points.
Si $\overrightarrow{E}$ de dimension finie n on dit que $\mathcal{E}$ est de dimension finie n.

Remarque 1.1. Tout espace vectoriel est un espace affine attaché à lui même.
Si $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel $(E, +, .)$, $(\overrightarrow{E}, \widetilde{+})$ ici $\widetilde{+} = +$.

Proposition 1.1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. On a :*

1. $\forall A \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}_{\overrightarrow{E}}$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
3. $\forall A, B, C \in \mathcal{E}; \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow B = C$.
4. $\forall A, B \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow A = B$.
5. *Relation de chale* $:\forall\ A, B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Démonstration.
1. $\forall A \in \mathcal{E}$ on a
$$A = A \widetilde{+} \overrightarrow{0}_{\overrightarrow{E}} \Longrightarrow A = A \widetilde{+} \overrightarrow{AA}$$
$$A \widetilde{+} \overrightarrow{0}_{\overrightarrow{E}} = A \widetilde{+} \overrightarrow{AA} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}_{\overrightarrow{E}}$$
2. $\forall A, B \in \mathcal{E}\ \ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}_{\overrightarrow{E}}$ on a :
$$A = B \widetilde{+} \overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad B = A \widetilde{+} \overrightarrow{AB}$$
donc
$$\begin{aligned} B = (B \widetilde{+} \overrightarrow{BA}) \widetilde{+} \overrightarrow{AB} &= B \widetilde{+} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) \\ \overrightarrow{0}_{\overrightarrow{E}} + B &= B \widetilde{+} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$
Alors $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}_{\overrightarrow{E}}$, donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. On a $B = A \widetilde{+} \overrightarrow{AB}$ et $C = A \widetilde{+} \overrightarrow{AC}$ comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, il vient que $B = C$
Réciproquement, si $B = C$, on a $B = A \widetilde{+} \overrightarrow{AB}$ et $C = A \widetilde{+} \overrightarrow{AC}$ ce implique que $A \widetilde{+} \overrightarrow{AB} = A \widetilde{+} \overrightarrow{AC}$. donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
4. On a $B = A \widetilde{+} \overrightarrow{AB}$, comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, il vient que $A = B$
Réciproquement, si $A = B$ on a $B = A \widetilde{+} \overrightarrow{AB}$ et $A = B \widetilde{+} \overrightarrow{BA}$.
Alors $A \widetilde{+} \overrightarrow{AB} = B \widetilde{+} \overrightarrow{BA}$, donc
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AB} = 0\ , \quad \text{Donc } \overrightarrow{AB} = 0$$

5. Relation de chale $\forall\, A, B \in \mathcal{E}\ \ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
   On a :$A\widetilde{+}\overrightarrow{AC} = C = B\widetilde{+}\overrightarrow{BC} = A\widetilde{+}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
   Donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ □

Remarque 1.2. 1. Si $dim\mathcal{E} = 1$ on dit que $\mathcal{E}$ est une droite affine attaché par vct$\{\overrightarrow{u}\}$, engendré par $< \overrightarrow{u} >$ avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0_{\overrightarrow{E}}}$;

2. Si $dim\mathcal{E} = 2$ on dit que $\mathcal{E}$ est une plan affine attaché par vct $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ libre.

1.1.1 Sous espace affine

Définition 1.2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{F}$ sous ensemble de $\mathcal{E}$). $\mathcal{F}$ est une sous espace affine de $\mathcal{E}$ s'il existe un sous espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de $\overrightarrow{E}$ et un point $z \in \mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F} = z + \overrightarrow{F}$

$$\mathcal{F} = z + \overrightarrow{F} = \{z\widetilde{+}\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}\}$$

Remarque 1.3. 1. $\forall\, M \in\ \mathcal{F}\ alors\ M = z\widetilde{+}\overrightarrow{u}\ \ ,\ \ \overrightarrow{zM} \in \overrightarrow{F}$.

2. $\forall\, N\ ,\ M \in\ \mathcal{F}\ alors\ \overrightarrow{NM} \in \overrightarrow{F}$

3. Si $\mathcal{E}$ de dimension fini alors $dim\mathcal{F} \leq dim\mathcal{E}$ car $dim\overrightarrow{F} \leq \overrightarrow{E}$

1.1.2 Applications affines

Définition 1.3. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces affines respectivement attaché à $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{E}'$ et $f : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}'$ une application.
f est dite affine s'il existe $\overrightarrow{f} \in L(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{E}')$ tel que $\forall\, (A, \overrightarrow{u}) \in \mathcal{E} \times \overrightarrow{E}$

$$f(A\widetilde{+}\overrightarrow{u}) = f(A)\widetilde{+}\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\ \ i.e. \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(A)f(A\widetilde{+}\overrightarrow{u})}$$

On dit que $\overrightarrow{f}$ est une partie lineaire de f et elle est unique.
On note par $Aff(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ l'ensemble des application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$

Définition 1.4. $\mathcal{E}$ espace affine. On appelle une Transformation tout application bijictive de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Proposition 1.2. *[1] soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines.*

1. *L'image d'un sous-espace affine de$\mathcal{E}$ par une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$.*
2. *Un application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est bijective ssi $\overrightarrow{f}$ est bijective de $\overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ ($\overrightarrow{f}$ est isomorphisme).*
3. *Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ deux applications affines. Alors $gof : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est affine et $\overrightarrow{gof} = \overrightarrow{g} o \overrightarrow{f}$*

1.1.3 Exemples des applications affines

1. **Translation** :

   Définition 1.5. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. On appelle Translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et on note $t_{\overrightarrow{u}}$ l'application :

$$\begin{array}{rccl} t_{\overrightarrow{u}} : & \mathcal{E} & \to & \mathcal{E} \\ & A & \to & t_{\overrightarrow{u}}(A) = A \widetilde{+} \overrightarrow{u} \end{array}$$

   Proposition 1.3. *[1]*

   (a) *Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une translation ssi : f est affine et $\overrightarrow{f} = Id_E$. .*

   (b) $\forall\ \overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}\ \in \overrightarrow{E} : t_{\overrightarrow{u}}\ o\ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$.

   (c) $t_{\overrightarrow{0}} = Id_{\mathcal{E}}$.

   (d) $\forall\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, $t_{\overrightarrow{u}}$ *est bijective et* $(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{\overrightarrow{-u}}$

2. **Homothéties** :

   Définition 1.6. Soient $\Omega \in \mathcal{E}$, $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle Homothéties de centre Ω et de rapport k et on note $h_{\Omega,k}$, l'application : $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $M \mapsto h_{\Omega,k} = M'$ définie par :

$$\forall\ M\ \mathcal{E} \quad \Omega M' = k\overrightarrow{\Omega M} \ \ i.e.\ M' = \Omega + k\overrightarrow{\Omega M}$$

1.2 Espases vectoriel topologique

1.2.1 Espases métriques

Définition 1.7. Soit X un ensemble. On appelle distance sur X toute application d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Le couple (X, d) est appelé un espace métrique.

Définition 1.8. Soit (X, d) un espace métrique.

— Pour $a \in X$ et $r \geq 0$, on définit les ensembles suivants

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est :

$$B(a, r) := \{x \in X | d(x, a) < r\}$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon r est :

$$\bar{B}(a, r) := \{x \in X | d(x, a) \leq r\}$$

3. La sphère de centre a et de rayon r est :

$$S(a, r) = \bar{B}(a, r) \setminus B(a, r) = \{x \in X | d(x, a) = r\}$$

— Une partie $U \subset X$ est dite ouverte si :

$$\forall a \in U, \exists r > 0; B(a, r) \subset U$$

— Une partie $F \subset X$ est dite fermée si son complémentaire $F^c = X \setminus F$ est ouvert.

— Une partie $A \subset X$ est dite bornée si

$$\exists M > 0, \forall x, y \in A,\ d(x, y) \leq M$$

Remarque 1.4. Pour tout sous-ensemble B de E et pour tout $a \in E$ on note

$$a + B := \{a + x | x \in B\}$$

Alors on a $B(a,r) = a + B(0,r)$ et $\bar{B}(a,r) = a + \bar{B}(0,r)$. De plus on a toujours $B(a,r) \subset \bar{B}(a,r)$

Définition 1.9. Soit (X,d) un espace métrique, pour toute partie non vide A de X, et tout point $x \in X$, on définit la distance de x à l'ensemble A par

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

Proposition 1.4. *Soit (X,d) un espace métrique, $A \subset X$. Alors pour tout $x \in X$*

$$d(x,A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bar{A}$$

Démonstration. On a $d(x,A) = \inf_{y \in A.}(x,y)$, donc

$$\begin{aligned} d(x,A) = 0 &\Longleftrightarrow \inf\{d(x,y), y \in A\} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in A\ \ d(x,y) \leq \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, y \in A \text{ tel que } x \in B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow x \in \bar{A} \end{aligned}$$

□

Remarque 1.5. Si $d(x,A) = 0$, n'est pas nécessairement $x \in A$ avec A n'est pas fermé. Contre-exemple : $(\mathbb{R}, |.|)$ espace métrique. Soit $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$, $x = 0$, on a

$$\begin{aligned} d(x,A) &= \inf_{n \in \mathbb{N}^*} d(x, \frac{1}{n}) \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}^*} d(0, \frac{1}{n}) \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $d(x,A) = 0$ mais $0 \notin A$.

Définition 1.10. Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ est une fonction. On dit que f est continue en un point $a \in X$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.11. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite x dans l'espace métrique (X, d) si et seulement si on a

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} d(x_n, x) = 0$$

.

Si la limite d'une suite existe, elle est nécessairement unique.

Définition 1.12. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (X, d). On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle satisfait

$$\forall\ \varepsilon\ > 0\ ,\ \exists\ n_0\ \geq\ 0, \forall\ n\ \geq\ n_0\ ,\ \forall\ p\ \geq\ 0\ ,\ d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$$

Proposition 1.5. [9] *Dans un espace métrique (X, d) toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 1.13. Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.

1.2.2 Espases topologique

Définition 1.14. On appelle espace topologique un couple $(X, \mathcal{O})$ où X est un ensemble et $\mathcal{O}$ est un famille de partie de X, vérifiant :

1. X et $\emptyset \in \mathcal{O}$
2. Tout réunion d'ouverts est un ouvert.
3. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Définition 1.15. Un homéomorphisme est une bijection $f : E \to F$ continue tel que f^{-1} est continue.

Définition 1.16. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et soit $x \in X$. On appelle Voisinage de x dans X toute partie de X contenant un ouvert contenant x :

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(X), \exists O \in \mathcal{O}, x \in O \subset V\}$$

Définition 1.17. On appelle l'intérieur de A et on le note $\dot{A}$ est La réunion de tous les ouverts contenus dans A est aussi le plus grand ouvert contenu dans A.

Définition 1.18. On appelle la adhérence (ou fermeture) de A et on la note $\bar{A}$ L'intersection de tous les fermés contenant A est aussi le plus petit fermé qui contient A.

Définition 1.19. Une partie A est dite dense dans X si $\bar{A} = X$.

Exemple 1.1. l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.20. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est séparable s'il admet une partie dénombrable et dense.

1.2.3 Espaces connexes

Définition 1.21. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est connexe si :

1. Les seules parties de X à la fois ouverts et fermés sont X et $\emptyset$.
2. Il n'existe pas de couple (O_1, O_2) d'ouverts non vide de X qui sont dijoints de réunion égale à X.
3. Il n'existe pas de couple (F_1, F_2) des fermés non vide de X qui sont dijoints de réunion égale à X.

Proposition 1.6. *Une partie A de X est connex si et seulement si l'existance de deux ouverts dijoints O_1 et O_2 de $(X, \mathcal{O})$ tel que : $A \subset O_1 \cup O_2$ entraire $A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$*

Démonstration. Il existe deux ouverts O_1 et O_2 dijoints de $(X, \mathcal{O})$ tel que $A \subset O_1 \cup O_2$ et A connexe si $O_1' = A \cap O_1$ et $O_2' = A \cap O_2$ dijoints
Si $A \cap O_1 = A$ et $A \cap O_2 = \emptyset$ ou bien $A \cap O_1 = \emptyset$ et $A \cap O_2 = A$
Alors $A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$. □

Proposition 1.7. *Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $A \subset \mathbb{R}$ alors si A n'est pas intervalle alors A n'est pas connexe.*

Démonstration. A n'est pas intervalle, $\exists a, b \in A$ tel que : $[a, b] \not\subset A$
Si $c \in [a, b]$ et $c \notin A$
on pose

$$O_{1A} =]-\infty, c[\cap A \ et \ O_{2A} =]c, \infty[\cap A$$

tel que

$$O_{1A} \ \cap \ O_{2A} = \emptyset \ et \ O_{1A} \ \cup \ O_{2A} = A$$

donc A n'est pas connexe. □

Remarque 1.6. Les parties connexe dans $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème 1.1. *L'image d'un connexe par une application continue est connexe.*

Démonstration. Soit $f : E \to F$ une application continue, A partie connexe. Supposons $f(A)$ n'est pas connexe, $\exists O_1$ et $\exists O_1 \in \mathcal{T}_F$ tel que $f(A) \subset O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(O_1 \cup O_2) \subset f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$$

et de plus $f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = \emptyset$ (car $O_1 \cap O_2 = \emptyset$) alors $f^{-1}(O_1) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(O_2) \neq \emptyset$
Alors $\exists U_1 = f^{-1}(O_1), U_2 = f^{-1}(O_2) \in \mathcal{T}_F$ tel que $A \subset U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Donc A n'est pas connexe. (contradiction)
Alors $f(A)$ est pas connexe. □

Proposition 1.8. *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est connexe si est seulement si tout fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration. $(\Longrightarrow)$: on pose $(X, \mathcal{O})$ est connexe et on va montre que tout fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante :
on a $f : X \to \{0, 1\}$, alors $f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\})$ deux partitions ouverts dans X. Donc

$$f^{-1}(\{0\}) = X \quad \Longrightarrow f = 0 \ \ ou \ \ f^{-1}(\{1\}) = X \quad \Longrightarrow f = 1$$

D'où f est constante.

($\Longleftarrow$) : Suppsons que tout application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.

Si $(A, \complement A)$ est une partition d'ouverts alors la fonction caractéristique 1_A est continue sur X. Par hypothèse elle est donc constante et $A = X$ on $A = \emptyset$. Donc X est connexe. □

Définition 1.22. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle chemin de $x \in X$ à $y \in Y$ toute application continue $\gamma : [0,1] \to X$ tell que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Définition 1.23. On dit qu'une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arc si deux points quelconques de A peuvent être reliés par un chemin.

Théorème 1.2. *Un espace topologique connexe par arc est connexe.*

Démonstration. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique connexe par arc et soit $x \in X$ fixé. On peut ecrire $X = \bigcup\limits_{y \in X} \{y\} = \bigcup\limits_{\substack{\gamma \in c^0([0,1],X) \\ \gamma(0)=x}} \gamma([0,1])$

Or pour tout $\gamma \in c^0([0,1]\,, X)$ l'image $\gamma([0,1])$ est connexe. comme tout les chemin contiennent le point x l'union qui vaut X est connexe. □

Exemple 1.2. Dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble $\{(x, \sin(\frac{1}{x})), x > 0\}$ est connexe par arc, donc elle est connexe.

1.2.4 Espaces compacts

Définition 1.24. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

$$(X = \bigcup_{i \in I} O_i) \Rightarrow (\exists J \subset I, J \ finie\ , X = \bigcup_{i \in J} O_i)$$

Proposition 1.9. *Soit (X, d) un espace métrique et A est une partie de X.*

1. *A est compacte $\Longrightarrow$ A est fermée.*
2. *Si on suppose que X est compact alors on a l'équivalence*
   A est compacte $\Longleftrightarrow$ A est fermée.

Démonstration. 1. On veut montrer que A^c est ouvert. Soit donc b un point de A^c. Comme b n'est pas dans A, on a bien $\forall a \in A, d(a,b) > 0$. On a donc un recouvrement ouvert de A défini par

$$A \subset \bigcup_{a \in A} B(a, d(a,b)/2)$$

Comme A est compacte, on peut trouver un sous-recouvrement fini de se recouvrement ouvert, ce qui signifie qu'il existe $a_1 \dots a_N$ dans A tels que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{N} B(a_n, d(a_n,b)/2) \tag{1.1}$$

On pose maintenant $r = \min_{1 \leq n \leq N} d(a_n,b)/2$ il est clair que $r > 0$ et d'autre part on a $B(a_n, d(a_n,b)/2) \cap B(b,r) = \emptyset$, grâce à (1.1), on a bien montré que $B(b,r) \notin A$, ce qui est équivalent à dire que $B(b,r) \in A^c$.

Donc pour tout élément b de A^c, on a bien montré que A^c est ouvert et donc que A est fermé.

2. Supposons X compact et A fermé. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X qui recouvre A. Comme A est fermé, son complémentaire est ouvert et on a donc

$$X = A^c \cup (\bigcup_{i \in I} U_i)$$

Par compacité de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini de ce recouvrement ouvert), ce qui prouve que pour $J \subset I$ fini on a

$$X = A^c \cup (\bigcup_{i \in J} U_i)$$

ce qui prouve in fine que

$$A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$$

Donc A est compacte. □

Théorème 1.3. *(de Heine)*
Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques. Si X est compact et que $f : X \to Y$ est une fonction continue, alors elle est uniformément continue.

