Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Univérsité Ahmed Draia Adrar

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et d'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

En Mathématiques

Spécialité :

Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

YOUSFI Abir

Thème

Étude qualitative d'une équation et inclusion différentielle du second ordre

Soutenu publiquement le 20/06 / 2021 devant le jury composé de :

Mr. OUAHAB Noureddine	Maître assistant A	Université d'Adrar	Président
Mr. Baliki Abdessalam	Maître de conférence A	Université d'Adrar	Rapporteur
Mr. GASMI Laid	Maître de conférence B	Université d'Adrar	Examinateur

Année Universitaire : 2020-2021

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République algérienne populaire et démocratique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE AHMED DRAYA - ADRAR | جامعة احمد دراية - ادرار

BIBLIOTHÈQUE CENTRALE | المكتبـــة المركـــزية

Service de recherche bibliographique | مصلحة البحث البيبليوغرافي

N°.......................B.C/S.R.B//U.A/2021 | الرقم...........م م/م.ب.ب /ج.أ/2021

شهادة الترخيص بالإيداع

انا الأستاذ(ة): Baliki Abdessalam

المشرف مذكرة الماستر.

الموسومة بـــ : Étude qualitative d'une équation et inclusion différentielle du second ordre

من إنجاز الطالب(ة): Yousfi Abir

و الطالب(ة): —

كلية : Sciences et Technologie

القسم : Mathématiques

التخصص: Analyse fonctionnelle et applications

تاريخ تقيم / مناقشة: ....

أشهد ان الطلبة قد قاموا بالتعديلات والتصحيحات المطلوبة من طرف لجنة التقيم / المناقشة، وان المطابقة بين النسخة الورقية والإلكترونية استوفت جميع شروطها.

وبإمكانهم إيداع النسخ الورقية (02) والاليكترونية (PDF).

- امضاء المشرف:

Baliki Abdessalam

ادرار في : ....06 JUIL 2021............

مساعد رئيس القسم:

مساعد رئيس قسم الرياضيات والإعلام الآلي مكلف بالتدريس والتعليم في التدرج

ملزوزي حاج

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي ★ جامعة ادرار ★ كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

ملاحظة :لاتقبل أي شهادة بدون التوقيع والمصادقة.

Dédicace

Ce modeste travail est dédié :

À mes chers parents ma mère et mon père, qui ont sacrifié leur vie pour mon réussite.

À ma belle soeur **FATIMA ZOHRA**.

À mes frères **SOUFIAN, HOUSSAM EDDINE, SLIMANE, ISMAIL**.

À ma chère coupine **ZIRAR IMANE HANAA**.

À ma Collègue qui étaient du soutien **ABDELLAOUI FATIMA**.

Remerciements

Avant tout, je remercie, Dieu tout puissant de m'avoir donné le couroge, la force, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincére remerciement à mon encadreur **BALIKI Abdessalam** pour le sujet intéressant qu'il m'a proposé. Je le remercie encore pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail. Sans ses idées et son expertise, réaliser ce modeste travail n'aurait pas été possible.

J'exprime mes sincères remerciements à **Mr. OUAHAB Noureddine**, pour m'avoir fait le grand honneur de présider ce jury de thèse.

Je souhaite remercier **Mr. GASMI Laid**, et c'est un grand honneur pour moi il est partie du jury.

Mes remerciements ne seraient pas complets si je ne remerciais pas tous les professeurs de mathématiques et tous ceux qui m'ont enseigné dans ma vie universitaire.

Enfin, je remercie à toutes les personnes qui ont conribué de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est consacré à la présentation des résultats d'existence de solutions des équations et inclusions différentielles semi-linéaire avec retard. Des résultats sur le comportement des solutions sont également donnés. Ces résultats font l'objet des travaux [2] et [3].

Les problèmes considérés dans ce travail apparaissent dans divers modèles mathématiques pour décrire des phénomènes de physique, mécanique, biologie et autres domaines, et nous renvoyons le lecteur aux monographies [13, 14, 15, 16, 18, 27, 28] .

Ce mémoire se compose de deux chapitres, le premier chapitre nous donnons les définitions et les notions générales sur les systèmes d'évolution, et le deuxième chapitre nous prouvons l'existence de solutions faibles au problème

$$y''(t) - A(t)y(t) = f\left(t, y_t\right), \quad t \in J := [0, \infty[\tag{1}$$

$$y_0 = \phi, \quad y'(0) = \tilde{y} \tag{2}$$

et l'attractivité des solutions faibles, et aprés nous donnons l'existence de solutions faibles du problème

$$\begin{cases} y''(t) - A(t)y(t) \in F\left(t, y_t\right), \quad t \in J := [0, \infty) \\ y_0 = \phi, y'(0) = \tilde{y} \end{cases} \tag{3}$$

et montrons l'attractivité de la solution faible.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques notions topologiques

Définition 1.1. (**Espaces métriques**)
Une distance (ou métrique) sur un ensemble X est une application :

$$\begin{array}{rccc} d: & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y) \end{array}$$

possédant, pour tous x, y, $z \in X$, les propriétés suivantes :

1) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

2) $d(x,y) = d(y,x)$;

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Muni de la distance d, X est appelé espace métrique, on note parfois un tel espace (X,d). Le nombre réel positif $d(x,y)$ est appelé la distance entre x et y dans X.

Définition 1.2. (**Espace vectoriels normés**)
Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ où $\mathbb{C})$. On appelle norme sur l'espace vectoriel X toute fonction, notée $x \longrightarrow \|x\|$, possédant les propriétés suivantes :

1) posivité : pour tout $x \in X$ $\|x\| \neq 0$, pour $x \neq 0$, $\|0\| = 0$;

2) transformation par les homothéties : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in X$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

3) inégalité triangulaire : $\forall x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si X est muni d'une telle norme, on l'appelle espace vectoriel normé.

Notation 1.1. On note par :

1. $B(a, r)$: la boule ouverte de centre a et de rayon r.

2. $\overline{B}(a, r)$: la boule fermée de centre a et de rayon r.

Proposition 1.1. *[8] L'ensemble de parties $\mathcal{T}_d$ défini par*

$$\mathcal{T}_d = \{\mathcal{O} \subset X \mid \forall x \in \mathcal{O}, \exists B\,(x, r_x) \subset \mathcal{O}\}$$

est une topologie sur X.

Définition 1.3. (**La métrique associée à la norme**)
Soit E un espace vectoriel, l'application $d : (x, y) \longrightarrow \|x - y\|$ est une métrique sur E invariante par translation (c'est-à-dire $d(x + a, y + a) = d(x, y)$).
On dit que d est la métrique associée à la norme.

Remarque 1.1. On supposera toujours qu'un espace vectoriel normé est muni de cette métrique et de la topologie associée.

Définition 1.4. (**Espace de Banach**)
Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans X est convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme).

Définition 1.5. (**Espaces topologiques métrisables**)
Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit métrisables s'il existe une métrique d sur X telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Définition 1.6. On dit qu'un espace métrique X est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense.

Définition 1.7. (**Application équicontinue**)
Soient X, Y deux espace vectoriel normé et $F \subset C(X, Y)$.
F est dite équicontinue si pour toute $f \in F$:

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Si X est compact, F est uniformément équicontinue, pour toute $f \in F$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X : \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1 (Banach-Picard [9]). *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \longrightarrow X$ une application contractante, c'est-à-dire dans laquelle il existe $0 < k < 1$ de sorte que*

$$\forall x, y \in X,\ d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors f a un unique point fixe.

Définition 1.8. (**Opérateur fermé**)
Soient E et F deux espaces de Banach, un opérateur de E dans F est dit fermé si son graphe est un sous-espace fermé de $E \times F$.

Définition 1.9. (**Opérateurs linéaires fermés**)
Soit X et Y des espaces de Banach. Un opérateur linéaire A avec un domaine $\mathcal{D}(A) \subseteq X$

et l'image $ImA \subseteq Y$, est appelé opérateur fermé s'il a la propriété que chaque fois que (x_n) est une suite dans $\mathcal{D}(A)$ satisfaisant $x_n \longrightarrow x$ dans X et $Ax_n \longrightarrow y \in Y$, alors $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$.

Proposition 1.2. *L'opérateur A est fermé si et seulement si son graphe*

$$Graph(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$$

est un sous-espace fermé de $X \times Y$ avec la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

Pour plus de détails voir [5], [10], [21], [23], et [25].

1.2 Notions de mesure

Définition 1.10. (**Tribu**)
Une famille non vide $\mathcal{T}$ de parties de E est une tribu sur E lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :

i) $E \in \mathcal{T}$;

ii) si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c = E \backslash A \in \mathcal{T}$ (stabilité par passage au complémentaire) ;

iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ (c'est-à-dire $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable).

On déduit de la définition 1.10 les propriétés élémentaires suivantes :

iv) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

v) $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$;

vi) si A et $B \in \mathcal{T}$ alors $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{T}$ et $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) \in \mathcal{T}$.

Définition 1.11. (**Espace mesurable**)
Si $\mathcal{T}$ est une tribu de E, les éléments de $\mathcal{T}$ sont dits $\mathcal{T}$ - mesurable (au mesurables quand il n'ya pas de risque de confusion) et le couple $(E, \mathcal{T})$ est appelé espace mesurable.