Proposition 1.10. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Démonstration. Soit (X,d) un espace métrique compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'union $\bigcup\limits_{x\in X} B(x, \frac{1}{n+1})$ est un recouvrement d'ouverts de X. On peut extraire un sous-recouvrement fini $\bigcup\limits_{k=0}^{N_n} B(x_{k,n}, \frac{1}{n+1})$. L'ensemble

$$\{x_{k,n}, k \in \{0....N_n\}, n \in \mathbb{N}\}$$

est alors un ensemble dense dénombrable dans X □

1.3 Espaces vectoriel normés

Définition 1.25. Soit E un espace vectoriel, on dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de E est génératrice de E si $E = vect(\mathcal{F})$ i. e :tout vecteur $\vec{u}$ de E est combinaison lineaire d'élement de $\mathcal{F}$.

Définition 1.26. On dit que E est de dimension finie si E admet une famille génératrice finie.

Définition 1.27. On dit que E est de dimension infinie s'il n'est pas de dimension finie, c'est-à-dire s'il n'existe pas de système fini de générateurs.

Exemple 1.3. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathcal{F} = (P_1, P_2.....P_n)$ une famille finie de $\mathbb{K}[X]$.
$\mathcal{F}$ peut-elle être génératrice de $\mathbb{K}[X]$?
Soit $d = max(deg(P_1), deg(P_2).....deg(P_n))$: c'est un nombre fini. Alors $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + ... + \lambda_d P_d$est de degré inférieur ou égal à d.
On remarque que $vect(\mathcal{F}) \subset \mathbb{K}_d[X] \neq \mathbb{K}[X]$. Par exemple $X^{d+1} \notin vect(\mathcal{F})$.
$\mathcal{F}$ n'est donc pas génératrice de $\mathbb{K}[X]$. Donc $\mathbb{K}[X]$ est un espace de dimension infinie.

Définition 1.28. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est appelée norme si et seulement si les propriétés suivants sont vérifies :

1. $\forall x \in E, N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in R, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3. $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Remarque 1.7. Si toutes les propriétés d'une norme sont vérifiées sauf l'exception (a), on dira qu'on a affaire à une semi-norme.

Définition 1.29. On appelle espace vectoriel normé (EVN) (resp. semi-normé) le couple (E, N) formé par un espace vectoriel et une norme (resp. semi-normé) N définie sur E. On utilise bien souvent la notation $\| \,.\, \|$ pour une norme.

Exemple 1.4.
1. l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ muni de l'application valeur absolue $x \longmapsto |x|$.
2. tout espace vectoriel euclidien $(E, < .,. >)$ muni de la norme $N(x) = \| x \| := \sqrt{< x, x >}$ est un EVN.
3. pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'espace vectoriel $E = C^{\infty}([a, b])$ muni de la norme :
$$\| f \|_{\infty} := \sup_{x \in [a;b]} |f(x)|$$
,
$$\| f \|_2 := \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$
ou encore de la norme :
$$\| f \|_1 := \int_a^b |f(x)| dx$$
est un espace vectoriel normé.

Définition 1.30. Soit E un espace vectoriel réel. Deux normesN_1 etN_2 sur E sont dite équivalentes ssi $\exists c, C > 0$ telle que
$$\forall x \in E, cN_1(x) \leq N_2 \leq CN_1(x)$$

Remarque 1.8. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note :
$$\| x \|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$$
$$\| x \|_2 := \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$$
$$\| x \|_{\infty} := max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$$

Proposition 1.11. *Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $\| x \|_1$, $\| x \|_2$ et $\| x \|_{\infty}$ sont équivalentes.*

Démonstration. On a $\forall\, x \in E$

1.

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &= \max(|x_1| \ldots\ldots |x_n|)\\ &= |x_j| \leq \sqrt{(x_1)^2 + \ldots\ldots (x_n)^2}\\ &\leq \|x\|_2\end{aligned}$$

donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

2.

$$\begin{aligned}\|x\|^2{}_2 &= (x_1)^2 + \ldots\ldots (x_n)^2\\ &\leq |x_1|^2 + \ldots\ldots\ldots |x_n|^2 + 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} |x_i|\,|x_j|\\ &= (|x_1| + \ldots\ldots\ldots |x_n|)^2 = \|x\|_1^2\end{aligned}$$

donc $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$

3.

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= |x_1| + \ldots\ldots\ldots + |x_n|\\ &\leq n\max(|x_1|, \ldots\ldots\ldots, |x_n|)\\ &\leq n\|x\|_\infty\end{aligned}$$

donc $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

d'où $\quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ □

Définition 1.31. (E, N) espace vectoriel normé. Soit $(u_k)_{k\in N}$ une suite dans E et $\ell \in E$. On dit que la suite $(u_k)_{k\in N}$ converge vers ℓ pour la norme N si et seulement si

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} N(u_k - \ell) = 0$$

Définition 1.32. Soit (E, N) et (E', N') deux evn. Soit A un sous-ensemble de E et $f : A \to E'$ une application. Soit $x_0 \in A$, on dit que f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in A, N(x - x_0) < \alpha \Rightarrow N'(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon.$$

Définition 1.33. Soit $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés, f une application de E dans F. On dit que l'application f est Lipschitzienne de rapport $k > 0$ si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2 : \|f(x - y)\| \leq k \|x - y\| .$$

Corollaire 1.1. *Si E est un espace normé de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \to F$ dans un espace normé est continue.*

Démonstration. Soit (e_i) une base de E. Munissons E et F de leur $\|.\|_1$ respective. On a f étant linéaire :

$$\forall x \in E : \|f(x)\|_1 = \left\| f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \right\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right\|_1$$

D'après l'inégalité triangulaire :$\left\| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \right\|_1 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(e_i)\|_1$

Et en posant $M = \sup\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} \{\|f(e_i)\|_1\}$, il vient que : $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(e_i)\|_1 \leq M \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

D'où finalement : $\forall x \in E \quad \|f(x)\|_1 \leq M \|x\|_1$

D'où : $\forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x - y)\|_1 \leq M \|x - y\|_1$

et comme f est linéaire :$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|f(x) - f(y)\|_1 \leq M \|x - y\|_1$

Donc f est M-lipschitzienne sur E donc continue sur E par rapport à la norme $\|.\|_1$ donc par rapport à tout norme de E. $\square$

Théorème 1.4. *(Théorème de Riesz, 1918) Si un espace normé E possède une boule compacte $B(x_0, r)$ de rayon $r > 0$ alors il est de dimension finie.*

Démonstration. Pour montrer le théorème en introduit le lemme suivant :

Lemme 1.1. *(Lemme de Riesz) Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace normé E, qui n'est pas E tout entier. Alors, pour tout nombre δ tel que $0 < \delta < 1$, il exist $x \in E$ tel que :*

$$\begin{cases} \|x\| &= 1 \\ dis(x, F) &\geq 1 - \delta \end{cases}$$

Soit E un espace normé de dimension infinie. Fixons un nombre $\delta \in]0, 1[$; par exemple $\delta = 1/2$. Partons d'un $x_1 \in E$, de norme 1, et prenons pour F le sous-espace vectoriel F_1

engendré par x_1 Comme il est de dimension 1, il est fermé, et n'est pas égal à E, puisque E est de dimension infinie. Le lemme donne un de $x_2 \in E$ norme 1 tel que :

$$\|x_2 - x_1\| \geq dis(x_2, F_1) \geq 1/2$$

Prenons ensuite pour F le sous-espace vectoriel F_2 engendré par x_1 et x_2 Il est de dimension 2 (car $x_2 \neq F_1$) et est donc fermé, et différent de E, il existe donc $x_3 \in E$ de norme 1 tel que :

$$\|x_3 - x_1\| \, et \, \|x_3 - x_2\| \geq dis(x_3, F_2) \geq 1/2$$

Comme E est de dimension infinie, on peut itérer le procédé indéfiniment. On obtient une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ de vecteurs de norme 1 telle que :

$$\|x_k - x_l\| \geq 1/2 \; \forall k \neq l$$

Cette suite ne peut avoir aucune sous-suite convergente. Comme elle est contenue dans la boule-unité de E, cette boule n'est pas compacte. $\square$

Théorème 1.5. *Soient*$(E_1, \| \, . \, \|_{E_1})$, $(E_2, \| \, . \, \|_{E_2})$ *et* $(F, \| \, . \, \|_F)$ *trois espaces vectoriels normés et* $T : E_1 \times E_2 \to F$ *une application bilinéaire. On a l'équivalence entre*

1. *T est continue sur $E_1 \times E_2$.*
2. *T est continue en 0.*
3. *Il existe $M > 0$ tel que*

$$\| \, T(X) \, \|_F \leq M \, \| \, X \, \|_{E_1 \times E_2}, \forall X \in E_1 \times E_2$$

Définition 1.34. On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

Exemple 1.5. L'espace $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach, avec L^1 l'espace des fonctions mesurable intégrable.

1.4 Espase de Hilbert

Définition 1.35. Soit E un espace vectoriel. Une application $(.,.) : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée produit scalaire sur E si elle vérifie :

1. Symétrie :

$$(x, y) = (y, x), \forall x, y \in E$$

2. Bilinéarité :

$$(x + \lambda y, z) = (x, z) + \lambda(y, z), \forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Définie positive :

$$(x, x) > 0, \forall x \in E, x \neq 0$$

On dit que $(E, (.,.))$ est un espace préhilbertien. Si E est de dimension finie, on dit aussi : espace euclidien.

Exemple 1.6. i) L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ est un espace de Hilbert réel.

ii) L'espace $\mathbb{C}^n$ muni de la produit scalaire $\langle z, z'\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z_k'}$ est un espace de Hilbert complexe.

Proposition 1.12. *(Inégalité de cauchy-Schwarz)*
Soit $(E, (.,.))$ un espace préhilbertien. Pour tout $x \in E$, on note

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}.$$

On a alors l'inégalité de cauchy-schwarz

$$|(x, y)| \leq \| x \| \| y \|, \forall x, y \in E$$

Définition 1.36. Un espace de Hilbert E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui complet pour la norme.
Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet.

Définition 1.37. (Base hilbertienne)
Soit H un espace de Hilbert. Un systeme $S = (e_n)_{n\geq 1} \subset H$est appelé Base hilbertienne de H, si elle est vérifie :

i) S est orthonormée, i. e. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \forall i, j \geq 1$.
où
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

ii) l'espace vectoriel engendré par S est dense dans H.

Théorème 1.6. *Soit H un espace de Hilbert. Alors on a l'équivalence : H est séparable si et seulement si H admet une base hilbertienne.*

Démonstration. On note que si H admet une base hilbertienne $\{e_j, j \in J\}$ alors $F = vect\{e_j, j \in J\}$ est dénombrable et donc H est séparable.
Réciproquement, si on note $D = \{e_j, j \in \mathbb{N}\}$ le sous-ensemble dense dans H, et si $H_k = vect\{e_j, 0 \leq j \leq k\}$, alors $H_1 \subset H_2 \subset .... \subset \bigcup\limits_{k \geq 1} H_k = F$. On peut choisir une base orthonormée de H_1 qu'on complète pour avoir une base orthonormée de H_2 et ainsi de suite. Vu que F est dense dans H, on déduit que c'est une base hilbertienne de H. $\square$

1.5 Théorème fondamentale

Théorème 1.7. *[8](Théorème de Hahn-Banach-Forme analytique)*
Soient E un espace vectoriel réel, et $P : E \to \mathbb{R}$ une application vérifier :

$$\forall x, y \in E : P(x + y) \leq P(x) + P(y)$$
$$\forall x \in E, \forall t \geq 0 : P(tx) = tP(x)$$

Si F est un sous-espace de E, et f est une forme linéaire sur F telle que :

$$\forall x \in E, f(x) \leq P(x)$$

il existe un prolongement linéaire $\widetilde{f}$ de f sur E tel que :

$$\forall x \in E, \widetilde{f}(x) \leq P(x)$$

Théorème 1.8. *[8](Théorème de l'application ouverte)*
Soient E et F deux espaces de Banach, et T un opérateur linéaire continu de E dans F. Si T est surjectif, alors T envoie les ouverts de E sur les ouverts de F.

Théorème 1.9. *(Théorème d'isomorphisme de Banach)*
Soient E et F deux espaces de Banach. Si T est un opérateur linéaire continue bijectif de E dans F. Alors T^{-1} isomorphisme.

Démonstration. Il est clair que T^{-1} est linéaire bijectif, il suffie de montre que T^{-1} est continue.
Soit U un ouvert de E, on a $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ et comme T est linéaire continue surjectif, donc d'après Théorème d'application ouverte $T(U)$ est ouvert.
Donc T^{-1} est continue. D'où T^{-1} est isomorphisme. $\square$

Théorème 1.10. *(Théorème du graphe fermé)*
Soient E et F deux espaces de Banach, et T un opérateur linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si son graphe $G = \{(x, Tx)|x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$

Démonstration. $(\Longrightarrow)$: On a $G_T = \{(x, y)x \in E, y = Tx\} \subset E \times F$
En effet soit $((x_n, T(x_n)))_n$ une suite dans G_T qui converge dans $E \times F$ vers (x, y) tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$
$y = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ car T est continue.
Donc $y = T(x)$, alors $(x, y) \in G_T$ d'où G_T est fermé.
Réciproquement, supposons que G_T est fermé. Alors comme E et F sont de Banach et G_T également en tant que sous espace fermé de $E \times F$.
Notons

$$\begin{array}{rlcl} \text{p}: & G_T & \to & E \\ & (x, y) & \to & p(x, y) = x \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rlcl} \text{q}: & G_T & \to & F \\ & (x, y) & \to & q(x, y) = y \end{array}$$

les restrictions des applications projections $(x, y) \to x$ et $(x, y) \to y$ à G_T. Alors on a par construction même p est bijective et $T = qop^{-1}$
comme la projection sur E et F sont continue, les restrictions à G_T que sont p et q les sont aussi et par théorème d'isomorphisme de Banach, p^{-1} continue aussi, donc $T = qop^{-1}$ est continue. $\square$

Chapitre 2

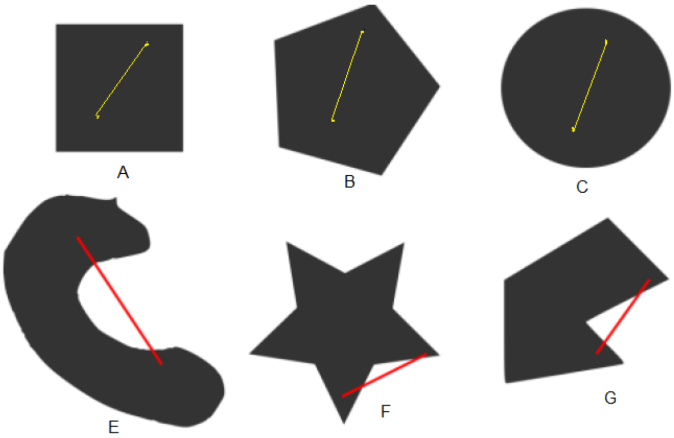
Les fonctions convexes

Dans ce chapitre, nous introduisons les ensembles convexes et les fonctions convexes, et les relations entre les deux concepts sont discutées. L'accent est mis sur l'établissement de critères pour la convexité. A propos des ensembles convexes ,citons J. J Moreau :"La mécanique semble être le premier domaine scientifique où l'on ait fait un usage précis du concept d'ensemble convexe. Il s'agissait de formuler la condition d'équilibre ,dans le champ de la pesanteur d'un solide posé sur un plan horizontal : cette condition ,assez anciennement connue (17 ème siècle semble-t-il) et que la verticale du centre de gravité rencontre l'enveloppe convexe de l'ensemble des points d'appui. "
Voir référence principale [4],[5],[6] et [16].

2.1 Les ensembles convexes

2.1.1 Motivation

Soit les ensembles A,B,C,E,F,G défini sur un plan usulle. On remarque que pour tout deux points x et y des ses ensembles A,B,C, le segment $[x,y]$ est inclue dans ses ensemble. Mais dans les ensembles E,F,G cette propriété n'est pas toujours vérifier. les ensembles qui ont vérifier cette propriété sont appelés des ensembles convexes.



2.1.2 Définitions et propriétés

Dans tout ce travaille, E est un espace vectoriel réel.

Définition 2.1. Soit x et y deux points de E. Le segment entre x et y noté $[x,y]$ est définit par :

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty, t \in [0,1]\}.$$

Définition 2.2. Un sous ensemble K de E est dit convexe si pour tout $x, y \in K$ le segment $[x,y]$ est inclus dans K. Donc il vient que :

$$[K \textit{ est un ensemble convexe}] \Leftrightarrow [\forall\ x\ ,y\ \in K\ , \forall\ t \in [0,1] :\ tx + (1-t)y \in K].$$

Exemple 2.1. Si on prend $E = \mathbb{R}^2$.

1. L'ensemble K telle que $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0\}$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$ car :

   Si on prend $x = (x_1,y_1)$ et $y = (x_2,y_2)$ $t \in [0,1]$ il vient que

$$\begin{cases} x \in K \Leftrightarrow x_1 + y_1 \geq 0 \\ y \in K \Leftrightarrow x_2 + y_2 \geq 0 \end{cases}$$

   Alors

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y =& (tx_1,ty_1) + ((1-t)x_2,(1-t)y_2) \\ =& (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \end{aligned}$$

et comme $tx_1 + (1-t)x_2 + ty_1 + (1-t)y_2 = t(x_1 + y_1) + (1-t)x_2 + y_2 \geq 0$ donc $tx + (1-t)y \in K$,d'où K est convexe de $\mathbb{R}^2$.

2. L'ensemble K telle que $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas convexe de $\mathbb{R}^2$ car :
   Si on prend $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$ $t = 1/2$ il vient que
$$tx + (1-t)y = (1/2,0) + (0,1/2) = (1/2,1/2)$$
   et $(1/2,1/2) \notin K$ car $(1/2)^2 + (1/2)^2 \neq 1$
3. Le cylinder circulaire droit $C = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_{n+1} \in \mathbb{R} \ , \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ est un convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$. En effet ,soient x et y des éléments de C et soit $t \in [0,1]$. On obtient :
$$\begin{aligned}(tx_1 + (1-t)y_1)^2 + ... + (tx_n + (1-t)y_n)^2 &= t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2t(1-t) \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &\leq t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2t(1-t) \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|,\end{aligned}$$
   d'après inégalité de cauchy-schwarz
$$\begin{aligned}&\leq t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &+ 2t(1-t) \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &\leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1.\end{aligned}$$

Définition 2.3. On dit que un sous ensemble A de E est un sous espace affine s'il contient toutes les droites passants par deux point
$$\forall \ x,y \in A, (x,y) \subset A \ , \ (x,y) = \{tx + (1-t)y, t \in \mathbb{R}.\}$$

Remarque 2.1. D'après la définition il vient que tout sous espace affine est un ensemble convexe de E.

Proposition 2.1. *Une combinaison linéaire de convexes est un convexe.*

Démonstration. Soient C_1 et C_2 des convexes, $x_1,x_2 \in C_1$, $y_1,y_2 \in C_2,\lambda \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$. On a :

$$t(x_1 + y_1) + (1-t)(x_2 + y_2) = tx_1 + (1-t)x_2 + ty_1 + (1-t)y_2 \in C_1 + C_2$$

et

$$t\lambda x_1 + (1-t)\lambda x_2 = \lambda(tx_1 + (1-t)x_2) \in \lambda C_1$$

ce qui montre que $(C_1 + C_2)$ et λC_1 sont convexes. □

Proposition 2.2. *Si C, C_1 et C_2 sont des convexes alors on a :*

1. *pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ ‘,‘ $\lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$.*
2. *pour tout $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ‘,‘ $(\lambda + \mu)C = \lambda C + \mu C$.*

Démonstration. 1. L'égalité $\lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$ est évident.

2. L'inclusion $(\lambda+\mu)C \subset \lambda C + \mu C$ est facile. On montrer que $\lambda C + \mu C \subset (\lambda+\mu)C$. Le cas où $\lambda = \mu = 0$ est trivial. On peut supposer que l'un des coefficients n'est pas nul ,$x_1,x_2 \in C$ alors :

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda+\mu)(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x_1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}x_2)$$

D'après la convexité de C on a : $(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x_1 + \frac{\mu}{\lambda+\mu}x_2) \in C$ □

Proposition 2.3. *Soient $E_1,\ldots,E_m$ des espaces de Banach et $C_1,\ldots,C_m$ des convexes de E_1,...,E_m respectivement. Alors $C_1 \times \cdots \times C_m$ est un convexe de $E_1 \times \cdots \times E_m$.*

Théorème 2.1. *soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. Alors toutes les boules (fermés, ouverts) sont des ensembles convexes.*

Démonstration. On a $\bar{B}(x_0,r) = \{x \in E/\|x - x_0\| \leq r\}$.
Soit $x,y \in \bar{B}(x_0,r), \forall t \in [0,1]$,on montre que $tx + (1-t)y \in \bar{B}(x_0,r)$.
Il suffit de montre que $\|x_0 - tx - (1-t)y\| \leq r$.

Or :

$$\begin{aligned}\|x_0 - tx - (1-t)y\| &= \|x_0 - tx - (1-t)y - tx_0 + tx_0 - (1-t)x_0 + (1-t)x_0\| \\ &\leq \|t(x_0 - x) + (1-t)(x_0 - y)\| \\ &\leq t\,\|x_0 - x\| + (1-t)\,\|x_0 - y\| \\ &\leq tr + (1-t)r \leq r.\end{aligned}$$

Donc $\bar{B}(x_0,r)$ est convexe. □

Proposition 2.4. *Tout intersection des ensembles convexes est convexe.*

Démonstration. On note $G = \cap K_i$ avec K_i est un ensemble convexe de E.

Pour montrer que G est convexe il suffit de montrer que :

$\forall\ x,y\ \in\ G\ ,t \in [0,1]\ : tx + (1-t)y \in G$

Soint $x,y\ \in\ G$, $t \in [0,1]$ alors

$$\begin{cases} x \in G \\ y \in G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \bigcap\limits_{i\in I} K_i \\ y \in \bigcap\limits_{i\in I} K_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in K_i \forall i \in I \\ y \in K_i \forall i \in I \end{cases}$$

Donc $tx + (1-t)y \in K_i,\quad \forall i \in I \Rightarrow tx + (1-t)y \in \bigcap\limits_{i\in I} K_i$

D'où $tx + (1-t)y \in G$. Alors G est convexe. □

Remarque 2.2. L'union des ensembles convexes n'est pas forcement convexe.

Contre exemple :

Prenons : $B_1 = B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$

et $B_2 = B((3,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$

on a $B_1 \cup B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - 6x + 8 \leq 0\}$

On a $(0,0)$ *et* $(3,0) \in B_1 \cup B_2$,alors si on prend $t = \frac{1}{2}$, il vient que

$$\frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(3,0) = (\frac{3}{2},0) \notin B_1 \cup B_2$$

Donc $B_1 \cup B_2$ n'est pas convexe.

Proposition 2.5. *Soit E un espace vectoriel normé et C un ensemble fermé de E. Si C vérifiant la propriété de " demi-somme " suivante : $\forall x,y \in C,\quad \frac{x+y}{2} \in C$. Alors C est convexe.*

Démonstration. C est convexe $\Leftrightarrow$ pour tout $x_1, x_2 \in C$ le segment $[x_1, x_2] \subset C$
Montrons que $\forall x_1, x_2 \in C, \forall x \in [x_1, x_2], x \in C$.
Comme $x \in [x_1, x_2]$, alors $x \in [x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}]$ ou bien $x \in [\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2]$ et on le note $[x_1^1, x_2^1]$ l'un des deux segments qui contient x. On construire la suite x^n suivant :

$$[x_1^1, x_2^1]\ ,\ [x_1^2, x_2^2], \ldots, [x_n^n, x_{n+1}^n] \qquad \text{où}\ \ x_{n+1} = \frac{x_n + \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}}{2}$$

. Alors

$$x \in [x_n^n, x_{n+1}^n] \subset \ldots [x_1^1, x_2^1] \subset [x_1, x_2]$$

$$\lim_{n \to \infty} x_1^n = \lim_{n \to \infty} x_2^n = x$$

Mais grâce à la propriété de "demi-somme" de C, toutes les extrémités x_1^n, x_2^n sont dans C. Comme C est fermé, alors la limite x est dans C. $\square$

Enveloppe convexe

Etant donné un sous-ensemble A de X, l'espace X est un convexe contenant A. De plus, l'intersection de convexes contenant A étant convexes contenant A, on peut poser la définition suivante :

Définition 2.4. Soit A une partie de E. On appelle enveloppe convexe de A noté $conv(A)$ l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A.
Autre notes : $conv(A) = \bigcap\limits_{A \in K} K$ et K convexe.

Exemple 2.2. Si $A = \{a,b\}$, alors $conv(A) = [a,b]$.
Si $A = \{a,b,c\}$, alors $conv(A)$ est le triangle abc.

Définition 2.5. Soit A une partie de E. On appelle envelope affine de A noté $aff(A)$ l'intersection de tous les ensembles affines contenant A.
Autre notes : $aff(A) = \bigcap\limits_{A \in K} K$ et K affine.

Définition 2.6. Un ensembles convexe K de E est stable par combinaison convexe si $\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$, $\forall\ t_1, t_2, \ldots t_n \in \mathbb{R}$ tell que $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$
Alors $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \in K$

Corollaire 2.1. *Soit A une partie dans un espace vectoriel réel E. Alors A est un ensemble convexe ssi il contient toutes les combinaison convexe de ses éléments.*

Démonstration. 1. A convexe $\Rightarrow$ A contient toutes les combinaison convexe de ses éléments.

Il suffit de montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \in A \ / \ x_i \in A \ ,t_i > 0 \ , \ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1\}$

Par rcurrence :

pour $n = 1,x_1 \in A,t_1 = 1$ on a $\sum\limits_{i=1}^{1} t_i x_i = x_1 \in A$.

On suppose que $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \in A$ et montrons que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i x_i \in A$

comme $\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i = 1$ donc l'une de $t_i \neq 1$ alors on suppose que $t_1 \neq 1$ on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = t_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n+1} t_i x_i = t_1 x_1 + (1 - t_1) \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{(1 - t_1)} t_i x_i$$

Alors $\sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{1}{(1 - t_1)} t_i x_i \in A$ car $x_i \in A$ *et* $\sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{1}{(1 - t_1)} t_i = 1$ d'après l'hypothèse de rcurrence. $\sum\limits_{i=1}^{n+1} t_i x_i = t_1 x_1 + (1 - t_1) \sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{1}{(1 - t_1)} t_i x_i \in A$.

D'où A contient toutes les combinaison convexe de ses éléments.

2. A contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments $\Rightarrow$ A convexe.

   Soit $x,y \in A$ et $t \in [0,1]$ alors $tx + (1 - t)y \in A$ car t et $(1 - t) \in \mathbb{R}^+$ et $t + 1 - t = 1$ donc A convexe. □

Théorème 2.2. *Soit A une partie de E. Alors $conv(A)$ est égale à l'ensemble de tout les combinaisons convexes des éléments de A.*

Autrement :

$$conv(A) = \{x \ / \ x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ , \ x_i \in A \ ,t_i \in \mathbb{R}_+ \ , \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}$$

Démonstration. On veut montrer que : $conv(A) = \{x \ / \ x = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i \ , \ x_i \in A \ ,t_i \geq 0 \ , \ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1\}$

On sait que l'ensemble de tout les combinaisons convexes des éléments de A est un convexe contient A.

et comme $conv(A)$ est le plus petit convexe contient A alors :

$$conv(A) \subseteq \{x \ / \ x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ , \ x_i \in A \ ,t_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\}$$

D'autre part $conv(A)$ est un ensemble convexe donc d'après corollaire (2.1) il contient les combinaisons convexes des ses éléments, et comme $A \subset conv(A)$ il vient que $conv(A)$ contient tout les combinaisons convexes d'éléments de A.
d'où

$$\{x \ / \ x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ , \ x_i \in A \ ,t_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\} \subseteq conv(A)$$

. Donc le resultat. □

Définition 2.7. Soit E est un espace vectoriel réel, et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est afinements independantes si et seulement si :

$$\forall \ i \in I \ , \ x_i \notin \mathit{aff}\{x_j \ / \ j \in I - \{i\}\}$$

.

Définition 2.8. On appelle dimension d'un ensemble convexe K dans un espace vectoriel réel E la dimension d'espace affine engendrée par K.
D'autre part : $\dim_{\mathbb{R}} K = \dim_{\mathbb{R}} \mathit{aff} \ \langle K \rangle$.

Définition 2.9. On appelle Simplexe de dimension n dans un espace vectoriel réel E, tout enveloppe convexe de $(n+1)$ points affinements independantes de E.

Exemple 2.3.
1. un Simplexe de dimension 1 c'est l'enveloppe convexe de 2 points affinements independantes. Donc c'est le segement.
2. un Simplexe de dimension 2 c'est l'enveloppe convexe de 3 points affinements independantes. Donc c'est un triangle.

2.1.3 Théorème de carathéodory

Théorème 2.3. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et A une partie non vide de E.*

Alors pour tout $x \in conv(A)$:

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \ \ / \ t_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1, \forall \ x_i \in A$$

.

Démonstration. Soit $x \in conv(A)$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tell que :

$$x = \sum_{i=1}^{p} t_i x_i \ \ | \ \ t_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{p} t_i = 1, \forall \ x_i \in A$$

1. Si $p \leq n+1$ on a :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{p} t_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \ / \ t_i = 0 \ \ pour \ \ p+1 \leq i \leq n+1. \end{aligned}$$

   Donc le problème est resolu.

2. Si $p > n+1$ donc $p-1 > n = dimE$

   donc la famille $(x_i - x_1)_{2 \leq i \leq p}$ est liée dans E.

   donc il existe des α_i $(2 \leq i \leq p)$ tels que

$$\sum_{i=2}^{p} \alpha_i (x_i - x_1) = 0 \ / \ \exists \ i_0 \ , \ 2 \leq i_0 \leq p \ \ , \alpha_{i_0} \neq 0$$

   Posons maintenent $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^{p} \alpha_i$ *donc* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$

   car

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i = -\sum_{i=2}^{p} \alpha_i + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i = 0$$

   pour montrer que $x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i$ il suffit de montrer que

   $x = \sum_{i=1}^{p-1} t_i x_i$ (et par reccurence attenidre l'ordre n+1),

   pour ecrire $x = \sum_{i=1}^{p-1} t_i x_i$ on a $x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$,

   car

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i &= \alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i \\ &= -\sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i \\ &= \sum_{i=2}^{p} \alpha_i (x_i - x_1) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part :

pour $x \in conv(A)$ on a :

$$\forall\ t \in \mathbb{R}\ :\ \sum_{i=1}^{p}(t_i + t\alpha_i)x_i = x$$

. Car

$$\sum_{i=1}^{p}(t_i + t\alpha_i)x_i = \sum_{i=1}^{p}t_ix_i + t\sum_{i=1}^{p}\alpha_ix_i = x \quad et\ (t\sum_{i=1}^{p}\alpha_ix_i = 0).$$

Maintentent comme $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i = 0$ donc $\exists\ j \in \{1,2,...,p\}$ tel que $\alpha_i < 0$.

On pose $A = \{\frac{-t_i}{\alpha_i}\ /\ i = 1,2,...,p\ ;\ \alpha_i < 0\}$

A ademt un borne inferieur. Donc on pose $T = min\{\frac{-t_i}{\alpha_i}\ /\ \alpha_i < 0\ ,\ 1 \leq i \leq p\}$

Si on pose $\lambda_i = t_i + T\alpha_i$ il vient que $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i = 1$. car on a :

(a) $\lambda_i \geq 0$ car $T \leq \frac{-t_i}{\alpha_i}$ il vient que $T\alpha_i \geq -t_i$ avec $\alpha_i < 0$
donc $t_i + T\alpha_i \geq 0$. Alors $\lambda_i \geq 0$.

(b) on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i &= \sum_{i=1}^{p}(t_i + T\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p}t_i + T\sum_{i=1}^{p}\alpha_i = \sum_{i=1}^{p}t_i = 1.\end{aligned}$$

Finalement

comme $T = min\{\frac{-t_i}{\alpha_i}\}$ alors $\exists\ j\ \in \{1,2,...,p\}$ tel que $T = \frac{-t_j}{\alpha_j}$

donc $\lambda_j = t_j - \frac{t_j}{\alpha_j}\alpha_j = 0$

Alors $x = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{p}\lambda_ix_i = \sum_{i\in\{1,...,p-1\}}\lambda_ix_i$

On fait la même técnique pour avoir $p-2, p-3, ...; n+1$. de nombre d'opération égale $(p-(n+1)-1) = p-n$ opération. $\square$

Proposition 2.6. *(Application de Théorème) Soit E un espace normé de dimension n ,et A une partie compacte de E. Alors $conv(A)$ est compacte.*

Démonstration. 1. Si $A = \emptyset$ donc $conv(A) = \emptyset$, d'où le rérultat est vérifier.