Proposition 1.3. *[7] Soit I un ensemble quelconque d'indice et soit $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur E. Alors*
$bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu sur E.

Proposition 1.4. *[7] Soit δ une famille de parties de E. il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) sur E contenant δ, c'est l'intersection de toutes les tribus contenant δ. On l'appelle tribu engendrée par δ et on la note $\sigma_E(\delta)$ (ou simplement $\sigma(\delta)$ quand il n'y a pas de risque de confusion).*
On dit aussi que δ est un sous-ensemble générateur de la tribu $\sigma_E(\delta)$.

Si l'ensemble E possède une structure topologique, la notion de tribu engendrée permet de définir la plus petite tribu adaptée à cette structure.

Définition 1.12. (**Tribu borélienne**)

1. Soit E un espace métrique (plus généralement topologique) et $\mathcal{O}$ la famille des ouverts de E. On appelle tribu du Borel ou tribu borélienne et on la note $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par la famille $\mathcal{O}$. Autrement dit,
$$\mathcal{B}(E) = \sigma_E(\mathcal{O}).$$
2. On appelle borélien de E tout élément de la tribu $\mathcal{B}(E)$.

Remarque 1.2. La tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ est également engendrée par la famille $\mathcal{F}$ des parties fermées de E.

Définition 1.13. (**Applications mesurables**)
Soient $(E,\mathcal{T})$ et $(E', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables et soit f une application de E dans E'.

1. l'application f est dite $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ - mesurable si $f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$, c'est-à-dire. pour tout $A' \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(A') \subset \mathcal{T}$.

2. Si $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont les tribus de Borel respectives de E et E' espaces métriques (plus généralement topologiques), on dit encore que f est borélienne.

Définition 1.14. (**Mesure positive**)

1. On appelle mesure positive sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{T})$ toute application μ de $\mathcal{T}$ dans $[0, +\infty]$ vérifiant :

   i) $\mu(\emptyset) = 0$;

   ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, on a
$$\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 0} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu\left(A_n\right)$$
   cette propriété est appelée σ - additivité de μ et μ est dit σ - additive.

2. On dit que le triple $(E, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré.

Définition 1.15. 1. Une mesure μ est dite finie ou bornée si $\mu(E) < +\infty$.

2. Une mesure μ est dite σ - finie s'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ vérifiant $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mu\left(A_n\right) < +\infty$

1.3 Intégrales de Bochner

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach complexe.

Définition 1.16. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\longrightarrow X$.

1. f est dite étagée si pour tout $x \in]a,b[$ il existe une famille finie $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de X et une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ de parties mesurables de $]a,b[$ vérifiant

$$\begin{cases} \cup_{i\in I} A_i =]\,a,b[, \\ \forall i,j \in I, i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing, \end{cases}$$

telles que

$$f(x) = \sum_{i\in I} x_i \mathbb{I}_{A_i},$$

où $\mathbb{I}_{A_i}$ est la fonction caractéristique de A_i.

2. f est dite Bochner-mesurable, c'est-à-dire. mesurable au sens de Bochner, s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{p.p. } x \in]a,b[.$$

3. f est dite Bochner-intégrable, c'est-à-dire. intégrable au sens de Bochner, s'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers f presque partout et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \|f_n(x) - f(x)\|\, dx = 0.$$

La proposition suivante donne un lien entre l'intégrale de Bochner et l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 1.5. *[22] Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f :]a,b[\longrightarrow X$ une fonction Bochner-mesurable.*
Alors f est Bochner-intégrable si et seulement si l'application $x \in]a,b[\longmapsto \|f(x)\|$ est Lebesgue-intégrable.

Remarque 1.3. La Proposition 1.5 implique que les propriétés des intégrales de Lebesgue sont valables pour les intégrales de Bochner. De plus on a

$$\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leqslant \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

1.4 Quelques notions de semi-groupe

Définition 1.17. Soit X un espace de Banach. Une famille à un paramètre $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, des opérateurs linéaires bornés de X dans X est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si

i) $T(0) = I$, (I est l'opérateur d'identité sur X).

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$ (la propriété semi-groupe).

Définition 1.18. Un semi-groupe $T(t)$ est uniformément continu si

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - T(0)\|_{B(E)} = 0,$$

ou

$$\lim_{|t-s|\to 0} \|T(t) - T(s)\|_{B(E)} = 0.$$

Définition 1.19. On dit que le semi-groupe $\{T(t)_{t\geq 0}\}$ est fortement continu (ou bien un C_0 semi-groupe) si, pour chaque $x \in E$, l'application $t \longmapsto T(t)(x)$ est fortement continue, c'est-à-dire

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.20. Soit $T(t)$ un C_0 semi-groupe défini sur E. Le générateur infinitésimal A de $T(t)$ est l'opérateur linéaire défini par

$$A(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)(x) - T(0)x}{t}, \qquad \text{pour } x \in D(A),$$

où

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)(x) - x}{t} \text{ existe dans } E \right\}.$$

1.5 Systèmes d'évolution

Soit X un espace de Banach. Pour chaque t, $0 \leq t \leq T$, soit $A(t) : D(A(t)) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur linéaire dans X et soit $f(t)$ une fonction à valeur sur X. On considère le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + f(t) \quad \text{for} \quad s < t \leq T \\ u(s) = x \end{cases} \tag{1.1}$$

Le problème de la valeur initiale (1.1) est appelé un problème d'évolution. Une fonction $u : [s, T] \longrightarrow X$ est une solution classique de (1.1) si u est continue sur $[s, T]$, $u(t) \in D(A(t))$ pour $s < t \leq T$, u est continument différentiable sur $s < t \leq T$ et satisfait (1.1). Dans le cas où $A(t) = A$ indépendant de t. La solution du problème non-homogène peut être trouver par la méthode de la variation de la constante à partir de la solution du problème homogène.

$$u(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{1.2}$$

où $T(t)x$ est la solution du problème de la valeur initiale

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = x. \tag{1.3}$$

Lorsque $A(t)$ dépend de t, on considère le problème de la valuer initiale homogène :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) & 0 \leq s < t \leq T \\ u(s) = x \end{cases} \tag{1.4}$$

Afin d'avoir une idée du comportement des solutions de (1.4), nous considérons d'abord le cas simple où pour $0 \leq t \leq T$, $A(t)$ est un opérateur linéaire borné sur X et $t \longrightarrow A(t)$ est continu dans la topologie uniforme de l'opérateur. Pour ce cas, nous avons :

Théorème 1.2. *[24] Soit X un espace de Banach et pour chaque t, $0 \leq t \leq T$, $A(t)$ est un opérateur linéaire borné sur X. Si l'application $t \longrightarrow A(t)$ est continue dans la topologie uniforme de l'opérateur, alors pour chaque $x \in X$ le problème de la valeur initiale (1.4) a une solution classique unique u.*

Preuve En utilisant la méthode des itérations de Picard. Soit $\alpha = \max_{0 \leq t \leq T} ||A(t)||$ et on définit une application S de $C([s, T] : X)$ en lui-même par

$$(Su)(t) = x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau \tag{1.5}$$

En note $||u||_\infty = \max_{0 \leq t \leq T} ||u(t)||$, il est facile de vérifier que

$$\|Su(t) - Sv(t)\| \leq \alpha(t-s)\|u-v\|_\infty, \quad s \leq t \leq T. \tag{1.6}$$

$$\|S^n u(t) - S^n v(t)\| \leq \frac{\alpha^n (t-s)^n}{n!}\|u-v\|_\infty, \quad s \leq t \leq T,$$

et donc,

$$\|S^n u - S^n v\|_\infty \leq \frac{\alpha^n (T-s)^n}{n!} \|u - v\|_\infty.$$

Pour n assez grand $\dfrac{\alpha^n (T-s)^n}{n!} < 1$ et par une généralisation bien connue du principe de contraction de Banach, S a un point fixe unique u dans $C([s,T] : X)$ pour lequel

$$u(t) = x + \int_s^t A(\tau) u(\tau) d\tau \tag{1.7}$$

Puisque u est continu, le côté droit de (1.7) est différentiable. Ainsi u est différentiable et sa dérivée, obtenue en différenciant (1.7), vérifie $u^{'}(t) = A(t)u(t)$. Donc, u est une solution du problème de la valeur initiale (1.4). Puisque chaque solution de (1.4) est aussi une solution de (1.7), la solution de (1.7) est unique. □

On définit l '«opérateur de solution» du problème de valeur initiale (1.4) par

$$U(t,s)x = u(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq t \leq T \tag{1.8}$$

où u est la solution de (1.4). $U(t,s)$ est une famille d'opérateurs à deux paramètres. De l'unicité de la solution du problème de la valeur initiale (1.4), il s'ensuite facilement que si $A(t) = A$ est indépendant de t alors $U(t,s) = U(t-s)$ et la famille d'opérateurs à deux paramètres se réduit à la famille de paramètres $U(t)$, $t \geq 0$, qui est bien sûr le semi-groupe généré par A. Les principales propriétés de $U(t,s)$, dans notre cas particulier où $A(t)$ est un opérateur linéaire borné sur X pour $0 \leq t \leq T$ et $t \longrightarrow A(t)$ est continue dans la topologie uniforme de l'opérateur, sont données dans le théorème suivant.