2. Si $A \neq \emptyset$
comme $dimE = n$ d'après théorème de caratheodory : $\forall x \in conv(A)$, $x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \ / \ t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1, \forall\ x_i \in A$
On pose

$$\begin{array}{llll} \Phi : & E^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} & \to & \text{E} \\ & (x_1 \ldots x_{n+1}),(t_1 \ldots t_{n+1}) & \to & \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \end{array}$$

Φ est une fonction continue car elle est bilinéaire d'après corollaire (1.1).
D'autre part :
Posons : $\Delta^{n+1} = \{(t_1,t_2,....,t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \ t_i \geq 0\}$.
il vient que Δ^{n+1} est compacte dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (car il est fermé et borné).
Donc $A^{n+1} \times \Delta^{n+1}$ est un ensemble compacte dans $E^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ car il est le produit cartisien de deux compactes.
Finalement :
Comme Φ est continue et $A^{n+1} \times \Delta^{n+1}$ est compacte ,alors $\Phi(A^{n+1} \times \Delta^{n+1})$ est compacte, mais

$$\Phi(A^{n+1} \times \Delta^{n+1}) = \{\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \ / \ t_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1, \forall\ x_i \in A\} = conv(A)$$

. D'où $conv(A)$ est compacte. □

2.1.4 Propriétés topologiques des convexes

Intérieur et adhérence d'un convexe

Proposition 2.7. *L'intérieur et l'adhérence d'un convexe C est convexe.*

Lemme 2.1. *Soient $B(x_0,r_0)$ et $B(x_1,r_1)$ deux boules dans un espace vectoriel normé. Alors $(1-t)B(x_0,r_0) + tB(x_1,r_1) = B(tx_1 + (1-t)x_0, tr_1 + (1-t)r_0)$*

Démonstration. (Démonstration de Lemme)
Soit $z \in (1-t)B(x_0,r_0) + tB(x_1,r_1)$, alors $z = (1-t)x + ty$ avec $x \in B(x_0,r_0)$ et

$y \in B(x_1,r_1)$.
On montre que $z \in B(tx_1 + (1-t)x_0, tr_1 + (1-t)r_0)$
i. e. $\|z - (1-t)x_0 - tx_1\| \leq (1-t)r_0 + tr_1$.
Alors

$$\begin{aligned}
\|z - (1-t)x_0 - tx_1\| &= \|(1-t)x + ty - (1-t)x_0 - tx_1\| \\
&= \|(1-t)(x - x_0) + t(y - x_1)\| \\
&\leq (1-t)\,\|(x - x_0)\| + t\,\|y - x_1\| \\
&\leq (1-t)r_0 + tr_1.
\end{aligned}$$

D'autre part on a : $B(x,r) = x + B(0,r)$

$$\begin{aligned}
(1-t)B(x_0,r_0) + tB(x_1,r_1) &= (1-t)(x_0 + B(0,r_0)) + t(x_1 + B(0,r_1)) \\
&= (1-t)x_0 + (1-t)B(0,r_0) + tx_1 + tB(0,r_1) \\
&= ((1-t)x_0 + tx_1) + (1-t)B(0,r_0) + tB(0,r_1) \\
&= ((1-t)x_0 + tx_1) + B(0,(1-t)r_0 + tr_1).
\end{aligned}$$

Donc $(1-t)B(x_0,r_0) + tB(x_1,r_1) = B(tx_1 + (1-t)x_0, tr_1 + (1-t)r_0)$. □

Démonstration. (Démonstration de Proposition)

1. A convexe $\Longrightarrow \dot{A}$ est convexe.
   Soient $x,y \in \dot{A}$ donc
   $$\begin{cases} \exists\, r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset A \\ \exists\, r' > 0 \text{ tel que } B(y,r') \subset A \end{cases}$$
   si $t \in [0,1]$ il vient que $(1-t)B(x,r) + tB(y,r') \subset A$ *car* A *convexe*
   On montere que $(1-t)x + ty \in \dot{A}$ i. e. $\exists R > 0$ *tell que* $B((1-t)x + ty, R) \subset A$
   Alors d'après le lemme précédant on a :
   $(1-t)B(x,r) + tB(y,r') = B((1-t)x + ty, (1-t)r + tr') \subset A$
   il suffit de prende $R = (1-t)r + tr'$
   D'où $(1-t)x + ty \in \dot{A}$. Alors $\dot{A}$ est convexe.
2. A convexe $\Longrightarrow \bar{A}$ est convexe.
   Soient $x,y \in \bar{A}$ donc il existe deux suites (x_n), (y_n) d'éléments de A tell que

$\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y$

Alors $(1-t)x_n + ty_n \in A$ car A est convexe, et comme $A \subset \bar{A}$ il vient que $(1-t)x_n + ty_n \in \bar{A}$ et comme $\bar{A}$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} [(1-t)x_n + ty_n] = (1-t)x + ty \in \bar{A}$$

Donc $\bar{A}$ est convexe. $\square$

Proposition 2.8. *Soit E un espace vectoriel normé et $C \subset E$ un convexe d'intérieur non vide. Alors, pour tout $x \in \dot{C}$ et $y \in \bar{C}$, on a :*

$$[x,y[:= \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \dot{C}$$

Démonstration. Comme $x \in \dot{C}$ alors $\exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset C$.

Nous commençons par établir le resultat lorsque le point y est dans C. soit $t \in [0,1]$ et $x_t = (1-t)x + tz, r_t = (1-t)r$ le lemme (2.1) donne l'inclusion

$$B(x_t,r_t) \subseteq C$$

pour $t \in [0,1]$,et comme $r_t > 0$,lorsque $t < 1$ on trouve $x_t \in \dot{C}$.

dans le cas générale ,on note (y_n) une suite de point de C qui converge vers y,et $x_t^n = (1-t)x + ty_n, \forall n$ on a l'inclusion suivant

$$B(x_t^n,r_t) \subseteq C$$

par passage à l limite lorsque $n \to \infty$ on obtient l'inclusion $B(x_t,r_t) \subseteq C$, donc $x_t \in \dot{C}$ $\square$

Corollaire 2.2. *Soit E un espace vectoriel normé et $C \subset E$ un convexe d'intérieur non vide. Alors*

(i) $\bar{\dot{C}} = \bar{C}$

(ii) $\dot{C} = \dot{\bar{C}}$

Démonstration. (i) Comme $\dot{C} \subseteq C$ alors ona $\bar{\dot{C}} \subseteq \bar{C}$.

Il reste donc la réciproque : soit x un point dans $\bar{C}$ et $y \in \dot{C}$ (C d'un intérieur non vide).

Alors d'après la proposition (2.8) on a : $x_t = (1-t)y + tx \in \dot{C}$, par passage à la limite lorsque $t \to 1$ on obtient $x \in \bar{\dot{C}}$.

(ii) Comme $C \subset \bar{C}$,il est clair que $\dot{C} \subset \dot{\bar{C}}$.
Réciproquement : soit $z \in \dot{\bar{C}}$ alors il existe $r > 0$ tel que $\bar{B}(z,r) \subset \bar{C}$, et soit $x \in \dot{C}$ tel que $x \neq z$,choisissons $t > 0$ tel que : $t\|x - z\| \leq r$
donc $z-t(x-z) \in \bar{B}(z,r)$, et $z-t(x-z) \in \bar{C}$,et comme $x \in \dot{C}$ on prend l'intervalle $[x,z - t(x - z)[\subset \dot{C}$ puisque $z \in [x,z - t(x - z)[$, d'où $z \in \dot{C}$. □

Intérieur relatif et dimension

En analyse convexe, on rencontre souvent des ensembles convexes dont l'intérieur est vide : c'est le cas d'un segment dans $\mathbb{R}^2$. La notion d'intérieur relatif permet de donner un sens à l'idée intuitive que l'intérieur d'un segment $[x,y] \subseteq \mathbb{R}^2$ est l'intervalle ouvert $]x,y[= \{(1 - t)x + ty/0 < t < 1\}$ Cette notion est le plus souvent utilisée lorsque l'enveloppe affine du convexe que l'on considère est de dimension finie. .

Définition 2.10. Soit X un ensemble dans un espace vectoriel normé E,L'intérieur relatif de X noté $r_i(X)$ est l'interieur de X dans l'espace $(aff(X), \|.\|)$ où :

$$r_i(X) = \{x \in X, \exists r > 0, B(x,r) \cap aff(X) \subset X\}$$

Exemple 2.4. 1. Pour tout $x \in E$ on a $r_i(x) = x$.

2. Soint $x_0 \neq x_1 \in E$ on a $r_i[x_0\ x_1] = \{x \in [x_0\ x_1]/\exists r > 0\ ,\ B(x,r) \cap aff(x_0,x_1)\} \subset [x_0 x_1]$
comme $aff(x_0,x_1) = (x_0,x_1)$ est un droite alors :

$$ri(x_0,x_1) = \{x \in [x_0, x_1]/\exists r > 0\ ,\ B(x,r) \cap aff(x_0,x_1) \subset [x_0,x_1]\} =]x_0,x_1[$$

Remarque 2.3. Si $E = \mathbb{R}; X \in \mathbb{R}$
$r_i(X) = \{x \in X/\exists r > 0, B(x,r) \cap aff(X) \subset X\}$ mais $aff(X) = \mathbb{R}$ donc :

$$\begin{aligned} r_i(X) &= \{x \in X/\exists r > 0, B(x,r) \cap aff(X) \subset X\} \\ &= \{x \in X/\exists r > 0, B(x,r) \subset X\} \\ &= \dot{X} \end{aligned}$$

Lemme 2.2. *Soit $A \subseteq E$ un sous-ensemble affine non vide. Alors,* *(i)* $\forall x_0 \in A$ *l'ensemble* $A - x_0$ *est un sous espace vectoriel de* E.

(ii) $\forall x_0, x_1 \in A$, $A - x_0 = A - x_1$

Démonstration. (i) L'ensemble $A - x_0$ est un sous espace vectoriel de E.

(a) on a $0 \in A - x_0$ car $0 = x_0 - x_0$ et $x_0 \in A$.

(b) soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in A - x_0$ on veut montrer que $\alpha u + \beta v \in A - x_0$. Comme $u, v \in A - x_0$ alors :

$$\begin{cases} u = x - x_0 \ , \ x \in A \\ v = y - x_0 \ , \ y \in A \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v &= \alpha(x - x_0) + \beta(y - x_0) \\ &= \alpha x + \beta y - (\alpha + \beta)x_0 \end{aligned}$$

et comme $\alpha u + \beta v + x_0 = \alpha x + \beta y + (1 - \alpha - \beta)x_0 \in A$, car il est une combinaison affine des éléments x,y,x_0 dans l'ensemble affine A. Donc $\alpha u + \beta v \in A - x_0$. D'où d'après (a) et (b) l'ensemble $A - x_0$ est un sous espace vectoriel de E.

(ii) Pour montrer que $\forall x_0, x_1 \in A; A - x_0 = A - x_1$ il suffit de montrer que $A = x_0 - x_1 + A$, pour cela il suffit démontrer les deux inclusions :

$$\begin{cases} A \subset x_0 - x_1 + A \qquad (1) \\ x_0 - x_1 + A \subset A \qquad (2) \end{cases}$$

(1) Si $x \in A$ on veut montrer que $x = x_0 - x_1 + y$ tell que $y \in A$
On a $x = x_0 - x_1 - x_0 + x_1 + x$, on pose $y = x - x_0 + x_1 \in A$ (car la combinaison affine de x,x_0,x_1), donc $x \in x_0 - x_1 + A$. D'où $A \subset x_0 - x_1 + A$.
(2) Si $x \in x_0 - x_1 + A$ donc $x = x_0 - x_1 + y$ tell que $y \in A$, et comme $x_0 - x_1 + y$ est une combinaison affine d' éléments de A, il vient que $x \in A$. Donc $x_0 - x_1 + A \subset A$.
Finalement,de (1) et (2) ona : $A - x_0 = A - x_1$. □

Définition 2.11. La dimension d'un ensemble affine non-vide $A \subseteq E$, notée $\dim(A)$ est la dimension du sous-espace vectoriel $A - x_0$.

Théorème 2.4. *Soit E un espace vectoriel normé et K un ensemble convexe non vide tell que* $\dim aff(K) \neq \emptyset$ *,alors $ri(K) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Comme K un ensemble convexe non vide alors pour tout $x_0 \in K$ on a $x_0 \in aff(K)$, il vient que $E_{x_0} = aff(K) - x_0$ est un sous espace vectoriel de E.
On montrer que $E_{x_0} = vect(K - x_0)$, on a $vect(K - x_0) \subset E_{x_0}$ car $vect(K - x_0)$ est le plus petit sous espace vectoriel de E contient $K - x_0$.
Pour montrer que $E_{x_0} \subset vect(K - x_0)$, on soit $v \in E_{x_0}$,alors on a :

$$v = u - x_0 \ / \ u \in aff(K) : u = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, x_i \in K, t_i \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} t_i x_i - x_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} t_i x_i - \sum_{i=1}^{n} t_i x_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - x_0) \end{aligned}$$

D'où $E_{x_0} \subset vect(K - x_0)$. Donc $E_{x_0} = vect(K - x_0)$.
Maintenant comme $E_{x_0} \subset vect(K - x_0)$,il existe une base de la forme : $\{x_i - x_0\}_{1 \leq i \leq n}$ de E_{x_0}. Donc $\forall x_0 \in E_{x_0}$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (x_i - x_0)$, $t_i \in \mathbb{R}$, et comme $aff(K) = x_0 + E_{x_0}$ et $x \in aff(K)$ alors $x = x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (x_i - x_0)$; on pose :

$$\begin{array}{llll} \Phi : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & aff(K) \\ & t = (t_1 \dots t_n) & \rightarrow & \Phi(t) = x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} t_i (x_i - x_0) \end{array}$$

Φ est une fonction continue et bijective. On définie l'ensemble Ω de $\mathbb{R}^n$ comme suite : $\Omega = \{t \in \mathbb{R}^n \ , \ \sum\limits_{i=1}^{n} t_i < 1 \ , \ t_i > 0\}$,il est clair que Ω est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$ (comme l'intersection d deux ouvert), alors Φ homomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $aff(K)$, donc $\Phi(\Omega)$ est un ouvert dans $aff(K)$. Pour montrer que : $ri(K) \neq \emptyset$ il reste de montrer que $\Phi(\Omega) \subset K$.
Soit $y \in \Phi(\Omega)$ donc $y = \Phi(t)$, $\forall \ t \in \Omega$, d'où :

$$y = x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - x_0) \ / \ t_i > 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} t_i < 1$$

Donc

$$\begin{aligned} y &= x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i x_i - x_0 \sum_{i=1}^{n} t_i \\ &= (1 - \sum_{i=1}^{n} t_i) x_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \end{aligned}$$

On pose : $t_0 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$, alors $y = \sum\limits_{i=0}^{n} t_i(x_i - x_0)$ / $\sum\limits_{i=0}^{n} t_i = t_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$
Donc $y \in K$, d'où $ri(K) \neq \emptyset$. □

2.1.5 Projection sur un convexe fermé

Théorème 2.5. *Etant donné un espace de Hilbert E et un ensemble C convexe complet dans E. Il existe un unique application P_C de E dans C est dite Projection sur le convexe C. et pour tout $x \in E$, $P_C(x)$ est appellé le projection de le point x sur le convexe C,et vérifiant les deux propriétés équivalents suivants :*

1. $\forall\ y \in C\ :\ \|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|$
2. $\forall\ y \in C\ \langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0$

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) :soit $y \in C$ donc pour tout $x \in E$,$P_C(x) \in C$. D'où pour $\theta \in]0,1[$ on a :

$$\theta y + (1-\theta) P_C(x) \in C$$

et comme $\theta y + (1-\theta) P_C(x) \in C$ il vient que :

$$\begin{aligned} \|x - P_C(x)\| &\leq \|x - \theta y - (1-\theta) P_C(x)\| \\ &= \|x - \theta y - P_C(x) + \theta P_C(x)\| \\ &= \|x - P_C(x) - \theta(y - P_C(x))\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|x - P_C(x)\|^2 &\leq \|x - P_C(x) - \theta(y - P_C(x))\|^2 \\ &\|x - P_C(x)\|^2 + \theta^2 \|y - P_C(x)\|^2 - 2\theta \langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq \frac{1}{2}\theta \|y - P_C(x)\|^2$$

. par passage à la limite lorsque $\theta \to 0^+$ on trouve

$$\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0$$

(1) $\Longrightarrow$ (2) : soit $y \in C$,alors on a :

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \|x - P_C(x) + P_C(x) - y\|^2 \\ &= \|x - P_C(x) - (y - P_C(x))\|^2 \\ &= \|x - P_C(x)\|^2 + \|y - P_C(x)\|^2 - 2\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle . \qquad \square \end{aligned}$$

Donc comme $\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0$, il vient que $-2\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \geq 0$. Donc

$$\|x-y\|^2 \geq \|x - P_C(x)\|^2$$

Alors

$$\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|$$

Théorème 2.6. *Soit C un convexe fermé sur un espace Hilbertien E de dimension finie. Alors $\forall x \in E$, $\exists! y \in C$ tel que $\|x-y\| = \inf\limits_{z\in C} \|z-x\|$*
y est appelé le projecte de x sur C,et on note $P_C(x)$

Démonstration. Comme l'espace E est un espace de Hilbert de dimension finie, il vient que tout boule fermé dans E est compact. On construit le compacte A comme suite $A = C \cap \bar{B}(x, \|x-y\|)$ avec $x \in E$ et $y \in C$. On définit la fonction f de A dans $\mathbb{R}$ tel que $f(y) = \|x-y\|$
La fonction f est une fonction continue sur le compact A,donc il atteint son min, c'est à dire : $\exists y_0 \in C$ tel que $f(y_0) = \inf\limits_{y\in C} f(y)$
Donc il existe $y_0 \in C$ tel que $\|x - y_0\| = \inf\limits_{y\in C} \|x-y\|$. D'où $P_C(x)$ existe.
L'unicité : Supposons $y_1, y_2 \in C$ tel que $y_1 = P_C(x)$ et $y_2 = P_C(x)$,donc le milieu m de $[y_1, y_2]$ est dans C;alors $\|x-y_1\| = \|x-y_2\|$ et $\|x-m\| \leq \|x-y_1\|$ contradiction avec $\|x-y\| = \inf\limits_{z\in C} \|x-z\|$. Donc $y_1 = y_2$ $\square$

2.1.6 La Séparation des Convexes

Etant donné un espace Hilbertienne E sur $\mathbb{R}$.
On appelle forme linéaire sur E tout appliction lineaire continue de E sur $\mathbb{R}$.
On note $E^{'} = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ est le dual algebrique de E.

Définition 2.12. Un hyperplan est un ensemble de la forme

$$H = \{x \in E; f(x) = \alpha\}$$

où $f \in E^{'}$ est forme linéaire et $\alpha \in \mathbb{R}$. On qit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Définition 2.13. Soient A et B deux convexes disoints non vide d'un espace normé E. On dit que H l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est séparer A et B au sens large si

$$\forall\, x \in A, \forall\, y \in B : f(x) \leq \alpha \leq f(y)$$

On dit que H l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est séparer A et B au sens strict si

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall x \in A, \forall\, y \in B : f(x) \leq \alpha - \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon \leq f(y)$$

Exemple 2.5. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x - y$. Si on prend H l'hyperplan d'équation $[f = 2]$ et
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y - 2 > 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y - 2 < 0\}$
On a A et B sont deux convexe disjoints (car $A = f^{-1}(]2, +\infty[)$ et $B = f^{-1}(]-\infty,2[)$) et d'autre part soient $u \in A$ et $v \in B$ tel que $u = (x,y)$, $v = (x',y')$, il vient que $f(u) = f(x,y) > 2 \Longrightarrow f(x,y) \geq 2$ et $f(v) = (x',y') < 2 \Longrightarrow f(x',y') \leq 2$
d'où $f(v) \leq 2 \leq f(u)$. Donc l'hyperplan d'équation $[f = 2]$ séparer A et B au sens large.

Remarque 2.4. Comme $f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ il vient que toute hyperplan est un ensemble fermé.

Lemme 2.3. *[8] Soit $C \subset E$,un convexe ouvert non vide et soit $x_0 \in E, x_0 \notin$. Alors $\exists f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in C$. En particulier l'hyperplan d'équation $[f = f(x_0)]$.*

Théorème 2.7. *(Théorème de Hahn-Banach première forme géométrique)*
Soient A et B deux convexes disoints non vide d'un espace normé E. Si A ouvert alors il existe un hyperplan $[f = \alpha]$ qui séparé A et B au sens large.

Démonstration. On pose $C = A - B$ de sorte que C est convexe. Alors d'après le lemme précédent $\exists\ f \in E'$ tel que $f(z) < 0\ \ \forall z \in A - B$, c'est-à-dire : $f(x) \leq f(y)\ \ \forall x \in A, \forall y \in B$. On fixe α tel que $\sup\limits_{x\in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf\limits_{y\in B} f(y)$
et donc l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ qui séparé A et B au sens large. □

Théorème 2.8. *(Théorèeme de Hahn-Banach deuxième forme géométrique)*
Soient A et B deux convexes disoints non vide d'un espace normé E. Si A fermé et B compact alors il existe un hyperplant $[f = \alpha]$ qui séparé A et B au sens strict.

Démonstration. On pose $A_\varepsilon = A + B(0,\varepsilon) = \underset{x\in A}{\cup} (x + B(0,\varepsilon)) = \underset{x\in A}{\cup} B(x,\varepsilon)$
$B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon) = \underset{x\in B}{\cup} (x + B(0,\varepsilon)) = \underset{x\in B}{\cup} B(x,\varepsilon)$
De sort que A_ε et B_ε sont deux ensemble convexes ouverts ,non vide disjoints. Alors d'après théorème de Hahn-Banach première forme géométrique ,il existe un hyperplan fermé $[f = \alpha]$ qui séparé A_ε et B_ε au sens large. On a donc :

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A_\varepsilon \quad et \quad f(y) \geq \alpha \quad \forall y \in B_\varepsilon$$

C-à-d :

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \quad \forall x \in A \ \ , \forall z \in B(0,1)$$
$$f(y + \varepsilon z) \geq \alpha \quad \forall y \in B \ \ , \forall z \in B(0,1)$$

Alors $\quad f(x) + \varepsilon f(z) \leq \alpha \leq f(y) + \varepsilon f(z) \quad \forall z \in B(0,1)$
Donc $\quad f(x) + \varepsilon f(z) \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon f(z) \quad \forall - z \in B(0,1)$

$$f(x) + \varepsilon \sup_{\|z\|\leq 1} f(z) \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon \sup_{\|z\|\leq 1} f(z)$$
$$f(x) + \varepsilon \|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon \|f\|$$

Alors on déduire que

$$\begin{cases} f(x) \leq \alpha - \varepsilon' & \forall x \in A \\ f(y) \geq \alpha - \varepsilon' & \forall y \in B \end{cases}$$

Alors l'hyperplan fermé $[f = \alpha]$ séparé A et B au sens strict. □

Définition 2.14. (Points extrêmaux)
Soit C un convexe d'un e. v. E. Un point $a \in C$ est dit extrêmal si

$$\nexists x, y \in C, x \neq y, \nexists t \in]0,1[, x = tx + (1-t)y$$

De façon équivalente,si $a = tx + (1-t)y$ avec $x,y \in C$ et $0 < t < 1$, alors $a = x = y$.
Dire que $a \in C$ est extrêmal si $a \in [x,y]$ avec $x,y \in C$,alors $a = x$ ou $a = y$.

Exemple 2.6. Les points extrémaux du convexe de $\mathbb{R}^n$

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \ \ tq \ : \ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

sont les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de la base canonique.
En effet si $e_i = tx + (1-t)y$ avec $x,y \in P$ et $t \in [0,1]$ alors :

$$tx_j + (1-t)y_j = \begin{cases} 0 & sij \neq i \\ 1 & sij = i \end{cases}$$

Comme x_j et y_j positifs et $1 \leq j \leq n$, alors $x_j = y_j = 0$ pour $j \neq i$, et $x_i = y_i = 1$ puisque $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1$, c-à-d : $x = y = e_i$ chaque vecteur e_i est extrêmal dans P.

Lemme 2.4. *Soit C un convexe non vide de E. Un point a de C est extrêmal ssi $C \setminus \{a\}$ est convexe.*

Démonstration. Soit a un point extrêmal Considérons deux points distincts x et y de $C \setminus \{a\}$ et $t \in]0,1[$: nous devons montrer que $z = tx + (1-t)y \in C \setminus \{a\}$.
Par la convexité de C, le point $z \in C$, mais il est différent de x car

$$z \in C, \ \ z = tx + (1-t)y \ avec \ x \text{ et } y \text{ dans } C; \ \ \ x \neq y \text{ et } t \in]0,1[$$

donc contredire le caractère de extrêmal de x dans C. Donc $z \in C \setminus \{a\}$.
Réciproquement ,supposons $C \setminus \{a\}$ est convexe et montrons a est un point extrêmal de C. Supposons qu'on écrire a sous la forme

$$a = \frac{1}{2}(x+y) \quad x,y \in C, \quad x \neq y \tag{2.1}$$

Alors x et y sont différents de a ,mais par le convexité de $C \setminus \{a\}$, cela entraîne que $\frac{1}{2}(x+y) \in C \setminus \{a\}$. D'où contradiction avec (2.1) , donc a est un point extrêmal de C.□

2.2 Les fonctions convexes

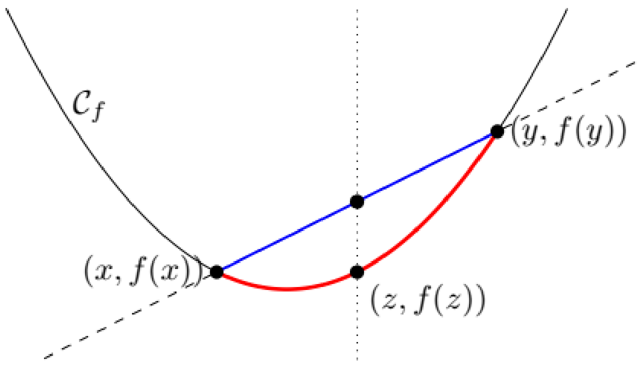
Dans cette section, nous présentons quelques propriétés remarquables des fonctions convexes.

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.15. On appelle domaine effectif (ou simplement domaine) d'une fonction $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ l'ensemble :

$$dom f := \{x \in E \mid f(x) < \infty\}$$

Exemple 2.7. Soit f une fonction définie sur le graphe suivant :



Soient $M_1 = (x,f(x))$ et $M_2 = (y,f(y))$ deux points de son graphe
$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$, on dit que f est une fonction convexe.
On remarque que tout point P du graphe d'abscisse $z \in [x,y]$ vérifient :

$$z = tx + (1-t)y$$

$$f(z) = f(tx + (1-t)y)$$

et tout point de segment M_1M_2 est de coordonnée $f(z) = tf(x) + (1-t)f(y)$
D'autre part, comme le graphe est au dessous de segment M_1M_2, il vient que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

On peut généralisé cette propriétés comme suivant :

Définition 2.16. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et C une partie convexe dans E. On dit que la fonction $f : C \to \bar{\mathbb{R}}$ est convexe si :

$$\forall\ x,y \in C, \forall\ t \in [0,1] \quad : \ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

.

Exemple 2.8. Si $(E,\|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. La fonction

$$\begin{aligned} f:\quad E &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \|x\| \end{aligned}$$

est convexe.
Car $\forall\ x,y \in E$, $\forall\ t \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= \|tx + (1-t)y\| \\ &\leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \\ &= tf(x) + (1-t)f(y) \end{aligned}$$

Exemple 2.9. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, alors la fonction distance

$$\begin{aligned} f:\quad C &\to \mathbb{R}^n \\ x &\to d_c(x) = \inf\{\|x-y\|\ ,\ y \in C\} \end{aligned}$$

est convexe sur $\mathbb{R}^n$.
Si on prend $\{y_k\}$ et $\{y'_k\}$ deux suites qui converge vers x et x' respectivement quand $k \to \infty$. Posons $z_k = \alpha y_k + (1-t)y'_k \in C$ avec $t \in [0,1]$ alors $\lim_{k\to\infty} y_k = tx + (1-t)x'$, donc

$$\begin{aligned} d_c(tx + (1-t)x') &\leq \|z_k - tx - (1-t)x'\| \\ &\leq t\|y_k - x\| + (1-t)\|y'_k - x'\| \end{aligned}$$

Définition 2.17. Si la fonction $(-f)$ est convexe. On dit que f est concave.

Définition 2.18. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et C une partie convexe dans E.
On dit que F est strictement convexe si : :

$$\forall\ x,y \in C\ ,\ \forall\ t \in]0,1[\ :\ f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

On dit que F est fortement convexe (α-convexe) si :

$$\exists\ \alpha > 0\ ,\ \forall\ x,y \in C\ ,\ \forall\ t \in]0,1[\ :\ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)-\frac{\alpha}{2}t(1-t)\|x-y\|^2$$

Remarque 2.5. α-convexe $\Rightarrow$ strictement convexe $\Rightarrow$ convexe.

Définition 2.19. Soit E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle eppigraphe de f l'ensemble noté EP_if et définie par :

$$EP_if = \{(x,\alpha) \in E \times \mathbb{R}\ ,\ f(x) \leq \alpha\}$$

.

Remarque 2.6. On peut voir que $EP_if = f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$.

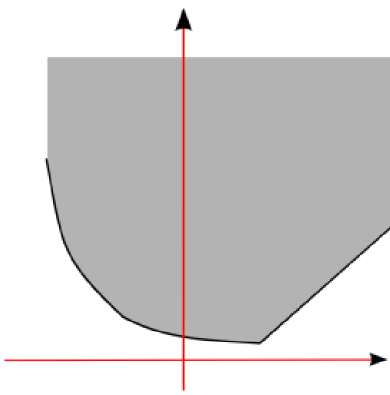


FIGURE 2.1 – L'épigraphe de la fonction est la zone grisée au-dessus du graphe de la fonction.

Théorème 2.9. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et $\alpha \in \mathbb{R}$,alors f est convexe si et seulement si EP_if est convexe.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$:Soit $(x,\alpha),(y,\beta) \in EP_if$ et $t \in [0,1]$,il vient que :

$$t(x,\alpha) + (1-t)(y,\beta) = (tx + (1-t)y,t\alpha + (1-t)\beta)$$

et comme f convexe il vient que

$$\begin{aligned} f(tx+(1-t)y) &\leq tf(x)+(1-t)f(y) \\ &\leq t\alpha+(1-t)\beta \end{aligned}$$

Donc $t(x,\alpha)+(1-t)(y,\beta) \in EP_if$

$(\Leftarrow)$: Soient $x,y \in E$ et $t \in [0,1]$ on a : $(x,f(x)),(y,f(y)) \in EP_if$ car on a $f(x) \leq f(x)$ et $f(y) \leq f(y)$, et comme EP_if est convexe il vient que

$$t(x,f(x))+(1-t)(y,f(y)) \in EP_if$$

. mais $t(x,f(x))+(1-t)(y,f(y)) = (tx+(1-t)y,tf(x)+(1-t)f(y))$

Donc $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$ Alors f est convexe. □

Lemme 2.5. *(Inégalité de Jensen)*

Soit C un ensemble convexe et $f : C \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. Soient $x_1,x_2,\ldots,x_n$ n points appartenant à $dom(f)$ et $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ des coefficients réels positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$. Alors

$$f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$$

.

Démonstration. On montre par récurrence. Pour $n=2$ d'après la convexité de f.

On suppose le résultat vrai au rang n et on montre au rang $n+1$.

Comme $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\alpha_i = 1$; $\exists i_0$ *tel que* $t_{i_0} \neq 1$ prenons $i_0 = n+1$ donc $t_{n+1} \neq 1$, d'où :

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i) &= f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i + \alpha_{n+1}x_{n+1}) \\ &= f((1-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{(1-\alpha_{n+1})}x_i + \alpha_{n+1}x_{n+1}) \end{aligned}$$

et on a : $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{(1-\alpha_{n+1})}x_i \in C$ car :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{(1-\alpha_{n+1})} &= \frac{1}{(1-\alpha_{n+1})}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \\ &= \frac{1}{(1-\alpha_{n+1})}(\alpha_1+\alpha_2+....\alpha_n+\alpha_{n+1}-\alpha_{n+1}) \\ &= \frac{1}{(1-\alpha_{n+1})}(1-\alpha_{n+1}) = 1 \end{aligned}$$

et d'après la convexité de f il vient que :

$$\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i x_i) &= f((1-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{(1-\alpha_{n+1})}x_i+\alpha_{n+1}x_{n+1}) \\
&\leq (1-\alpha_{n+1})f(\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{(1-\alpha_{n+1})}x_i)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de reccurence

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(1-\alpha_{n+1})}{(1-\alpha_{n+1})}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f(x_i).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.9. *1. Soient $f_1, f_2 : C \to \mathbb{R}$ deux applications convexes. Alors l'application $f_1 + f_2$ est convexe.*

2. Soient $f : C \to \mathbb{R}$ une application convexe et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Alors l'application λf est convexe.

3. Soient $f, g : C \to \mathbb{R}$ deux applications convexes,et g soit à la fois croissante. Alors l'application fog est convexe.

Démonstration. 1. Soients $x,y \in C$ et $t \in [0,1]$ alors

$$\begin{aligned}
(f_1+f_2)(tx+(1-t)y) &= f_1(tx+(1-t)y)+f_2(tx+(1-t)y) \\
&\leq tf_1(x)+(1-t)f_1(y)+tf_2(x)+(1-t)f_2(y) \\
&\leq t(f_1+f_2)(x)+(1-t)(f_1+f_2)(y).
\end{aligned}$$

Donc $f_1 + f_2$ est convexe.

2. Soient $x,y \in C$ et $t \in [0,1]$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors

$$\begin{aligned}
\lambda f(tx+(1-t)y) &\leq \lambda t f(x)+\lambda(1-t)f(y) \\
&\leq t\lambda f(x)+(1-t)\lambda f(y).
\end{aligned}$$

Donc λf est convexe.

3. Soient $x,y \in C$ et $t \in [0,1]$ alors comme f convexe on a :

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

. Puisque g croissant

$$gof(tx + (1-t)y) \leq g(tf(x) + (1-t)f(y))$$

. Puisque g convexe

$$gof(tx + (1-t)y) \leq tgof(x) + (1-t)gof(y)$$

. D'où gof est convexe. $\square$

Remarque 2.7. Une fonction de deux variables (x, y) qui est convexe par rapport à x pour tout y et convexe par rapport à y pour tout x n'est pas nécessairement convexe par rapport au couple (x, y).
Contre-exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy$,on a par exemple si on prend $x = (0,2)$, $y = (2,0)$,et $t = 1/2$,alors

$$f(1,1) = 1 > \frac{1}{2}f(0,2) + \frac{1}{2}f(2,0)$$

.