Théorème 1.3. *[24] Pour chaque $0 \leq s \leq t \leq T$, $U(t,s)$ est un opérateur linéaire borné et*

- **i)** $\|U(t,s)\| \leq \exp\left(\int_s^t \|A(\mathcal{T})\| d\mathcal{T}\right)$.
- **ii)** $U(t,t) = I, U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$ *pour* $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$.
- **iii)** $(t,s) \rightarrow U(t,s)$ *est continue dans la topologie de l'opération uniforme pour* $0 \leq s \leq t \leq T$.
- **iv)** $\partial U(t,s)/\partial t = A(t)U(t,s)$ *pour* $0 \leq s \leq t \leq T$.

v) $\partial U(t,s)/\partial s = -U(t,s)A(s)$ *pour* $0 \leq s \leq t \leq T$

Dans ce qui suit, soit $\{A(t), t \geq 0\}$ une famille d'opérateurs linéaires fermés sur l'espace de Banach E avec le domaine $D(A(t))$ qui est dense dans E et indépendant de t. L'existence de solutions au problème(2.1)-(2.2) est liée à l'existence d'un opérateur d'évolution $U(t,s)$ pour le problème homogène

$$y''(t) = A(t)y(t), \quad t \in J. \tag{1.9}$$

Ce concept d'opérateur d'évolution a été développé par Kozak [19].

Définition 1.21. Une famille d'opérateurs bornés $\mathcal{U}(t,s) : E \to E, (t,s) \in \Delta := \{(t,s) \in J \times J : s \leq t\}$, est appelée opérateur d'évolution de l'équation (1.9) si les conditions suivantes sont vérifiées.

(D_1) Pour tout $x \in E$ l'application $(t,s) \longmapsto \mathcal{U}(t,s)x$ est continuement dérivable et :

(a) pour tout $t \in J, \mathcal{U}(t,t) = 0$;

(b) pour tous $(t,s) \in \Delta$ et pour tout $x \in E$, $\left.\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,s)x\right|_{t=s} = x$ et $\left.\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)x\right|_{t=s} = -x$.

(D_2) Pour tous $(t,s) \in \Delta$ si $x \in D(A(t))$, puis $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)x \in D(A(t))$, la carte $(t,s) \longmapsto \mathcal{U}(t,s)x$ est de classe C^2, et :

(a) $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{U}(t,s)x = A(t)\mathcal{U}(t,s)x$;

(b) $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathcal{U}(t,s)x = \mathcal{U}(t,s)A(s)x$;

(c) $\left.\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\mathcal{U}(t,s)x\right|_{t=s} = 0$.

(D_3) Pour tous $(t,s) \in \Delta$ si $x \in D(A(t))$, alors $\dfrac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)x \in D(A(t))$, $\dfrac{\partial^3}{\partial t^2 \partial s}\mathcal{U}(t,s)x$ et $\dfrac{\partial^3}{\partial s^2 \partial t}\mathcal{U}(t,s)x$ existent, et :

(a) $\dfrac{\partial^3}{\partial t^2 \partial s}\mathcal{U}(t,s)x = A(t)\dfrac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)x\,;$

(b) $\dfrac{\partial^3}{\partial s^2 \partial t}\mathcal{U}(t,s)x = \dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,s)A(s)x.$

De plus, l'application $(t,s) \longmapsto A(t)\dfrac{\partial}{\partial s}(t)\mathcal{U}(t,s)x$ est continue.

1.6 Application multivoque

Soit (X,d) un espace métrique et Y un sous-ensemble de X. On note

$$P(X) = \{Y \subset X : Y \neq \emptyset\},$$

$$P_b(X) = \{Y \subset X : Y \text{ borné }\},$$

$$P_f(X) = \{Y \subset X : Y \text{ fermé }\},$$

$$P_{cp}(X) = \{Y \subset X : Y \text{ compact }\},$$

$$P_{cv}(X) = \{Y \subset X : Y \text{ convexe }\},$$

$$P_{cv,cp}(X) = P_{cv}(X) \cap P_{cp}(X).$$

Définition 1.22. Une multifonction (ou application multivoque) (ou multiapplication) F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de Y. On notera $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ (les notations $F : X \longrightarrow 2^Y$ et $F : X \multimap Y$ sont aussi utilisées dans la littérature).

Définition 1.23. On appelle graphe de la multi-fonction F, l'ensemble

$$\mathrm{Graph}(F) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}\,.$$

F est à graphe fermé si $Graph(F)$ est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est fermée. Le graphe d'une multi-fonction joue un rôle extrêmement important, en particulier pour définir les dérivées des multi-fonctions.

Exemple 1.1.

$$F : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$t \mapsto F(t) = [t, 1]$$

$$\text{Graph}(F) = \left\{(t, x) \in [0,1]^2 / x \in [t, 1]\right\}.$$

Exemple 1.2.

$$F : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$t \mapsto F(t) = \begin{cases} [0,1] & \text{si} \quad t \neq \dfrac{1}{2} \\ [0,1/2] & \text{si} \qquad\qquad t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Graph}(F) &= \left\{(t, x) \in [0,1]^2 : x \in F(t)\right\} \\ &= \left(\left([0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[\right) \times [0,1]\right) \cup \left(\left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right). \end{aligned}$$

Définition 1.24. On appelle image de F l'union des images $F(x)$

$$\text{Im}(F) = \bigcup_{x \in E_1} F(x).$$

Définition 1.25. Une multifonction $F : X \longrightarrow P(Y)$ est dite

1. compact, si l'image de $F(X)$ est relativement compacte en Y ;

2. localement compact, si tout point $x \in X$ a un voisinage V_x tel que la restriction de F à V_x soit compacte.

Définition 1.26. Si X et Y sont des ensembles, $F : X \to 2^Y \backslash \{\emptyset\}$ une multifonction et $A \subseteq Y$:

(a) l'image inverse faible de A est

$$F^-(A) = \{x \in X \ : \ F(x) \cap A \neq \emptyset\},$$

(b) l'image inverse forte de A est

$$F^+(A) = \{x \in X : F(x) \subseteq A\}.$$

1.7 Multifonctions mesurables

Soient $(\Omega, \sum)$ est un espace mesurable, (X, d) un espace métrique séparable et $F : \Omega \longrightarrow P(X)$ une multifonction.

Définition 1.27. F est dite :

(a) Fortement mesurable si pour tout $C \subseteq X$ fermé, on a

$$F^-(C) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap C \neq \emptyset\} \in \sum,$$

(b) Mesurable si pour tout $U \subseteq X$ ouvert, on a

$$F^-(U) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap U \neq \emptyset\} \in \sum,$$

(c) "K-mesurable" si pour tout $K \subseteq X$ compact, on a

$$F^-(K) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap K \neq \emptyset\} \in \sum,$$

(d) À graphe mesurable si

$$GraphF = \{(\omega, x) \in \Omega \times X : x \in F(\omega)\} \in \sum \times B(X),$$

où $B(X)$ σ-algèbre générée par la famille de tous les ensembles ouverts à partir de X.

Proposition 1.6. *[26] Si $F : \Omega \longrightarrow P(X)$ est fortement mesurable, alors $F(.)$ est mesurable.*

Preuve Soit $U \subseteq X$ ouvert. Rappelons que dans un espace métrisable, tout ensemble ouvert dans un ensemble F_σ-ensemble (c'est-à-dire union dénombrable d'ensembles fermés). Donc $U = \cup_{n>1} C_n, c_n \subseteq X$ fermé $n \geq 1$.
On a

$$F^{-}(U) = F(\cup_{n>1} C_n) = \cup_{n>1} F(C_n) \in \sum .$$

Donc $F(.)$ est mesurable.

Proposition 1.7. *[26] Si $F : \Omega \longrightarrow P(X)$ est mesurable si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application*

$$\omega \to d(x, F(\omega)) = \inf \{d(x, x') : x' \in F(\omega)\}$$

à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\}-$ est mesurable.

Proposition 1.8. *[26] Si $F : \Omega \longrightarrow P(X)$ est mesurable, $F(.)$ est a un graphe mesurable.*

Rappelant que pour $U \subseteq X$ ouvert on a $A \cap U \neq \emptyset$ si et seulement si $\bar{A} \cap U \neq \emptyset$, on a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1.9. *[26] Si $F : \Omega \longrightarrow P(X)$ est mesurable si et seulement si $F(.)$ est mesurable.*

Comme c'était le cas dans notre étude topologique des multifonctions, la situation se simplifie considérablement avec les multifonctions à valeurs compactes.

Proposition 1.10. *[26] Si $F : \Omega \to \mathcal{P}_{cp}(X)$, alors F est fortement mesurable si et seulement si elle est mesurable.*

1.8 Métrique de Hausdorff

Définition 1.28. Soit (X, d) un espace métrique et A, B deux sous-ensembles de X. Soit A, $B \in P(X)$, considérons

$$H_d : P(X) \times P(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

la distance de Hausdorff entre A et B donnée par :

$$H_d(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(A, b)\right\},$$

où

$$d(a, B) = \inf\{d(a, b) : b \in B\},$$

et

$$d(A, b) = \inf\{d(a, b) : a \in A\}.$$

Alors, $(P_{b,f}(X), H_d)$ est un espace métrique et $(P_f(X), H_d)$ est un espace métrique généralisé (complet).

Définition 1.29. (Version locale) Soit $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque.

(a) F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y avec $F(x_0) \subseteq U$ il existe un ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on a que $F(x) \subseteq U$.

(b) F est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si l'ensemble $\{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est ouvert pour tout ouvert $U \in Y$.

Proposition 1.11. *[11] Soit $F : X \longrightarrow P(Y)$ une application multivoque telle que $F(X) \subset K$ et le graphe de F est fermé, où K est un ensemble compact. Alors F est semi-continu supérieurement.*

Définition 1.30. Soit E un espace de Banach. Une application multivoque $F : J \times E \longrightarrow E$ est dite L^1 - Carathéodory si

i) $t \longmapsto F(t,y)$ est mesurable pour tout $y \in E$,

ii) $y \longmapsto F(t,y)$ est semi-continu supérieurement pour presque chaque $t \in J$,

iii) pour tout $\rho > 0$, il existe $\psi_\rho \in L^1(J, R_+)$ tel que

$$\|F(t,y)\|_P \leq \psi_\rho(t), \text{ pour tout } |y| \leq \rho \text{ et presque chaque } t \in J,$$

tel que $\|F(t,y)\|_P = \sup\{|f| : f \in F(t,y)\}$.

Définition 1.31. Soit X, Y des ensembles non vides et $F : X \longrightarrow P(Y)$. L'application univoque $f : X \longrightarrow Y$ est appelé une sélection de F si et seulement si $f(x) \in F(x)$, pour chaque $x \in X$. L'ensemble de toutes les sélection de F est noté S_F.

Définition 1.32. (sélection mesurable)
Soit (Ω, Σ) est un espace mesurable et (X,d) un espace métrique séparable.
$F(.)$ est dit mesurable si pour tout $U \subseteq X$ ouvert, on a

$$F^{-}(U) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap U \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.1. *(Lasota and Opial [20]) Soit E un espace de Banach et I intervalle fermé borné, et F une application multivoque L^1-Caratheodory à valeurs convexes compactes, et soit $\mathcal{L} : L^1(I,E) \to C(J,E)$ une application linéaire continue. Alors l'opérateur*

$$\mathcal{L} \circ S_F : C(I,E) \to P_{cp,cv}(C(I,E)),$$

est un opérateur à graphe fermé dans $C(I,E) \times C(I,E)$.

Lemme 1.2. *[11] Soit X un espace métrique séparable. Alors toute application multivoque mesurable $F : X \longrightarrow P_f(X)$ a une sélection mesurable.*

Définition 1.33. Soit $T : X \longrightarrow P(X)$ une application multivoque. Un élément $x \in X$ est dit un point fixe de T si $x \in T(x)$.

1.9 Théorèmes importants

Le critère de compacité suivant dans $C(\mathbb{R}_+,E)$ est particulièrement utile.

Lemme 1.3. *([6] [Corduneanu]) Soit $C \subset BC(\mathbb{R},E)$ un ensemble satisfaisant les conditions suivantes :*

i) *C est borné en $BC(\mathbb{R},E)$;*

ii) *les fonctions appartenant à C sont équicontinues sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$;*

iii) *l'ensemble $C(t) := \{y(t) : y \in C\}$ est relativement compact sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$;*

iv) *les fonctions de C sont équiconvergentes, c'est-à-dire que, étant donné $\varepsilon > 0$, il correspond $T(\varepsilon) > 0$ tel que $|y(t) - y(+\infty)| < \varepsilon$ pour tout $t \geq T(\varepsilon)$ et $y \in C$. Alors C est relativement compact en $BC(\mathbb{R},E)$.*

Lemme 1.4. *[29] Soit C un sous-ensemble borné convexe fermé non vide d'un espace de Banach E. Alors toute application continue et compacte $T : C \longrightarrow C$ a un point fixe.*

Lemme 1.5. *(Bohnenblust-Karlin [4]) Soit E un espace de Banach et $D \in P_{f,c}(E)$. Supposons que l'opérateur $T : D \longrightarrow P_{f,cv}(D)$ est semi-continu supérieurement et que l'ensemble $T(D)$ est relativement compact dans E. Alors T a un point fixe dans D.*

Chapitre 2

Existence et attractivité des solutions d'une équation et inclusion d'évolution du second ordre avec un retard infini

2.1 Équation d'évolution du seconde ordre

Nous considérons l'existence et l'attractivité de solutions faibles de l'équation d'évolution du second ordre

$$y''(t) - A(t)y(t) = f\left(t, y_t\right), \quad t \in J := [0, \infty[\tag{2.1}$$

$$y_0 = \phi, \quad y'(0) = \tilde{y} \tag{2.2}$$

où $(E,|.|)$ un espace de Banach réel, $\{A(t)\}_{0\leq t<+\infty}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de E dans E qui génèrent un système d'évolution des opérateurs $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in J\times J}$ pour $0 \leq s \leq t < +\infty$, $f : J \times B \longrightarrow E$ est une fonction de Carathéodory, B est un espace de phase abstrait à spécifier ultérieurement, $\tilde{y} \in E$, et $\phi \in \mathcal{B}$.
Pour toute fonction continue y et toute $t \geq 0$, nous désignons par y_t l'élément de B défini par $y_t(\theta) = y(t + \theta)$ pour $\theta \in] - \infty, 0]$. Ici, $y_t(.)$ représente l'histoire de l'état jusqu'à l'instant présent t. On suppose que les histoires y_t appartiennent à B.

Soit E un espace de Banach avec la norme $|.|$ et soit $BC(J, E)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions bornées et continues y de J dans E muni de la norme suivante :

$$\|y\| = \sup_{t \in J} |y(t)|$$

Soit $\mathcal{X}$ l'espace défini par

$$\mathcal{X} = \left\{ y : \mathbb{R} \to E \mid y_{|J} \in BC(J, E) \text{ et } y_0 \in \mathcal{B} \right\}$$

où $y_{|t}$ est la restriction de y sur J

Nous utiliserons une définition axiomatique de l'espace de phase B introduite par Hale et Kato dans [12] et suivrons la terminologie utilisée dans [17]. Ainsi, $(B, \|.\|_B)$ sera un espace vectoriel normé de fonctions de $]-\infty, 0]$ dans E, et satisfaisant les axiomes suivants :

A1) Si $y :] - \infty, b[\longrightarrow E$, $b > 0$ une fonction continue sur $[0, b]$ et $y_0 \in \mathcal{B}$, alors pour tout $t \in [0, b[$ les conditions suivants sont vérifiées :

- **i)** $y_t \in \mathcal{B}$
- **ii)** Il existe $H > 0$ tel que $|y(t)| \leq H\|y_t\|_{\mathcal{B}}$
- **iii)** Il existe deux fonctions $K(\cdot), M(\cdot) : J \longrightarrow \mathbb{B}^+$ indépendant de $y(t)$ avec K continue et M localement bornée tel que

$$\|y_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t) \sup\{|y(s)| : 0 \leq s \leq t\} + M(t)\|y_0\|_{\mathcal{B}}$$

posons $K_b = \sup\{K(t) : t \in [0, b]\}$ et $M_b = \sup\{M(t) : t \in [0, b]\}$

A2) $y_t \in \mathcal{B}$ est une fonction continue sur $[0, b]$

A3) L'espace $\mathcal{B}$ est complet.

Remarque 2.1.

1. La condition (ii) dans $(A1)$ est équivalente à $|\phi(0)| \leq H\|\phi\|_{\mathcal{B}}$ pour tout $\phi \in \mathcal{B}$.
2. Puisque $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ est une semi-norme, donc pour deux éléments $\phi, \psi \in \mathcal{B}$ on peut vérifier que $\|\phi - \psi\| = 0$ pas nécessairement $\phi(\theta) = \psi(\theta)$ pour tout $\theta \leq 0$
3. D'après (ii), pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{B}$ telles que $\|\phi - \psi\| = 0$, ça implique nécessairement que $\phi(0) = \psi(0)$.

Remarque 2.2. Dans la suite, nous supposons que K et M sont bornés sur J et

$$\gamma := \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \{K(t)\}, \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \{M(t)\} \right\}$$

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur, par exemple, au livre de Hino et al [17].

2.1.1 Quelques exemples d'espace de phase

Exemple 2.1. Soient les espaces BC, BUC, C^∞ et C^0 tels que :
BC l'espace des fonctions continues bornées définies sur $\mathbb{R}^-$ dans E ;
BUC l'espace des fonctions uniformément continues bornées de $\mathbb{R}^-$ dans E.

$$C^\infty = \{\phi \in BC : \lim_{\theta \to -\infty} \phi(\theta) \text{ existe dans } E\}.$$

$$C^0 = \{\phi \in BC : \lim_{\theta \to -\infty} \phi(\theta) = 0\}, \text{ muni de la norme uniforme.}$$

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| \ : \ \theta \leq 0\}.$$

Nous avons donc les espaces BUC, C^∞ et C^0 vérifient les conditions $(A1) - (A3)$. BC satisfait $(A1), (A3)$ mais $(A2)$ n'est pas satisfaite.