Proposition 2.10. *Si C une partie convexe dans un espace vectoriel E et $f : C \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe alors :*

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{R} \ \ : \ f_\alpha(C) = \{x \in C \ , \ f(x) \leq \alpha\}$$

. est convexe.

Démonstration. Il suffit de montrer que :

$$\forall\ x,y \in f_\alpha(C)\ ,\ \forall\ t \in [0,1]\ :\ tx + (1-t)y \in f_\alpha(C)$$

On a :

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ &\leq t\alpha + (1-t)\alpha \\ &\leq \alpha. \end{aligned}$$

Donc $tx + (1-t)y \in f_\alpha(C)$. Alors $f_\alpha(C)$ est convexe. $\square$

Théorème 2.10. *Soit Ω un ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$ et f_n une suite des fonctions convexes sur Ω qui converge simplement vers une fonction f. Alors f est convexe.*

Démonstration. Comme f_n convexe alors pour tout $t \in [0,1]$ et $x,y \in \Omega$ on a :

$$f_n(tx + (1-t)y) \leq tf_n(x) + (1-t)f_n(y)$$

On passage à la limite on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(tx + (1-t)y) \leq \lim_{n\to+\infty} (tf_n(x) + (1-t)f_n(y))$$

d'où $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$,donc f est convexe. □

Lemme 2.6. *Inégalité de Young*
Soient p, q deux réels strictement positif et vérifiant :$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dit que p et q sont deux exposants conjuguées). Alors pour tous $x,y \geq 0$

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

Démonstration. Si l'un des deux réels x ou y est nul, alors le résultat est triviale. Donc on peut supposer que $x,y \geq 0$, comme la fonction "exp" est convexe ,alors pour tout x,y et $t \in [0,1]$ nous avons :

$$\exp(tx + (1-t)y) \leq t\exp(x) + (1-t)\exp(y)$$

. En particulier :

$$\begin{aligned} xy &= \exp(\frac{1}{p}\ln x^p + \frac{1}{q}\ln y^q) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(\ln x^p) + \frac{1}{q}(\ln y^q) \\ &\leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q. \end{aligned}$$ □

2.2.2 Continuité et Semi-continuité

Définition 2.20. Une fonction f est dite semi-continue inférieure (s. c. i) et supérieure (s. c. s) en un point x si l'on a :

$$f(x) \leq \lim_{y \to x} \inf f(y) := \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\{f(y) \mid 0 < \|y - x\| < \varepsilon\}$$

$$f(x) \geq \lim_{y \to x} \sup f(y) := \lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{f(y) \mid 0 < \|y - x\| < \varepsilon\}$$

c-à-d pour tout suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x :

$$f(x) \leq \lim_{k \to \infty} \inf f(x_k) := \lim_{k \to \infty} \inf\{f(x_j) \mid j \geq k\}$$

$$f(x) \leq \lim_{k \to \infty} \sup f(x_k) := \lim_{k \to \infty} \sup\{f(x_j) \mid j \geq k\}$$

Théorème 2.11. *Une fonction f est dite semi-continue inférieure alors son épigraphe est une ensemble fermé.*

Démonstration. Prenons une suite $\{(x^k,\alpha^k)\} \subset EP_i f$ converge vers (x,α)
Puisque $f(x^k) \leq \alpha^k$ et que $f(x) \leq \lim_{k \to \infty} \inf f(x^k) \leq \lim_{k \to \infty} \alpha^k = \alpha$ du fait que f est s. c. i on en déduit que $(x,\alpha) \in EP_i f$, donc $EP_i f$ est fermé. □

Exemple 2.10. (Transformée de Laplace) Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$.
La transformée de Laplace de μ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$G_\mu(\xi) := \int e^{\langle x,\xi \rangle} d\mu(x) \tag{2.2}$$

Nous allons montrer que G_μ est semi-continue inférieurement. Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite qui converge vers ξ. Considérons les fonctions mesurables positives

$$g(x) := e^{\langle x,\xi \rangle} \quad et \quad g_k(x) := e^{\langle x,\xi_k \rangle} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

La continuité de l'application $\xi \to e^{\langle x,\xi_k \rangle}$ implique que

$$\lim_{k \to \infty} \inf g_k(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x) = g(x)$$

D'après le lemme de Fatou, on a alors

$$\int g(x) d_\mu(x) \leq \lim_{k \to \infty} \inf \int g_k(x) d_\mu(x)$$

qui est précisément l'inégalité cherchée.

Définition 2.21. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe ,f est dite propre si f ne prend pas la valeur $-\infty$,et si elle ne vaut pas identiquement $+\infty$.

L'étude de la continuité des fonctions convexes repose sur le lemme suivant :

Lemme 2.7. *Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe sur un espace de Hilbert X et $u \in X$ un point au voisinage duquel la fonction est bornée. Alors f est continue en u.*

Démonstration. On peut effectuer une translation dans X qui amène u en 0 et une translation dans $\bar{\mathbb{R}}$ qui amène $f(u)$ en 0. On suppose donc qu'il existe un voisinage V de l'origine où f est bornée par une constante M. On peut aussi supposer que ce voisinage est symétrique par rapport à l'origine en le restreignant éventuellement à $V \cap (-V)$.
Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $x \in \varepsilon V$. Notons $(x/\varepsilon) \in V$ et $(-x/\varepsilon) \in V$ et donc $f(x/\varepsilon) \leq M$ et $f(-x/\varepsilon) \leq M$ alors,

$$\begin{aligned} x = (1-\varepsilon)0 + \varepsilon(x/\varepsilon) &\Rightarrow f(x) \leq (1-\varepsilon)f(0) + \varepsilon f(x/\varepsilon) \\ &\Rightarrow f(x) \leq \varepsilon M, \end{aligned}$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{1+\varepsilon}x + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(-x/\varepsilon) &\Rightarrow f(0) \leq \frac{1}{1+\varepsilon}f(x) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}f(-x/\varepsilon) \\ &\Rightarrow f(x) \geq (1+\varepsilon)f(0) - \varepsilon f(-x/\varepsilon) \\ &\Rightarrow f(x) \geq -\varepsilon M \end{aligned}$$

Finalement, $|f(x)| \leq \varepsilon M$,et lorsque $\varepsilon \to 0$,$x \in \varepsilon V$ tend aussi vers 0 et $f(x) \to 0 = f(0)$ ce qui montre la continuité de f en 0. □

Proposition 2.11. *[4] Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et soit $x_0 \in int(domf)$. Les assertions suivants sont équivalents :*

(i) Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tel que $f(x) < C$ pour tout $x \in B(x_0,\varepsilon)$;

(ii) La fonction f est lipschitzienne sur un voisinage de x_0 ;

(iii) La fonction f est continue en x_0 ;

(iv) On a $(x_0,y) \in int(EPif)$ pour tout $y \in]f(x_0), +\infty[$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$:Soient $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tel que $f(x) < C$ pour tout $x \in \bar{B}(x_0,\varepsilon)$. On a $B(x_0,\varepsilon) \subset dom(f)$ et que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in B(x_0,\varepsilon)$. trouvons $\eta \in]0,\varepsilon[$ et $L > 0$ tel que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

si $x_1,x_2 \in B(x_0,\eta)$. Fixons $\eta = \varepsilon/2$. Si $x,y \in B(x_0,\eta)$ et $x \neq y$,posons

$$z = y + \eta \frac{y-x}{\|y-x\|}. \tag{*}$$

Par construction,

$$\|z - x_0\| = \|y - x_0 + \eta \frac{y-x}{\|y-x\|}\| \leq \|y - x_0\| + \eta \leq 2\eta = \varepsilon.$$

Par hypothèse, on a alors $f(z) < C$. De (*), on obtient que

$$y = \frac{1}{(1 + \frac{\eta}{\|y-x\|})} z + \frac{\frac{\eta}{\|y-x\|}}{(1 + \frac{\eta}{\|y-x\|})} x.$$

Comme f est convexe,on a

$$f(y) \leq \frac{1}{(1 + \frac{\eta}{\|y-x\|})} f(z) + \frac{\frac{\eta}{\|y-x\|}}{(1 + \frac{\eta}{\|y-x\|})} f(x);$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq \frac{1}{(1 + \frac{\eta}{\|y-x\|})} f(z) + \frac{\frac{\eta}{\|y-x\|}}{(1 + \frac{\eta}{\|y-x\|})} f(x) - f(x) \\ &= \frac{1}{(1 + \frac{\eta}{\|y-x\|})} (f(z) - f(x)) \\ &< \frac{1}{(1 + \frac{\eta}{\|y-x\|})} (C - f(x)). \end{aligned} \tag{**}$$

Remarquons que $x_0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2x_0 - x)$. Par la convexité de f et vu que $2x_0 - x \in B(x_0,\varepsilon)$,on obtient $f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(2x_0 - x) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{C}{2}$ c'est-à-dire $f(x) \geq 2f(x_0) - C$. Cette minoration combinée à (**) alors

$$f(y) - f(x) \leq \frac{1}{(1 + \frac{\eta}{\|y-x\|})} (2C - 2f(x_0)) = \frac{2(C - f(x_0))}{\|x-y\| + \eta} \leq \frac{2(C - f(x_0))}{\eta} \|x - y\|$$

sera obtenir d'un façon analogue avec $z' = x + \varepsilon \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$,

$$f(x) - f(y) \leq \frac{2(C - f(x_0))}{\eta} \|x-y\|$$

. Donc,f est bien lipschitzien sur $B(x_0,\eta)$ avec une constante L donnée par $L = \dfrac{2(C - f(x_0))}{\eta}$.

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x-y\|$$

. $(ii) \Rightarrow (iii)$: est évident.
$(iii) \Rightarrow (iv)$:Supposons que $y \in]f(x_0),+\infty[$. Fixons $\varepsilon \in]0,y - f(x_0)[$. On a $y - \varepsilon \in]f(x_0),y[$. Comme $]f(x_0) - \varepsilon, y - \varepsilon[$ est un voisinage de $f(x_0)$ et f est continue en x_0 ,alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$x \in B(x_0,\eta) \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < y - \varepsilon \Rightarrow (x,y) \in EPif$$

. On conclut que $B(x_0,\eta)\times]y - \varepsilon, +\infty[$ est un voisinage de (x_0,y) dans $E \times \mathbb{R}$ inclus dans $EPi(f)$.
$(iv) \Rightarrow (i)$: Comme $x_0 \in dom(f)$,on a $f(x_0) < \infty$. Soit $y \in]f(x_0), +\infty[$. D'après (iv) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0,\varepsilon)\times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset EPif$.
Donc, on a $f(x) < y$ pour tout $x \in B(x_0,\varepsilon)$. □

Théorème 2.12. *Soit Ω un ouvert convexe dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction convexe bornée sur Ω ; alors pour tout partie $C \subset \Omega$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec $C + B_\varepsilon \subset \Omega$, f est lipschitzienne sur C.*

Démonstration. Il suffit de montrer que il existe $L > 0$ tel que : $\forall\, x,y \in C$: $|f(x) - f(y)| \leq L\|x-y\|$.
Comme f est bornée sur Ω alors $\exists\, M > 0$, $\forall\, x \in \Omega$, $|f(x)| \leq M$
Soient $x,y \in \Omega$, on pose

$$z_1 = y + \varepsilon \frac{y-x}{\|y-x\|} \ \ , \ \ z_2 = x + \varepsilon \frac{x-y}{\|x-y\|}.$$

on a $z_1,z_2 \in C$,alors comme $y \in [x,z_1]$ il vient que $\exists\, t \in]0,1[$ tel que $y = tx + (1-1)z_1$ et comme : $z_1 = y + \varepsilon \dfrac{y-x}{\|y-x\|}$ il vient que : $y = tx + (1-t)(y + \varepsilon \dfrac{y-x}{\|y-x\|})$

donc

$$\begin{aligned} 0 &= tx - ty + \varepsilon\frac{y-x}{\|y-x\|} - t\varepsilon\frac{y-x}{\|y-x\|} \\ &= t(x - y - \varepsilon\frac{y-x}{\|y-x\|}) + \varepsilon\frac{y-x}{\|y-x\|} \\ &= t(x - y + \varepsilon\frac{y-x}{\|y-x\|}) - \varepsilon\frac{y-x}{\|y-x\|}. \end{aligned}$$

Alors

$$t(x - y + \varepsilon\frac{y-x}{\|y-x\|}) = \varepsilon\frac{y-x}{\|y-x\|} \Rightarrow t = \frac{\varepsilon}{\|x-y\|+\varepsilon}$$

. et comme f est convexe alors : $f(y) = f(tx + (1-t)z_1) \leq tf(x) + (1-t)f(z_1)$

donc

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq tf(x) + (1-t)f(z_1) - f(x) \\ f(y) - f(x) &\leq -(1-t)f(x) + (1-t)f(z_1) \\ &= (1-t)(f(z_1) - f(x)), \end{aligned}$$

et comme f est bornée sur Ω alors : $f(z_1) - f(x) \leq f(z_1) + f(x) \leq 2M$ donc

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq (1-t)(f(z_1) - f(x)) \\ &\leq (1-t)2M \\ &\leq (1 - \frac{\varepsilon}{\|x-y\|+\varepsilon}).2M \\ &\leq \frac{\|x-y\|}{\|x-y\|+\varepsilon}.2M \leq \frac{2M}{\varepsilon}\|x-y\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall\ x,y \in C \ \ :\ f(y) - f(x) \leq \frac{2M}{\varepsilon}\|x-y\|.$$

Il reste de montrer que :

$$\forall\ x,y \in C \ \ :\ f(x) - f(y) \leq \frac{2M}{\varepsilon}\|x-y\|.$$

sera obtenir d'un façon analogue avec $z_2 = x + \varepsilon\frac{x-y}{\|x-y\|}$

Finalement : $\exists\ L > 0$ ($L = \frac{2M}{\varepsilon}$) , $\forall\ x,y \in C$, $|f(x) - f(y)| \leq L\|x-y\|$. D'où f est lipschitzienne. $\square$

Théorème 2.13. *[12] Si f est une fonction continue dans un ouvert convexe $\Omega \subset \mathbb{R}$ alors*

$$f \quad \text{est convexe} \Longleftrightarrow \forall a,b \in \Omega \quad f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

Démonstration. La condition est nécessaire. f étant convexe, appliquons la définition pour $t = \dfrac{1}{2}$

$$\forall a,b \in \Omega \quad f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

La condition est suffisante. Soit $a,b \in \Omega$ et $x \in [a,b]$

Divisons $[a,b]$ en deux intervalles égaux $[a,\dfrac{a+b}{2}]$ et $[\dfrac{a+b}{2},b]$, et appelons $[a_1,b_1]$ l'un des deux intervalles qui contient x. En réitérant, on obtient une suite d'intervalles $[a_n,b_n]$ de longueur $\dfrac{b-a}{2^n}$ contenant x. On sait que x est limite commune des suite $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$;de plus, on peut écrire a_n et b_n sous la forme $(1-\lambda)a_n + \lambda b_n$ où λ est un rationnel inférieur à 1

$$\begin{aligned} a_n &= a + k\frac{b-a}{2^n} = (1-\frac{k}{2^n})a + \frac{k}{2^n}b \\ b_n &= a_n + \frac{b-a}{2^n} = (1-\frac{k+1}{2^n})a + \frac{k+1}{2^n}b. \end{aligned}$$

où k est un naturel au plus égal à $2^n - 1$.

Montrons que la relation de convexité

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b). \tag{2.3}$$

est vérifiée pour tous les points considérés.

procédons par récurrence. Le cas $n = 1$ est vrai par la condition d'hypothèse.

Supposons la relation (2.3) pour n et $\lambda = \dfrac{k}{2^n}$ $(k = 1,2,\ldots,2^n-1)$ et montrons pour $n+1$

L'hypothèse de l'énonce s'écrit

$$f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(a_n)+f(b_n)). \tag{2.4}$$

D'après l'expression de a_n et b_n on a

$$\frac{a_n+b_n}{2} = (1-\frac{2k+1}{2^{n+1}})a + \frac{2k+1}{2^{nk+1}}b. \tag{2.5}$$

Comme (2.3) est vérifiée pour n, on a

$$f(a_n) \leq (1-\frac{k}{2^n})f(a) + \frac{k}{2^n}f(b)$$

et

$$f(b_n) \leq (1 - \frac{k+1}{2^n})f(a) + \frac{k+1}{2^n}f(b). \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2}(f(a_n) + f(b_n)) \leq (1 - \frac{2k+1}{2^{n+1}})f(a) + \frac{2k+1}{2^{n+1}}f(b). \tag{2.7}$$

En portant (2.5) et (2.7) dans (2.4), on démontre que la relation (2.3) est vérifiée pour $n+1$, quel que soit $\lambda = \dfrac{k}{2^{n+1}}$ $(k = 1{,}2, \ldots, 2^{n+1} - 1)$

Comme $a_n \to x$, $\dfrac{k}{2^n} \to \alpha$ tel que $\alpha \in [0{,}1]$; $x = (1-\alpha)a + \alpha b$.

Comme f est continue, alors l'inégalité (2.6) devient quand $n \to \infty$

$$f((1-\alpha)a + \alpha b) \leq (1-\alpha)f(a) + \alpha f(b)$$

Donc f est convexe. □

2.2.3 Différentiabilité et sous-différentiabilité

Généralités

Lorsqu'une fonction est définie sur un espace de Hilbert quelconque, on peut aussi définir la notion de dérivabilité.