Exemple 2.2. Soient les espaces C_g, UC_g, C_g^∞ et C_g^0 et soit g une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^-$, telles que :

$$C_g = \{\phi \in C(\mathbb{R}^-, E) \ : \ \frac{\phi(\theta)}{g(\theta)} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^-\}.$$

$$C_g^0 = \{\phi \in C_g : \lim_{\theta \to -\infty} \frac{\phi(\theta)}{g(\theta)} = 0\}, \text{ muni de la norme uniforme.}$$

$$\|\phi\| = \sup\{\frac{|\phi(\theta)|}{g(\theta)} : \theta \leq 0\}.$$

On considère la condition suivante sur g :

$$(g1) \qquad \forall \ a > 0 \ ; \ \sup_{0 \leq t \leq a} \sup\{\frac{g(t+\theta)}{g(\theta)} : -\infty < \theta \leq -t\} < +\infty,$$

alors on a C_g et C_g^0 vérifient $(A3)$. $(A1)$ et $(A2)$ s'obtient si $(g1)$ est satisfaite.

Exemple 2.3. Soit l'espace C_γ, pour toute constante réelle γ, on considère l'espace fonctionnel

$$C_\gamma = \{\phi \in C(\mathbb{R}^-, E) : \lim_{\theta \to -\infty} e^{\gamma\theta}\phi(\theta) \text{ existe dans } E\} \text{ muni de la norme.}$$

$$\|\phi\| = \sup\{e^{\gamma\theta}|\phi(\theta)| : \theta \leq 0\},$$

alors les axiomes $(A1) - (A3)$ sont satisfaits dans C_γ.

2.2 Résultat principal

Nous commençons par la définition d'une solution faible de notre problème.

Définition 2.1. Une fonction $y \in \mathcal{X}$ est appelée une solution faible au problème (2.1)-(2.2), si y est continue et

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \leq 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \mathcal{U}(t,0)\tilde{y} + \displaystyle\int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s, y_s)\,ds, & \text{si } t \in J. \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour prouver les résultats, nous introduisons les conditions suivantes.

(H_1) Il existe une constante $\widehat{M} \geq 1$ et $\omega > 0$ telle que

$$\|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} \leq \widehat{M}e^{-\omega(t-s)} \text{ pour toute } (t,s) \in \Delta.$$

(H_2) Il existe une constante $\tilde{M} \geq 0$ telle que

$$\left\|\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)\right\|_{B(E)} \leq \tilde{M}.$$

(H_3) Il existe une fonction $p \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ telle que

$$|f(t,u)| \leq p(t)\left(\|u\|_{\mathcal{B}} + 1\right) \text{ pour presque tout } t \in J \text{ et tout } u \in \mathcal{B}.$$

(H_4) Pour tout $(t,s) \in \Delta$ on a

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t e^{-w(t-s)}p(s)ds = 0.$$

Théorème 2.1. *[3] Si les conditions* $(H_1)-(H_2)$ *sont vérifiées, alors le problème* (2.1)-(2.2) *admet au moins une solution faible.*

Preuve On remarque que les points fixes de l'opérateur $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ définis par

$$T(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \leq 0, \\ -\dfrac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \mathcal{U}(t,0)\tilde{y} + \displaystyle\int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s,y_s)\,ds, & \text{si } t \in J, \end{cases} \tag{2.4}$$

sont des solutions faible du problème (2.1)-(2.2).
pour $\phi \in B$, soit $x : \mathbb{R} \longrightarrow E$ la fonction définie par

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ -\dfrac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \mathcal{U}(t,0)\tilde{y} & \text{si } t \in J \end{cases}$$

Alors $x_0 = \phi$. Pour toute fonction $z \in \mathcal{X}$, on pose

$$y(t) = x(t) + z(t),$$

Donc y satisfait (2.4) si et seulement si z satisfait $z_0 = 0$ et pour tout $t \in J$

$$z(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(t, x_s + z_s)\,ds \tag{2.5}$$

Dans la suite, on prend $\mathcal{X}_0$ l'espace de Banach

$$\mathcal{X}_0 = \{z \in \mathcal{X} : z_0 = 0\}$$

muni de la norme

$$\|z\|_{\mathcal{X}_0} = \sup_{t\in J}|z(t)| + \|z_0\|_{\mathcal{B}} = \sup_{t\in J}|z(t)|.$$

Maintenant, on considère l'opérateur $L : \mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathcal{X}_0$ donné par

$$Lz(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s, z_s + x_s)\,ds, \qquad \text{pour } t \in J.$$

Le problème (2.1) ayant une solution est équivalent à L ayant un point fixe. Pour prouver que le problème (2.1) admet une solution, nous commençons par l'estimation suivante.

Pour tout $z \in \mathcal{X}_0$ et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
\|z_t + x_t\|_{\mathcal{B}} \leq & \|z_t\|_{\mathcal{B}} + \|x_t\|_{\mathcal{B}} \\
\leq & K(t)|z(t)| + K(t) \left\| \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{U}(t,0) \right\|_{B(E)} \|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
& + K(t)\|\mathcal{U}(t,0)\|_{B(E)}|\tilde{y}| + M(t)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
\leq & \gamma\|z\|_{\mathcal{X}_0} + \gamma\tilde{M}\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \gamma\hat{M}e^{-\omega t}|\tilde{y}| + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
\leq & \gamma\|z\|_{\mathcal{X}_0} + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}|.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Maintenant, nous allons montrer que l'opérateur L satisfait aux conditions du théorème du point fixe de Schauder. □

Étape 1: L est continu.

Soit $(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{X}_0$ telle que $z^k \longrightarrow z$ dans $\mathcal{X}_0$; alors pour tout $t \in J$ on obtient

$$\begin{aligned}
\left|L\left(z^k\right)(t) - L(z)(t)\right| &\leq \int_0^t \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} \left|f\left(t, x_s + z_s^k\right) - f\left(t, x_s + z_s\right)\right| ds \\
&\leq \hat{M} \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \left|f\left(s, z_s^k + x_s\right) - f\left(s, z_s + x_s\right)\right| ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de la continuité de la fonction f et du théorème de convergence dominé de Lebesgue, on obtient

$$\|Lz_k - Lz\|_{\mathcal{X}_0} \to 0 \quad \text{si } k \to +\infty.$$

Donc L est continu. □

Étape 2: L transforme les ensembles bornés de $\mathcal{X}_0$ en ensembles bornés.

Soit $\eta > 0$ tel que

$$\eta \geq \frac{\hat{M}\left(\gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}| + 1\right)\|p\|_{L^1}}{1 - \hat{M}\gamma\|p\|_{L^1}},$$

et soit l'ensemble $D_\eta = \{z \in \mathcal{X}_0 : \|z\|_{\mathcal{X}_0} \leq \eta\}$. Si $z \in D_\eta$ d'après (H_3) et (2.6), on a

$$\begin{aligned}
|L(z)(t)| &\leq \int_0^t \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} |f(s, x_s + z_s)| ds \\
&\leq \hat{M} \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(s) \left(\|z_s + x_s\|_{\mathcal{B}} + 1\right) ds \\
&\leq \hat{M}\left(\gamma\|z\|_{\mathcal{X}_0} + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}| + 1\right) \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(s) ds \\
&\leq \hat{M}\xi\|p\|_{L^1} \leq \eta
\end{aligned}$$

où

$$\xi := \gamma\eta + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}| + 1.$$

Donc, l'opérateur L transforme D_η en lui-même. □

Étape 3 :

$L(D_\eta)$ relativement compact.

Soit D_η un sous-ensemble borné de $\mathcal{X}_0$. Pour montrer que $L(D_\eta)$ est relativement compact, nous utiliserons le lemme 1.3.

♦ $L(D_\eta)$ est équicontinue.

Soit $s, t \in [a,b]$ avec $t > s$ et $e \in D_\eta$. Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}
|(Lz)(t) - (Lz)(s)| &= \left| \int_0^s (\mathcal{U}(t,\tau) - \mathcal{U}(s,\tau)) f(\tau, z_\tau + x_\tau)\, d\tau + \int_s^t \mathcal{U}(t,\tau) f(\tau, z_\tau + x_\tau)\, d\tau \right| \\
&\leq \int_0^s \|\mathcal{U}(t,\tau) - \mathcal{U}(s,\tau)\|_{B(E)} p(\tau)\left(\|z_\tau + x_\tau\|_{\mathcal{B}} + 1\right) d\tau \\
&\quad + \hat{M} \int_s^t e^{-\omega(t-\tau)} p(\tau)\left(\|z_\tau + x_\tau\|_{\mathcal{B}} + 1\right) d\tau
\end{aligned}$$

De l'inégalité (2.6), on obtient

$$|(Lz)(t) - (Lz)(s)| \leq \xi \int_0^s \|\mathcal{U}(t,\tau) - \mathcal{U}(s,\tau)\|_{B(E)} p(\tau) d\tau + \hat{M}\xi \int_s^t p(\tau) d\tau.$$

Comme $\mathcal{U}(t,s)$ est un opérateur compact, et que l'ensemble $\Lambda_\varepsilon := \{(L_\varepsilon z)(t) : z \in D_\eta\}$ est l'image d'un ensemble borné dans E par $U(t,s)$, on voit que Λ_ε est pré-compacte dans E. De plus, pour $z \in \Lambda_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}
|L(z)(t) - L_\varepsilon(z)(t)| &\leq \int_{t-\varepsilon}^t \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} |f(s, z_s + x_s)|\, ds \\
&\leq \int_{t-\varepsilon}^t \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} p(s)\left(\|z_s + x_s\|_{\mathcal{B}} + 1\right) ds \\
&\leq \xi\hat{M} \int_{t-\varepsilon}^t e^{-\omega(t-s)} p(s) ds
\end{aligned}$$

Le côté droit tend vers zéro lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, donc $L_\varepsilon(z)$ converge uniformément vers $L(z)$, ce qui implique que $D_\eta(t)$ est pré-compacte dans E.

♦ L est équiconvergent.

Soit $z \in D$; alors à partir des conditions $(H_1) - (H_3)$ et (2.6), on a

$$|(Lz)(t)| \leq \hat{M}\xi \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(s) ds,$$

et il résulte immédiatement de (H_4) que $|(Lz)(t)| \to 0$ si $t \to +\infty$. D'où,

$$\lim_{t\to+\infty} |(Lz)(t) - (Lz)(+\infty)| = 0,$$

ce qui implique que L est équiconvergent.

Par conséquent, d'après le lemme 1.3, $L(D_\eta)$ est relativement compact. Par conséquent, par le lemme 1.4, l'opérateur L a au moins un point fixe qui est solution faible du problème (2.1)-(2.2)

2.2.1 Attractivité des solutions

Dans cette section, nous étudions l'attractivité locale des solutions du problème (2.1)-(2.2).

Définition 2.2. Les solutions de (2.1) sont localement attractives s'il existe une boule fermée $\bar{B}(z^*, \sigma)$ dans l'espace $\mathcal{X}_0$ pour un certain $z^* \in \mathcal{X}$ tel que, pour toute solution z et $\tilde{z}$ de (2.1)-(2.2) appartenant à $\bar{B}(z^*, \sigma)$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} (z(t) - \tilde{z}(t)) = 0.$$

Sous les hypothèses de la section 3, soit z^* une solution de (2.1)-(2.2) et $\bar{B}(z^*, \sigma)$ la boule fermée dans $\mathcal{X}_0$ où σ satisfait

$$\sigma \geq \frac{2\hat{M}\left(\gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}| + 1\right)\|p\|_{L^1}}{1 - 2\hat{M}\gamma\|p\|_{L^1}}.$$

Alors, pour $z \in \bar{B}(z^*, \sigma)$, de $(H_1) - (H_3)$ et (2.6), on a

$$\begin{aligned}
|(Lz)(t) - z^*(t)| &= |(Lz)(t) - (Lz^*)(t)| \\
&\leq \int_0^t \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} \left|f(s, z_s + x_s) - f(s, z_s^* + x_s)\right| ds \\
&\leq \hat{M} \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(t) \left(\|z_s + x_s\|_{\mathcal{B}} + \|z_s^* + x_s\|_{\mathcal{B}} + 2\right) ds \\
&\leq 2\hat{M}\left(\gamma\sigma + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}| + 1\right)\|p\|_{L^1} \\
&\leq \sigma.
\end{aligned}$$

Par conséquent $L(\bar{B}(z^*,\sigma)) \subset \bar{B}(z^*,\sigma)$. Donc, pour toute solution $z \in \bar{B}(z^*,\sigma)$ au problème (2.1) et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|z(t) - z^*(t)| &= |(Lz)(t) - (Lz^*)(t)| \\
&\leq \int_0^t \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} \left| f(s, z_s + x_s) - f(s, z_s^* + x_s) \right| ds \\
&\leq \hat{M} \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(t) \left(\|z_s + x_s\|_{\mathcal{B}} + \|z_s^* + x_s\|_{\mathcal{B}} + 2 \right) ds \\
&\leq 2\hat{M} \left(\gamma\sigma + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}| + 1 \right) \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(t) ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de (H_4), nous concluons que

$$\lim_{t\to\infty} |z(t) - \tilde{z}(t)| = 0.$$

Par conséquent, les solutions du problème (2.1) (2.2) sont localement attractives.

2.3 Inclusions d'évolution de second ordre

Dans ce chapitre, on va considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} y''(t) - A(t)y(t) \in F(t, y_t), \quad t \in J := [0, \infty[, \\ y_0 = \phi, y'(0) = \tilde{y}, \end{cases} \tag{2.7}$$

où $\{A(t)\}_{0\leq t<+\infty}$ est une famille d'opérateurs linéaires fermés de E dans E qui génèrent un système d'évolution des opérateurs $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in J\times J}$ pour $0 \leq s \leq t < +\infty$, $F : J \times B \longrightarrow P(E)$ est une application multivoque avec des valeurs convexes compactes non vides et $\phi \in B$. B est un espace de phase abstrait à spécifier ultérieurement, $\tilde{y} \in E$, $\phi \in B$ et $(E,|.|)$ un espace de Banach réel séparable.

2.3.1 Résultat principal

Définition 2.3. Une fonction $y \in X$ est appelée solution faible du problème (2.7), si y est continue et qu'il existe une fonction $f \in L^1(J,E)$ telle que $f(t) \in F(t, y_t)$ a.e. sur J, et

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{if } t \leq 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \mathcal{U}(t,0)\tilde{y} + \displaystyle\int_0^t \mathcal{U}(t,s) f(s) ds, & \text{if } t \in J. \end{cases} \tag{2.8}$$

Pour prouver nos résultats, nous introduisons les conditions suivantes.

(H_1) Il existe une constante $\widehat{M} \geq 1$ et $\omega > 0$ telle que

$$\|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} \leq \widehat{M}e^{-\omega(t-s)} \text{ pour tout } (t,s) \in \Delta.$$

(H_2) Il existe une constante $\tilde{M} \geq 0$ telle que

$$\left\|\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,s)\right\|_{B(E)} \leq \tilde{M}.$$

(H_3) Il existe une fonction $p \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ et une fonction continue croissante φ : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow]0,+\infty[$ telles que :

$$\|F(t,u)\|_P \leq p(t)\psi\left(\|u\|_{\mathcal{B}}\right) \text{ pour presque tout } t \in J \text{ et tout } u \in \mathcal{B}.$$

(H_4) Pour tout $(t,s) \in \Delta$ on a

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-w(t-s)}p(s)ds = 0.$$

Théorème 2.2. *[2] Si les hypothèses (H_1) - (H_4) sont satisfaites, et qu'il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\eta \geq \widehat{M}\psi\left(\delta_\eta\right)\|p\|_{L^1} \tag{2.9}$$

où

$$\delta_\eta := \gamma\eta + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}|$$

alors le problème (2.7) a au moins une solution faible.

Preuve Pour commencer, nous considérons l'opérateur $T : \mathcal{X} \longrightarrow P(\mathcal{X})$ défini par :

$$Ty(t) = \left\{ g \in \mathcal{X} : g(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \phi(t), & \text{if } t \in (-\infty,0] \\ -\dfrac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \mathcal{U}(t,0)\tilde{y} & \\ +\displaystyle\int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds, & \text{if } t \in J, \end{array} \right. \right\} \tag{2.10}$$

où $f \in S_{F(\cdot,y.)} = \{v \in L^1(J,E) : v(t) \in F(t,y_t) \text{ presque tout } t \in J\}$. D'après le lemme 1.2 $S_{F(\cdot,y.)}$ est non vide. Pour $\phi \in B$, Soit $x :]-\infty,+\infty[\longrightarrow E$ la fonction définie par

$$x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \phi(t), & \text{if } t \in]-\infty,0] \\ -\dfrac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \mathcal{U}(t,0)\tilde{y} & \text{if } t \in J \end{array} \right.$$

Alors $x_0 = \phi$. Pour chaque fonction $z \in X$, on note

$$y(t) = x(t) + z(t)$$

On remarque que y satisfait (2.10) si et seulement si z satisfait $z_0 = 0$ et pour tout $t \in J$

$$z(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds \tag{2.11}$$

où $f(t) \in F(t, z_t + x_t)$ pour chaque $t \in J$. Dans la suite, on note $\mathcal{X}_0$ l'espace de Banach défini par

$$\mathcal{X}_0 = \{z \in \mathcal{X} : z_0 = 0\},$$

muni de la norme

$$\|z\|_{\mathcal{X}_0} = \sup_{t\in J} |z(t)| + \|z_0\|_{\mathcal{B}} = \sup_{t\in J} |z(t)|$$