Définition 2.22. (Dérivée directionnelle)
Soient E et F deux espaces de Hilbert. On appelle dérivée directionnelle de $f : E \to F$ au point $x \in E$ de direction $h \in E$ et $h \neq 0$ si la limite :

$$df(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

existe dans F.

Exemple 2.11. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$,alors

$$df(0{,}1) = \lim_{t \to 0^+} \frac{|x+t| - |x|}{t} = 1$$

$$df(0, -1) = \lim_{t \to 0^+} \frac{|x+t| - |x|}{t} = 1$$

Définition 2.23. (Dérivée de Gâteaux)
Si f admet en x des dérivées directionnelles pour toutes les directions h et si $df(x)$ est une fonction linéaire continue de h, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $df(x) = A(h)$ pour tout h, alors la fonction f est dite différentiable au sens de Gâteaux au point x (G-différentiable).

Remarque 2.8. L'existence d'une dérivée de Gâteaux en un point n'implique pas du tout la continuité de la fonction en ce point. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante :

$$\begin{cases} 1 \text{ si } y = x^2 \text{ et } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On peut vérifier que la dérivée de Gâteaux existe en $(0,0)$ mais la fonction n'est pas continue en ce point.

Définition 2.24. (Dérivée de Fréchet)
La fonction $f : E \to F$ admet une dérivée de Fréchet au point $x \in E$ (F-différentiable) si il existe un opérateur linéaire continue, encore noté $f'(x) \in \mathcal{L}(E,F)$,tel que :

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)}{\|h\|} = 0$$

et ce pour tout $h \in E$ tendant vers 0.

Exemple 2.12. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy + 2x - 3y^2$ On peut écrite pour tout $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ et $x = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, alors on a :

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0,y_0) \\ &= (y_0 + 2)h_1 + (x_0 - 6y_0)h_2 + h_1h_2 - 3h_2^2 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{|h_1h_2 - 3h_2^2|}{\|h\|} &\leq \lim_{h \to 0} \frac{|h_2||h_1 - 3h_2|}{|h_1| + |h_2|} \\ &\leq \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} |h_1 - 3h_2| = 0 \end{aligned}$$

D'où $h_1h_2 - 3h_2^2 = o(h)$, et l'application $f'(x)(h)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et donné par
$f'(x)(h) = (y_0 + 2)h_1 + (x_0 - 6y_0)h_2$ est linéaire et continue.
Donc f est différentiable au point $x = (x_0,y_0)$.

La propriété de F-différentiabilité est plus forte que celle de G-différentiabilité, comme en atteste la propriété suivante.

Proposition 2.12. *Si $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ est propre et F-différentiable en $x \in int(dom(f))$, alors f est G-différentiable et continu en x et $df(x) = \nabla f(x)$*

Démonstration. Soit $h \in E$ et fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est F-différentiable, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|h\| < \eta \Rightarrow \frac{|f(x+h) - f(x) - \langle df(x),h\rangle|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{\|h\|}$$

. Donc, si $|t| < \frac{\eta}{\|h\|}$,alors

$$\left| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - \langle df(x),h\rangle \right| = \|h\| \frac{|f(x+th) - f(x) - \langle df(x),th\rangle|}{\|th\|} < \varepsilon$$

. Ceci montre que

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \langle df(x),h\rangle$$

. pour tout $h \in E$. Comme $df(x)$ est linéaire et continu par définition, on en tire que f est G-différentiable en x et que $df(x) = \nabla f(x)$.

Montrons que f est continu en x. Soit $\varepsilon > 0$, et $y \in int(dom(f))$,on a

$$|f(y) - f(x)| \leq \|y - x\| \frac{|f(y) - f(x) - \langle df(x),y - x\rangle|}{\|y - x\|} + \langle df(x),y - x\rangle \,. \qquad (*)$$

□

Comme $df(x)$ est continu, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $|\langle df(x),y - x\rangle| < \varepsilon/2$ si $\|y - x\| < \eta_1$. La fonction f étant F-différentiable en x, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\|y - x\| < \eta_2 \Rightarrow \frac{|f(y) - f(x) - \langle df(x),y - x\rangle|}{\|y - x\|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si on pose $\eta = \min(1,\eta_1,\eta_2)$,alors d'après (*) on a

$$\|y - x\| \leq \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

La réciproque est fausse. Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^3 y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction est G-différentiable en (0,0) et $\nabla f(0,0) = 0$ comme on le vérifie aisément. Par l'absurde, supposons que f est aussi F-différentiable en $(0,0)$. On doit avoir $df(0,0) = 0$ et

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(th_1,th_2) - f(0,0) - \langle df(0,0),(h_1,h_2)\rangle|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^6y^2|}{x^{10} + x^2y^4 + 2x^6y^2 + x^8y^2 + y^6 + 2x^4y^4} = 0.$$

en renommant h_1 et h_2 et en élevant la limite au carré. Cependant, si $y = x^2$, on voit que

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{1}{4(x^2+1)} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

et on obtient une contradiction.

La convexité et la différentiabilité

Étant donné E un espace de Hilbert.

Théorème 2.14. *Soit C une partie ouvert convexe dans E et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable alors :*

$$f \text{ est convexe} \Leftrightarrow \forall x,y \in C : f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle .$$

En particulier,si $C \subset \mathbb{R}$ alors on a :

$$f \text{ est convexe} \Leftrightarrow \forall x,y \in C : f(x) \geq f(y) + \langle f'(y), x - y\rangle .$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$:soient $x,y \in C$, montrons que $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle$ comme f est convexe on a pour $t \in [0,1]$: $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ donc

$$f(y + t(x-y)) \leq f(y) + tf(f(x) - f(y)).$$

d'après la formule de Taylor : $\exists\, \theta \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(y + t(x-y)) &= f(y) + t\,\langle \nabla f(\theta(y + t(x-y)) + (1-\theta)y), x - y\rangle \\ &= f(y) + t\,\langle \nabla f(\theta y + \theta t(x-y) + y - \theta y), x - y\rangle \\ &= f(y) + t\,\langle \nabla f(y + \theta t(x-y)), x - y\rangle \end{aligned}$$

$$f(y + t(x-y)) - f(y) = t\,\langle \nabla f(y + \theta t(x-y)), x - y\rangle .$$

donc

$$t\langle \nabla f(y+\theta t(x-y)),x-y\rangle \leq tf(f(x)-f(y))$$

Alors $f(x)-f(y) \geq t\langle \nabla f(y+\theta t(x-y)),x-y\rangle$

En passe à la limite lorsque $t \to 0$ on obtient :

$$\langle \nabla f(y),x-y\rangle \leq f(x)-f(y)$$

Donc $f(x) \geq \langle \nabla f(y),x-y\rangle + f(y)$

$(\Leftarrow)$: Soient $x,y \in C$ et $t \in [0,1]$ il suffit de montrer que $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$

Comme C est convexe alors on a : $x_0 = tx+(1-t)y \in C$ donc :

$$x,x_0 \in C \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0),x-x_0\rangle . \tag{2.8}$$

$$y,x_0 \in C \Rightarrow f(y) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0),y-x_0\rangle . \tag{2.9}$$

Alors de (2.8) il vient que :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0),x-tx-(1-t)y\rangle \\ &= f(x_0) + (1-t)\langle \nabla f(x_0),x-y\rangle . \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0),y-tx-(1-t)y\rangle \\ &= f(x_0) - t\langle \nabla f(x_0),x-y\rangle . \end{aligned} \tag{2.11}$$

On multiple (2.10) par t et (2.11) par $(1-t)$ on obtient :

$$tf(x) \geq tf(x_0) + t(1-t)\langle \nabla f(x_0),x-y\rangle . \tag{2.12}$$

$$(1-t)f(y) \geq (1-t)f(x_0) - t(1-t)\langle \nabla f(x_0),x-y\rangle . \tag{2.13}$$

On fait la sommation entre (2.12) et (2.13) on trouve :

$$tf(x)+(1-t)f(y) \geq f(x_0) \Rightarrow f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) \qquad \square$$

Exemple 2.13. Pour montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1+x$, on utilise l'inégalité de convexité :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle f'(x_0),x-x_0\rangle$$

Prenons $f(x) = e^x$, on a f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x$ est croissante donc f est convexe, alors le graphe de f est au dessus de tous les tangentes ,pour $x_0 = 0$ ce tangente est à l'équation $y = x+1$,d'après l'inégalité de convexité il vient que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1+x$

Définition 2.25. Soient $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe, $f : C \to \mathbb{R}^n$ une fonction. f est dite monotone sur C si : $\forall\, x, y \in C \quad \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq 0$.
En particulier ,en dimension 1, une fonction est dite monotone si et seulement si elle est croissante.

Théorème 2.15. *Soit C un ouvert convexe dans E et f une fonction différentiable sur C alors :*

$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow \nabla f \text{ est monotone sur } C$$

.

Démonstration. On suppose que f est convexe. Soient $x, y \in C$. Alors d'après le théorème (2.14) on a :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle$$
$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y\rangle .$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$0 \geq \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle .$$

i. e ∇f est monotone.
Supposons maintenant que ∇f est monotone. Posons $\varphi(t) = f(x + t(y - x))\ \ , t \in [0,1]$.
Alors φ est dérivable sur [0,1] et pour tout t,

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_t), y - x\rangle \quad \text{où } \ x_t = x + t(y - x).$$

Soit $t \in [0,1]$,alors

$$\begin{aligned} \varphi'(t) - \varphi'(0) &= \langle \nabla f(x_t) - \nabla f(x), y - x\rangle \\ &= \frac{1}{t}\langle \nabla f(x_t) - \nabla f(x), x_t - x\rangle . \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité des accroissement finis sur [0,1] ,on obtient :

$$\varphi'(1) - \varphi'(0) \geq \varphi'(0)$$

ce qui se récrit

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x\rangle .$$

et d'après théorème (2.14) on déduire que f est convexe. □

Exemple 2.14. Si on prend $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) = x^2$ on a $f' = 2x$ et comme $f'' = 2 > 0$ donc f' est croissante. d'où f est convexe.

Exemple 2.15. Si on prend la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$,on a $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$. Soit $x = (x_1,y_1)$ et $y = (x_2,y_2)$,alors

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ 2y_1 - 2y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2(x_1-x_2)^2+2(y_1-y_2)^2 \geq 0$$

Donc ∇f est monotone ,d'où f est convexe.

Sous-différentielle

La notion de dérivée est fondamentale en analyse car elle permet d'approcher localement des fonctions par des modèles linéaires, plus simples à étudier. Ces modèles fournissent des renseignements sur les fonctions qu'ils approchent, si bien que de nombreuses questions d'analyse passent par l'étude des fonctions linéarisées. On rencontre beaucoup de fonctions convexes qui ne sont pas différentiables au sens classique. Pour celles-ci, on dispose toutefois de la notion de sous-différentiel qui peut jouer un rôle similaire à celui de la dérivée des fonctions plus régulières, plus lisses.

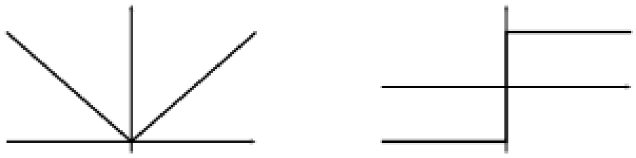
Définition 2.26. On dit que une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ est sous-différentiable au point $x \in \mathbb{R}^n$ si elle admet une minorante affine continue ,exacte en x.
Autrement dit, s'il existe $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, f(y) \geq l(y) := f(x) + \langle \xi, y - x \rangle .$$

Un tel vecteur ξ est appelé un sous-gradient de f en x. L'ensemble de tous les sous-gradients de f en x est appelé le sous-différentiel de f en x, et onle note $\partial f(x)$.

Exemple 2.16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) = |x|$. Calculons les sous-gradients de f en tout point x de $\mathbb{R}$.

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{si } x < 0 \\ \{+1\} & \text{si } x > 0 \\ [-1,1] & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Graph of f Graph of ∂f

Proposition 2.13. [4] *Soient $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ et $x \in E$. Alors $\partial f(x)$ est un ensemble convexe fermé.*

Démonstration. Montrons tout d'abord la convexité. Soient $\xi, \eta \in \partial f(x)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $y \in E$,

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle .$$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \eta, y - x \rangle .$$

En multipliant la première inégalité par $1 - \lambda$ et la seconde par λ, on obtient :

$$f(y) \geq f(x) + \langle (1 - \lambda)\xi + \lambda\eta, y - x \rangle .$$

ce qui montre que $(1-\lambda)\xi + \lambda\eta$ appartient à $\partial f(x)$. Reste à montrer que $\partial f(x)$ est fermé. Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite qui converge vers un point ξ. Pour tout $y \in E$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi_k, y - x \rangle .$$

Puisque $\langle ., y - x \rangle$ est continue, on peut passer à la limite dans l'inégalité ci-dessus,ce qui montre que $\xi \in \partial f(x)$, donc $\partial f(x)$ est fermé. $\square$

Corollaire 2.3. [4] *Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. Si f est G-différentiable en x, alors : $x \in dom(\partial f)$ et $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.*

Démonstration. Il est clair que $\nabla f(x) \in \partial f(x)$, donc $\partial f(x) \neq \emptyset$ et $x \in \partial f(x)$. Ensuite soit $\xi \in \partial f(x)$,par définition on a :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle \quad \text{pour tout } y \in E.$$

Si on prend $y = x + th$, pour tout $h \in E$ et $t > 0$, on trouve

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} \geq \langle \xi, h \rangle .$$

On passe à la limite lorsque $t \to 0^+$, alors $\langle \nabla f(x) - \xi, h \rangle \geq 0$ pour tout $h \in E$. Donc on déduit que $\xi = \nabla f(x)$. $\square$

2.2.4 Calcul sous-différentiel

Dans cette section, nous allons introduire les éléments du calcul sous-différentiel, très utile lorsqu'une fonction n'est pas différentiable et outil fondamental de l'analyse convexe.

Proposition 2.14. *(multiplication par un scalaire positif)*
Soit $\alpha > 0$,et f une fonction convexe sous-différentiable de E dans $\bar{\mathbb{R}}$,alors

$$\forall \ x \in E \ \ , \ \partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition du sous-différentiel.□

Proposition 2.15. *Si $f,g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sont deux fonctions et si $x \in dom f \cap dom g$ on a :*

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$$

Démonstration. En effet si $\xi = \xi_1 + \xi_2$ avec $\xi_1 \in \partial f(x)$ et $\xi_2 \in \partial g(x)$ on a pour tout $y \in X$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi_1, y - x \rangle$$
$$g(y) \geq g(x) + \langle \xi_2, y - x \rangle$$

Par addition on trouve

$$f(y) + g(y) \geq f(x) + g(x) + \langle \xi_1 + \xi_2, y - x \rangle$$

D'où $\xi_1 + \xi_2 \in \partial(f+g)(x)$. □

Chapitre 3

Applications sur la convexité

La convexité est une notion importons à l'analyse fonctionnelle, qui utilise pour montrer quelque théorème fondamentale et minimise des problème.

3.1 Théorème de Krein-Milman

Nous nous intéressons au problème suivant : étant donné un convexe C, peut-on trouver un sous-ensemble S de C minimal pour l'inclusion tel que $C = conv(S)$? C'est l'objet du théorème de Krein-Milman. Imaginons le cas simple d'un simplexe ou d'un polytope de $\mathbb{R}^3$ (tétraèdre, cube, . . .). Un tel convexe est engendré par un nombre fini de points : ses sommets. Intuitivement, l'ensemble des sommets est minimal parmi tous les sous-ensembles dont l'enveloppe convexe donne C. L'idée serait de formaliser l'idée de "sommet" pour des convexes quelconques, c'est ce qu'on appellera "point extrêmal". Ensuite, nous allons généraliser ce que l'on a formulé pour les polytopes. On verra que ce qui a été observé pour des polytopes est presque partagé par tous les convexes compacts. Cependant, si la dimension est infinie, il nous faut prendre l'adhérence de l'enveloppe convexe. En dimension finie, comme on peut le pressentir, l'enveloppe convexe des points extrêmaux suffit pour obtenir C.

Proposition 3.1. *([7]) Soit C un convexe compact non vide dans espace vectoriel topologique E, alors C possède au moins un point extrémal.*

Démonstration. Le résultat est évident si C est un singleton. Si C contient deux points distincts x et y, il existe d'après Hahn-Banach il existe $\phi \in E^*$, telle que $\phi(x) < \phi(y)$. Comme C est compact et ϕ continue, ϕ atteint son maximum sur K. Posons

$$F = \{x \in C; \phi(x) = \max_C \phi\}$$

est une partie extêmale de C. De plus F est fermée, donc compacte. Si K est de dimension finie n alors F est de dimension $n-1$ au plus. En dimension finie on peut donc raisonner par récurrence : F étant un compact convexe de dimension strictement plus petite que C admet un point extrémal z (hypothèse de récurrence). Et comme F est une partie extêmale de K, le point z est aussi extrémal pour C. □

Exemple 3.1. Soit le disque $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est un ensemble convexe compacte.
Les points extrémaux de C sont l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
On a $conv(A) = \underset{F convexe, A \subset F}{\cap F} = C$
Pour généralisée cette propriété on a le théorème suivant :

Théorème 3.1. *(théorème de Krein-Milman* 1940*)*
Si C est un convexe compact non-vide de E, alors $ext(C) \neq \emptyset$, et $C = \overline{conv}(ext(C))$ l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

Démonstration.