Maintenant, on considère l'opérateur $\widetilde{T} : \mathcal{X}_0 \longrightarrow P(\mathcal{X}_0)$ donné par

$$\widetilde{T}z(t) = \left\{ h(t) \in \mathcal{X}_0 : h(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds, \text{ for } t \in J \right\},$$

où $f \in S_{F(\cdot,z)} = \{v \in L^1(J,E) : v(t) \in F(t, z_t + x_t) \text{ a.e. } t \in J\}$.
Evidemment le problème (2.7) a une solution est équivalent à $\widetilde{T}$ a un point fixe.
On commence par l'estimation suivante.
Pour chaque $z \in \mathcal{X}_0$ et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
\|z_t + x_t\|_{\mathcal{B}} \leq \|z_t\|_{\mathcal{B}} + \|x_t\|_{\mathcal{B}} & \\
\leq & K(t)|z(t)| + K(t) \left\| \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{U}(t,0) \right\|_{B(E)} \|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
& + K(t)\|\mathcal{U}(t,0)\|_{B(E)}|\tilde{y}| + M(t)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
\leq & \gamma\|z\|_{\mathcal{X}_0} + \gamma\tilde{M}\|\phi\|_{\mathcal{B}} + \gamma\hat{M}e^{-\omega t}|\tilde{y}| + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
\leq & \gamma\|z\|_{\mathcal{X}_0} + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}|.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Soit y une solution possible du problème (2.7). Alors, pour $t \in J$ il existe $f(t) \in F(t, z_t + x_t)$ et en utilisant (H_1), (H_3) et (2.9) et (2.12) on a

$$\begin{aligned}
|z(t)| &\leq \int_0^t \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)}|f(s)|ds \\
&\leq \widehat{M} \int_0^t e^{-\omega(t-s)}p(s)\psi\left(\|z_s + x_s\|_{\mathcal{B}}\right)ds \\
&\leq \widehat{M}\|p\|_{L^1}\psi\left(\gamma\|z\|_{\mathcal{X}_0} + \gamma\|\phi\|_{\mathcal{B}}(\tilde{M}+1) + \gamma\hat{M}|\tilde{y}|\right), \\
&\leq \widehat{M}\psi\left(\delta_\eta\right)\|p\|_{L^1} \leq \eta.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour η satisfaisant (2.9) on considère l'ensemble

$$D_R = \{z \in \mathcal{X}_0 : \|z\|_{\mathcal{X}_0} \leq R\}$$

Par conséquent, l'opérateur $\widetilde{T}(D_R) \subset D_R$.

Maintenant, nous allons montrer que l'opérateur $\widetilde{T}$ satisfait les conditions du lemme 1.5.

La preuve sera donnée en plusieurs étapes. □

Étape 1: $\widetilde{T}$ convexe.

Soit $h_1,\ h_2 \in \widetilde{T}z(t)$ alors, il existe $f_1, f_2 \in S_{F(.,z.)}$ Tel que pour chaque $t \in J$ et $\alpha \in [0,1]$ on a

$$\alpha h_1(t) + (1-\alpha)h_2(t) = \int_0^t \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} \left(\alpha f_1(s) + (1-\alpha) f_2(s)\right) ds$$

Puisque $S_{F(.,z.)}$ est convexe (F à valeurs convexes), donc

$$\alpha h_1(t) + (1-\alpha)h_2(t) \in \widetilde{T}z(t)$$

Étape 2: $\widetilde{T}(D_\eta)$ relativement compact.

Soit D_η est un sous-ensemble borné de $\mathcal{X}_0$. Pour montrer que $\widetilde{T}(D_\eta)$ est relativement compact, nous utiliserons le lemme 1.3.

♦ $\widetilde{T}\,(D_\eta)$ est équicontinue.

Soit $s, t \in [0, b]$ avec $t > s$ et $h(.) \in \widetilde{T}z(.)$ pour $z \in D_\eta$. Alors, il y a $f \in S_{F(.,z.)}$, tel que

$$\begin{aligned} |h(t) - h(s)| &= |\int_0^t (\mathcal{U}(t,\tau) - \mathcal{U}(s,\tau)) f(\tau) d\tau + \int_s^t \mathcal{U}(t,\tau) f(\tau) d\tau \\ &\leq \int_0^s \|\mathcal{U}(t,\tau) - \mathcal{U}(s,\tau)\|_{B(E)} p(\tau)\psi\left(\|z_\tau + x_\tau\|_{\mathcal{B}}\right) d\tau \\ &\quad + \hat{M} \int_s^t e^{-\omega(t-\tau)} p(\tau)\psi\left(\|z_\tau + x_\tau\|_{\mathcal{B}}\right) d\tau \end{aligned}$$

Maintenant, par l'inégalité(2.12) nous obtenons

$$|h(t) - h(s)| \leq \psi\left(\delta_\eta\right) \int_0^s \|\mathcal{U}(t,\tau) - \mathcal{U}(s,\tau)\|_{B(E)} p(\tau) d\tau + \hat{M}\psi\left(\delta_\eta\right) \int_s^t p(\tau) d\tau$$

Le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro lorsque $t - s \longrightarrow 0$, ce qui implique que $\widetilde{T}(D_\eta)$ est équicontinue.

♦ $\Lambda := \{(\widetilde{T}z)(t) : z \in D_\eta\}$ est relativement compact dans E.

Soit $t \in J$ un fixe et soit $0 < \varepsilon < t \leq b$. Pour $z \in D_\eta$ on définit

$$\widetilde{T}_\varepsilon(z)(t) = \left\{h_\varepsilon \in \mathcal{X} : h_\varepsilon(t) = \mathcal{U}(t, t-\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon} \mathcal{U}(t-\varepsilon, s) f(s) ds\right\}.$$

Puisque $U(t,s)$ est un opérateur compact pour $t > s$, et l'ensemble $\Lambda_\varepsilon := \{(\widetilde{T}_\varepsilon z)(t) : z \in D_\eta\}$ est l'image d'un ensemble borné de E par $U(t,s)$ alors Λ_ε est pré-compacte dans E. De plus, pour $z \in D_\eta$ et $h_\varepsilon(t) \in (\widetilde{T}_\varepsilon z)(t)$, on a

$$\begin{aligned}
|h(t) - h_\varepsilon(t)| &\leq \int_{t-\varepsilon}^{t} \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} \left|f\left(s, z_s + x_s\right)\right| ds \\
&\leq \int_{t-\varepsilon}^{t} \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} p(s) \psi\left(\|z_s + x_s\|_{\mathcal{B}}\right) ds \\
&\leq \hat{M}\psi\left(\delta_\eta\right)\int_{b-\varepsilon}^{b} e^{-\omega(b-s)} p(s) ds.
\end{aligned}$$

Le côté droit tend vers zéro lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, alors $\widetilde{T}_\varepsilon(z)$ converge uniformément vers $\widetilde{T}(z)$ ce qui implique que $D_\eta(t)$ est précompacte dans E.

♦ $\widetilde{T}(D_\eta)$ est équiconvergent.

Soit $z \in D_\eta$ et $h(t) \in \widetilde{T}(z)(t)$ pour $t \in J$, alors à partir des hypothèses $(H_1) - (H_3)$ et (2.12) on a

$$|h(t)| \leq \hat{M}\psi\left(\delta_\eta\right)\int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(s) ds$$

il s'ensuit immédiatement par (2.12) que $|h(t)| \longrightarrow 0$ comme $t \longrightarrow +\infty$. Puis

$$\lim_{t \to +\infty} |h(t) - h(+\infty)| = 0$$

ce qui implique que $\widetilde{T}$ est équiconvergent.

L'opérateur $\widetilde{T}$ est donc relativement compact dans $\mathcal{X}_0$. □

Étape 3: $\widetilde{T}$ a graphe fermé.

Soit $z_n \longrightarrow \hat{z}$, $(h_n)_n \subset \widetilde{T}(z_n)$ avec $h_n \longrightarrow \hat{h}$. On va montrer que $\hat{h} \in \widetilde{T}(\hat{z})$. Comme $h_n \in \widetilde{T}(z_n)$, il existe $f_n \in S_{F(.,z.n)}$ tel que

$$h_n(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t,s) f_n(s) ds, \quad t \in J.$$

Il faut montrer qu'il existe $f \in S_{F(.,\hat{z}.)}$ tel que

$$\hat{h}(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds, \quad t \in J.$$

Considérons l'opérateur linéaire et continu $N : L^1(J,E) \longrightarrow \mathcal{X}_0$ défini par

$$N(f)(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds, \qquad \text{pour } t \in J.$$

D'après le lemme 1.5, il s'ensuit que $N \circ S_{F(.,Z.)}$ est un opérateur à graphe fermé. Alors, il existe $f \in S_{F(.,\hat{z}.)}$ tel que $\hat{h}(t) \in \widetilde{T}(\hat{z})$. Par conséquent, $\widetilde{T}$ est une application multivoque complètement continue, s.c.s. et à valeurs fermées convexes.
En conséquence du lemme 1.5, nous concluons que T a un point fixe qui est une solution faible de (2.7). □

2.3.2 Attractivité des solutions

Dans cette section, nous étudions l'attractivité locale des solutions du problème (2.7).

Définition 2.4. On dit que les solutions de (2.7) sont localement attractives s'il existe une boule fermée $\bar{B}(z^*,\sigma)$ dans l'espace $\mathcal{X}_0$ pour un certain $z^* \in \mathcal{X}$ tel que pour les solutions arbitraires z et $\tilde{z}$ de (2.7) appartenant à $\bar{B}(z^*,\sigma)$ on a

$$\lim_{t\to+\infty}(z(t) - \tilde{z}(t)) = 0.$$

Soit y^* une solution de (2.7) telle que

$$y^*(t) = \mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f^*(s)ds$$

où $f^* \in S_{F(.,y^*_.)}$.
Pour tout $t \in J$ nous avons

$$\begin{aligned} \|y_t^*\|_{\mathcal{B}} &\leq K(t)\|z\|_{\mathcal{X}} + M(t)\,\|y_0\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \gamma\left(\|y\|_{\mathcal{X}} + \|\phi\|_{\mathcal{B}}\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Soit $\bar{B}(y^*,\rho)$ une boule fermée dans $\mathcal{X}$ qui ρ satisfait l'inégalité suivante

$$2\widehat{M}\|p\|_{L^1}\psi\left(\gamma\left(\rho + \|\phi\|_{\mathcal{B}}\right)\right) \leq \rho.$$

Alors, pour $y \in \bar{B}(y^*, \rho)$ défini par

$$y(t) = \mathcal{U}(t,0)\phi(0) + \int_0^t \mathcal{U}(t,s)f(s)ds,$$

pour certains $f \in S_{F(.,y.)}$ et en utilisant les hypothèses $(H_1) - (H_2)$ et (2.7) on obtient

$$\begin{aligned}
H_d\left((Ty)(t), y^*(t)\right) &= H_d\left((Ty)(t), (Ty^*)(t)\right) \\
&\leq \int_0^t \|\mathcal{U}(t,s)\|_{B(E)} \left|f(s) - f^*(s)\right| ds \\
&\leq \widehat{M} \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(s) \left[\psi\left(\|y_s\|_{\mathcal{B}}\right) + \psi\left(\|y_s^*\|_{\mathcal{B}}\right)\right] ds, \\
&\leq \widehat{M} \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(s) \left[\psi\left(\gamma\left(\|y\|_{\mathcal{X}} + \|\phi\|_{\mathcal{B}}\right)\right) + \psi\left(\gamma\left(\|y^*\|_{\mathcal{X}} + \|\phi\|_{\mathcal{B}}\right)\right)\right] ds, \\
&\leq 2\widehat{M}\psi\left(\gamma\left(\rho + \|\phi\|_{\mathcal{B}}\right)\right) \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(s) ds, \\
&\leq 2\widehat{M}\psi\left(\gamma\left(\rho + \|\phi\|_{\mathcal{B}}\right)\right) \|p\|_{L^1} \leq \rho.
\end{aligned}$$

On obtient donc $T\left(\bar{B}(y^*, \rho)\right) \subset \bar{B}(y^*, \rho)$. Donc, pour chaque solution $y, \tilde{y} \in \bar{B}(y^*, \rho)$ du problème (2.7) et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|y(t) - \tilde{y}(t)| &\leq H_d(Tz(t), T\tilde{z}(t)) \\
&\leq 2\widehat{M}\psi\left(\gamma\left(\rho + \|\phi\|_{\mathcal{B}}\right)\right) \int_0^t e^{-\omega(t-s)} p(s) ds
\end{aligned}$$

Par conséquent, à partir de (H_3), nous concluons que

$$\lim_{t \to \infty} |y(t) - \widetilde{y}(t)| = 0$$

Par conséquent, les solutions du problème (2.7) sont localement attractives.

Conclusion

On a traiter l'existence et l'attractivité de solutions pour une équation et une inclusion d'évolution du second ordre, en utilisant la théorie de point fixe et la théorie de semi-groupe.

Premièrement, nous avons rappelé quelques définitions et certaines propriétés importantes concernant notre travail. Au deuxième point, nous prouvons l'existence et l'attractivité des solutions de nos problème considéré.

Bibliographie

[1] D. Azzam-Laouir, *Cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Univ Jijel, 2009.

[2] A. Baliki, M. Benchohra, J. J. Nieto, Qualitative analysis of second order functional evolution inclusions, *Dynamic Systems and Applications* **24** (2015) 559-572.

[3] A. Baliki, M. Benchohra, J. R. Graef, Global existence and stability for second order functional evolution equations with infinite delay, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2016, No.* ***23****, 1–10.*

[4] H. F. Bohnenblust, S. Karlin, On a theorem of ville. Contribution to the theory of games, *Ann. Math. Stud.*, No. **24**, Princeton Univ, (1950), 155-160.

[5] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science and Business Media, 2010.

[6] C. Corduneanu, *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*, New York and London 1973.

[7] El Haj Laamri, *Mesures, intégration convolution, et transformée de Fourier des fonctions*, Dunod, 2007.

[8] A. El Jai, *Element de topologie et espaces métriques*, Presses universitaires de Perpignan, 2007.

[9] I. Farmakis, M. Moskowitz, *Fixed point theorems and their applications*, World Scientific, 2013.

[10] I. Gohberg, S. Goldber, M. A. Kaashoek, *Basic classes of linear operators*, Birkhäuser, 2012.

[11] L. Gòrniewicz, *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*, Vol. 4. Dordrecht : Springer, 2006

[12] J. K. HALE, J. KATO, Phase Space for Retarded Equations with Infinite Delay, *Funkcialaj Ekvacioj, **21** (1978) 11-41.*

[13] E. Hernández , A remark on second order differential equations with nonlocal conditions, *Cedernos de Matematica* **4** (2003), 299-309.

[14] E. Hernández, Existence results for partial neutral functional integrodifferential equations with unbounded delay, *J. Math. Anal. Appl.* **292** (2004), 194-210.

[15] E. Hernández and M. A. McKibben, Some comments on : Existence of solutions of abstract nonlinear second-order neutral functional integrodifferential equations, *Comput. Math. Appl.* **46** (2003). *Comput. Math. Appl.*, **50** (2005), 655-669.

[16] H. R. Henríquez and C.H. Vásquez, Differentiability of solutions of second-order functional differential equations with unbounded delay, *J. Math. Anal. Appl.* **280** (2003), 284-312.

[17] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, *Functional differential equations with infinite delay*, Printed in Germany 1991.

[18] V. Kolmanovskii, and A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Application of Functional-Differential Equations,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[19] M. Kozak, A fundamental solution of a second-order differential equation in a Banach space, *Univ. Iagel. Acta Math. **32** (1995), 275–289.*

[20] A. Lasota, Z. Opial, application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations or noncompact acyclic-valued map, *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys, 1965, vol. **13**, p. 781-786*

[21] D. Li, *Cours d'analyse fonctionnelle : avec 200 exercices corrigés*, Ellipses, 2013.

[22] M. Meisner, *Étude unifiée d'équations aux dérivées partielles de type elliptique régies par des équations différentielles à coefficients opérateurs dans un cadre non commutatif : applications concrètes dans les espaces de Hölder et les espaces Lp*, Thèse de doctorat. Université du Havre, 2012.

[23] E. H. H. Nawfal, *Topologie générale et espaces normés*, Dunod, 2011.

[24] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Vol. 44. Springer Science and Business Media, 2012.

[25] L. Schwartz, Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnelle, *Collection Enseignement des sciences, 11. Hermann, 1993.*

[26] Sh. Hu , N. S. Papageorgiou , *Handbook of Multivalued Analysis. Vol1 : Theory*, Kluwer Academic Publishers 1997.

[27] C. C. Travis and G.F. Webb, Second order differential equations in Banach spaces, in : Nonlinear Equations in Abstract Spaces,*Proc. Internat. Sympos. (Univ. Texas, Arlington, TX, 1977), Academic Press, New-York*, 1978, 331-361.

[28] J. Wu, *Theory and Application of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[29] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed point theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

الملخص:

في هذا العمل ، قدمنا نتائج بخصوص وجود وجاذبية الحلول الضعيفة لمعادلات واحتواءات تفاضلية من الدرجة الثانية مع بتأخير غير منته في فضاء باناخي. تستند البراهين على نظريات النقطة الثابتة لشودر وبوهنبلوست كارلين ونظريات نظام التطور.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية شبه الخطية، الحتواءات التفاضلية شبه خطية، الحلول الضعيفة، النقاط الصامدة، نظام التطور، التأخير اللانهائي، الجاذبية، أنصاف الزمر.

Abstract

In this work, we considered the existence and attractiveness of weak solutions for a second order equation and inclusion in a Banach space with infinite delay. The proofs of the main results are based on the fixed-point theorems of Schauder and Bohnenblust-Karlin and the theory of the system of evolution.

Key words: *Semi-linear differential equations, Semi-linear differential inclusions, weak solutions, fixed points, evolution system, infinite delay, attractiveness, semi-groups.*

Résumé :

Dans ce travail, on a considéré l'existence et l'attractivité de solutions faible pour une équation et une inclusion de second ordre dans un espace de Banach avec retard infini. Les preuves des principaux résultats sont basées sur les théorèmes du point fixe de Schauder et Bohnenblust-Karlin et la théorie du système d'évolution.

Mots clé : *Equations différentielles semi-linéaire, Inclusions différentielles semi-linéaire, solutions faible, points fixe, système d'évolution, retard infini, attractivité, semi-groupes.*