1. $ext(C) \neq \emptyset$: Montrons que C est une partie extrêmale de C. En effet, la définition montre bien que tout point de C n'est intérieur à aucun segment dont l'une des extrêmités prise dans $C/C = \emptyset$. On conclut d'après le lemme (3.1) $ext(C) \neq \emptyset$.
2. $C = \overline{conv}(ext(C))$ Comme C est un convexe fermé, on a $\overline{conv}(ext(C)) \subset C$. Pour l'autre inclusion, on montre par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in C$ tel que $x \notin \overline{conv}(ext(C))$. d'après Hahn-Banach, on peut séparer strictement x de $\overline{conv}(ext(C))$:Il existe ϕ une forme linéaire continue et $\xi > 0$ tel que

$$\phi(y) + \xi < \phi(x) \qquad \forall y \in \overline{conv}(ext(C))$$

Posons $\quad P = \{x \in C; \phi(x) = \sup_C \phi\}$
On a P est un convexe compact non vide et aussi que P est une partie extrêmale

de C. De la proposition (3.1) P contient un point extrêmal y de C... Comme $y \in \overline{conv}(ext(c))$, on a

$$\phi(y) < \phi(x) \leq \sup_C \phi = \phi(y)$$

donc contradiction. $\square$

3.2 Théorème de point fixe de brouwer (1910)

Dimension 3 : Le mathématicien Luitzen Egbertus Jan Brouwer remarqua, en mélangeant son café au lait, que le point central de la surface du liquide, au milieu du tourbillon créé par le mouvement rotatoire de la cuillére, restait immobile. Il examina le problème de cette façon : à tout moment, il y a un point de la surface qui n'a pas changé de place. En dimension 2, il formula ce résultat autrement : je prends une feuille horizontale, une autre feuille identique que je froisse et que je replace en l'applatissant sur l'autre. Un point de la feuille froissée est á la même place que sur l'autre feuille. En dimension n, il obtient le résultat suivant :

Théorème 3.2. *[17] Soit C un sous-ensemble compact, convexe et non-vide de $\mathbb{R}^n$ et supposons que f soit une fonction continue de C dans C. Alors f admet un point fixe. En particulier, si B^n désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, alors toute application continue $f : B^n \to B^n$ admet (au moins) un point fixe.*

Démonstration. Nous allons montrer dans un première temps qu'il suffit de théorème montrer le dans le cas où la boule unité fermé B_f de $\mathbb{R}^n$. K étant compact, $\exists r > 0$, $K \subset B(0, r)$
considérons alors l'application

$$\begin{array}{llll} \text{g :} & B_f & \to & B_f \\ & x & \to & g(x) = \dfrac{f(P(rx))}{r} \end{array}$$

où P la projection sur K c-à-d :

$$P(x_1, \ldots, x_{n+1}) \to (x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow P(B_{n+1}) = P(B_n)$$

Si g admet un point fixe x_0, alors

$$g(x_0) = x_0 \Longrightarrow f(P(rx_0)) = rx_0$$

Comme $P : K \to K$ donc $P(rx_0) = rx_0$, donc $f(rx_0) = rx_0$. donc f admet un point fixe. Montrons à présent le théorème lorsque $K = B_f(\bar{0}, 1)$. Pour cela nous aurons besoin de définie la notation de rétraction.

Définition 3.1. On appelle rétraction de l'espace topologie E sur un fermé F de E tout fonction continue de E dans F, qui est l'identité sur F. $R : E \to F$ tel que $R(x) = x$

Par l'absurde :supposons que f n'admet pas un point fixe.
On considérons une fonction F définie par :

$$\begin{array}{llll} \text{F :} & B_f & \to & S^1 = S(0,1) \\ & x & \to & F(x) = x + i(x)(x - f(x)) \end{array}$$

où $i : B_f \to S^1 \cap [f(x), x)$, donc $\|x + i(x)(x - f(x))\|^2 = 1$

$$\|x\|^2 + 2i(x)\langle x, x - f(x)\rangle + i^2(x)\|x - f(x)\|^2 - 1 = 0$$

donc $i(x) = \dfrac{-2\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{4\langle x, x - f(x)\rangle^2 - 4\|x - f(x)\|^2(\|x\|^2 - 1)}}{2\|x - f(x)\|^2}$
Donc F est continue, de plus $x \in S(0,1)$, alors $\|x\|^2 = 1$
donc

$$i(x) = \frac{-\langle x, x - f(x)\rangle \,|\, \langle x, x - f(x)\rangle \,|}{\|x - f(x)\|^2}$$

D'où $i(x) = 0 \Longrightarrow F(x) = x$, donc F est rétraction sur $S(0,1)$
D'où f admet un point fixe sur B_f (contradiction). □

Rappelons aussi que dans un espace de dimension infinie, une application continue peut très bien être non bornée sur les fermés bornés, mais ceci complique considérablement l'étude des équations non linéaires. Afin d'obtenir des théorèmes de point fixe analogues au théorème de Brouwer dans un espaces de dimension infinie, Il faudra rajouter une hypothèse de compacité ; plus précisément supposer que l'opérateur soit compact, ou qu'il laisse stable un convexe compact. C'est ce que a été remarqué par Schauder dans ses travaux entre 1930 et 1934.

3.3 Théorème de point fixe de schauder (1930)

Le théorème de Schauder, prouvé en 1930 par le mathématicien polonais Juliusz Schauder, s'avère un outil indispensable en théorie du point fixe moderne.

Théorème 3.3. *[17] Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, C une partie non vide de E, compact et convexe. Si T est une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors T a un point fixe.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $C \subset \bigcup\limits_{x\in C} B(x,\varepsilon)$. D'aprés la compacité de C il existe $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset C$ telle que $C \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$. Soit $\{\phi\}_{i=1}^{n}$ une partition continue et positive de l'unité de C tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1 \ \ , \ \ \forall x \in C \ \text{ et } \ \sup(\phi_i) \subset B(x_i \ \ \varepsilon) \ \text{ pour tout } \ 1 \leq i \leq n$$

On considère l'application $T_\varepsilon : C \to C$ définie par

$$T_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i \quad \forall x \in C$$

D'après la continutié des fonctions ϕ_i, T et la convexité de C, T_ε est continue et $T_\varepsilon(C) \subset C$. car :comme $T_\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i \quad \forall x \in C$ donc $T_\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(T(x)) = 1$ (car $T(x) \in C$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1 \ \ \forall x \in C$), et comme C convexe alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i \in C \ \ \forall x_i \in C$ (C contient tout les combinison convexes de ses éléments).
De plus

$$T_\varepsilon : C \to C_\varepsilon = conv\{x_1,\ldots,x_n\} \subset C$$

car $T_\varepsilon = \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i \ \ \forall x_i \in \{x_1,\ldots,x_n\} \ \ x \in C$, alors $T_\varepsilon(C) \subset conv\{x_1,\ldots,x_n\} \subset C$
Maintenant, soit $x \in C$, alors $T(x) \in C$ et donc

$$\begin{aligned}
|T(x) - T_\varepsilon(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))T(x)\right| \\
&\leq \left|\sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))(x_i - T(x))\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))\,|x_i - T(x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

Ceci entraine que $\sup\{|T(x) - T_\varepsilon(x)| : x \in C\} \leq \varepsilon$
Introduisons l'application continue

$$T/C_\varepsilon : C_\varepsilon \to C_\varepsilon$$

Soit F_ε un espace vectoriel engendé par $\{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $\dim F_\varepsilon = n$ et comme $C_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ est un ensemble conevexe fermé et borné, alors d'après le théorème de Brouwer, il existe $x_\varepsilon \in C_\varepsilon$ tel que $T_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Posons $\{\varepsilon_n = 1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puis que $x_{\varepsilon_n} = T_\varepsilon(x_{\varepsilon_n})$. D'après la compacité de C, on en déduit que $\{x_{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}\} \subset C$, il existe un sous suite $\{x_{\varepsilon_{n,m}} : m \in \mathbb{N}\}$ convergente vers $x^* \in C$. Montrons que $x^* = T(x^*)$.
Il est clair que $T(x_{\varepsilon_{n,m}}) \to T(x^*)$ (car T continue). On a

$$\begin{aligned} T(x_{\varepsilon_{n,m}}) &= T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - x_{\varepsilon_{n,m}} + x_{\varepsilon_{n,m}} \\ &= T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}}) + T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\|T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - x^*\right\| &= \left\|T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}}) + T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}}) - x^*\right\| \\ &\leq \left\|T(x_{\varepsilon_{n,m}}) - T_{\varepsilon_{n,m}}(x_{\varepsilon_{n,m}})\right\| + \left\|x_{\varepsilon_{n,m}} - x^*\right\| \\ &\leq \varepsilon_{n,m} + \left\|x_{\varepsilon_{n,m}} - x^*\right\| \end{aligned}$$

on passaga à la limite on trouve : $\|T(x^*) - x^*\| \leq 0$
car $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{n,m} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\varepsilon_{n,m}} = x^*$
Donc $T(x^*) = x^*$, d'où T admet un point fixe. □

3.4 La Convexité et l'optimisation

L'optimisation convexe est une théorie qui a pour but d'étudier les problèmes de recherche de minima et de maxima de fonctions convexes, E désignera un espace de Banach. Formellement, les deux problèmes se traduisent de la façon suivante : si $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe et si C est un ensemble convexe, le but est de

1. Problème de minimisation : trouver $x_0 \in E$ tel que

$$f(x_0) = \inf_{x\in C} f(x)$$

2. Problème de maximisation : trouver $x_0 \in E$ tel que

$$f(x_0) = \sup_{x \in C} f(x)$$

Définition 3.2. Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction. On dira que x_0 est un maximum (resp. minimum) local de f si $x_0 \in dom(f)$ et s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) pour tout $x \in V \cap dom(f)$. C'est un maximum (resp. minimum) global si $x_0 \in dom(f)$ et si $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) pour tout $x \in V \cap dom(f)$ et tout voisinage V de x_0.

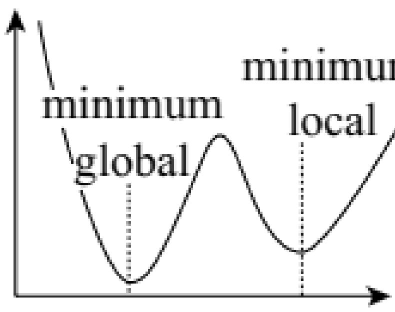


FIGURE 3.1 – Minimum local et minimum global

Proposition 3.2. *Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Supposons que f admet un maximum global (resp. local) $x_0 \in int(dom(f))$. Alors f est constant sur son domaine (resp. sur un voisinage de x_0).*

Démonstration. Par l'absurde, supposons f non-constant sur son domaine. Il existe $x \in dom(f)$ tel que $f(x) < f(x_0)$. Il existe $\lambda > 1$ tel que $\lambda x_0 + (1-\lambda)x \in int(dom(f))$ car $x_0 \in int(dom(f))$. Notons $y = \lambda x_0 + (1-\lambda)x$, alors $x_0 = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}x + \dfrac{1}{\lambda}y$. Par la convexité de f, il vient

$$f(x_0) \leq \frac{\lambda - 1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} f(y) < f(x_0)$$

d'où l'absurdité. Le cas où x_0 est un maximum local se traite de façon similaire en se restreignant à un voisnage $B(x_0, \varepsilon)$ du maximum local x_0. On suppose que f n'est pas constant sur ce voisinage et qu'il existe $x \in B(x_0, \varepsilon)$ tel que $f(x) < f(x_0)$. Le segment $[x, 2x_0 - x]$ est inclus dans $B(x_0, \varepsilon)$ puis on utilise la convexiété de f pour obtenir

$$f(x_0) = f(\frac{x}{2} + \frac{2x_0 - x}{2}) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(2x_0 - x) < f(x_0)$$

et on a une absurdité. □

Théorème 3.4. *Soit E un espace de Banach, K un fermé convexe non vide de E et $f : K \to \mathbb{R}$. Si f est strictement convexe sur K, alors elle a au plus un point de minimum sur K.*

Démonstration. Soient x et y deux points de minimum. S'ils sont distincts alors par stricte convexité de f, on a

$$f(\frac{x+y}{2}) < f(x) = f(y) = \inf_{z \in K} f(z)$$

ce qui est absurde. □

Proposition 3.3. *Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Tout minimum local de f est un minimum global.*

Démonstration. Supposons que x_0 est un minimum local de f et soit $x \in dom(f)$. Il existe un voisinage ouvert convexe V de x_0 tel que $f(z) \geq f(x_0)$ pour tout $z \in V \cap dom(f)$. Par convexité, le segment $[x_0, x]$ est inclus dans $dom(f)$. Il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $z = \lambda x_0 + (1-\lambda)x \in V$. Donc, par convexité de f, on a

$$f(z) \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda) f(x)$$

et il s'ensuit que

$$f(x) \geq \frac{1}{1-\lambda} f(z) - \frac{\lambda}{1-\lambda} f(x_0) \geq \frac{1}{1-\lambda} f(x_0) - \frac{\lambda}{1-\lambda} f(x_0) = f(x_0)$$

Théorème 3.5. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et C une partie convexe dans E et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Alors l'equation $f(x) = \inf_{x \in C} (f(x))$ possède au plus un solution.*

Démonstration. On fait la démonstration par l'absurde ; supposons qu'il existe deux solution x^* et $x^{*'}$ tel que : $f(x^*) = \inf_{x \in C} (f(x))$ et $f(x^{*'}) = \inf_{x \in C} (f(x))$
et comme f est strictement convexe il vient que :

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{*'}) &\leq \frac{1}{2}f(^*) + \frac{1}{2}f(^{*'}) \\ &= \frac{1}{2}\inf_{x \in C} (f(x)) + \frac{1}{2}\inf_{x \in C} (f(x)) \\ &= \inf_{x \in C} (f(x)) \end{aligned}$$

et comme $\inf_{x \in C} (f(x))$ et le plus petit élément dans $f(C)$ et $f(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{*'}) < \inf_{x \in C} (f(x))$ donc c'est une contradiction. □

Conclusion

Le but de ce travail a été de faire une étude générale sur la convexité, nous mettons en évidence les fonctions convexes tel que les fonctions convexes d'une variable réelle forment une classe importante de fonctions le contexte de ce qu'on appelle habituellement l'analyse réelle. Ils sont utiles dans l'optimisation - comme le sera montré dans ce travail, mais aussi dans plusieurs domaines de mathématiques appliquées, où leurs propriétés sont souvent des ingrédients clés pour dériver a priori des limites, des inégalités fortes, etc.

Donc, nous espérons que ce travail, soit un document utile et un point de départ pour d'autres projets de recherche.

En perspectives, j'espèrede pour suivre l'étude sur ce sujet et pouvoir développer certaines des idées, en avenir proche. A titre d'exemple, l'étude de la dualité et la convexité en dimension infinie.

Bibliographie

[1] Bruno Aebrischer,Géométrie,vuibert,2011

[2] Charalambos D. Aliprantis and Kim. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis* : A Hitchhiker's Guide, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[3] D.Aze,*Éléments d'analyse convexe et variationnelle* , Ellipses , 1998.

[4] Juan Peypouquet, *Convex Optimization in Normed Spaces : Theory, Methods and Examples*, Springer Briefs in Optimization, Springer International Publishing, 2015.

[5] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty , *Optimisation et Analyse convexe* , EDP Sciences , 2009.

[6] J-B. Hiriart-Urruty, J-C. Lemarchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer Verlag, Heidelberg, 1993, 2 volumes.

[7] Joseph Lehec,*Analyse Convexe Approfondie*,Université Paris-Dauphine,2014

[8] Haïm Brézis,*Analyse Fonctionnelle, théorie et applications.*Dunod,1999.

[9] Hazi Mohammed,Topologie,Tome 2,2007

[10] I.Ekland et R.Temam , *Analyse convexe et problème variationnel*, Gauthier-Villars,Dunod,1973.

[11] Guy Cohen. *Convexité et Optimisation.* Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2000 .

[12] Kada Allab,*Éléments d'analyse*,Tome 2,Office des publications universitaire ,2007

[13] Lakhdar Meziani ,*Introduction à l'analyse mathématique Topologie Générale* , 1996 , Batna University Press .

[14] Laurent Schwartz , *Cours d'Analyse* ,vol 1 , Hermann , Paris 1967.

[15] M.Willem , *Analyse convexe et optimisation* , Ciaco ,1987.

[16] R.Tyrrell Kockafellar,*Convex Analysis*,Princeton University Press,1970

[17] S.Djebali et A.Ouahab,*Analyse Multivoque et Inclusion Différentielles*.

[18] Viorel Barbu and Teodor Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Netherlands, 2012.

[19] Yves-Stonntag , *Topologie et Analyse Fonctionnelle* , Ellipses , 1997.