

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université D'Adrar
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et d'Informatique



MEMOIRE

présenté par

Ouakouak Yassine

pour obtenir

Le grade de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Applications

Thème

Existence des Solutions D'inclusions Différentielles par la cathégorie de Baire

Soutenue le 02/06/2020 , devant les jury composé de

Président : Mr. Ouahab Abdelghani Professeur à l'université d'ADRAR
Examineurs : Mr. Baliki Abdessalem MC (A) à l'université d'ADRAR
Encadreur : Mme. Roummanni Bahya MC (B) à l'université d'ADRAR

Remerciements

Avant tout, je remercie, Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la force, la volonté et la patience pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincère remerciement à mon encadreur **Roummani BAHYA** pour le sujet intéressant qu'il m'a proposé. Je le remercie encore pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail. Sans ses idées et son expertise, réaliser ce modeste travail n'aurait pas été possible.

J'exprime mes sincères remerciements à **Mr. Ouahab Abdelghani**, pour m'avoir fait le grand honneur de présider ce jury de thèse.

Je souhaite remercier **Mr. Baliki Abdessalem**, et c'est un grand honneur pour moi il est partie du jury.

Mes remerciements ne seraient pas complets si je ne remerciais pas tous les professeurs de mathématiques et tous ceux qui m'ont enseigné dans ma vie universitaire.

Enfin, je remercie à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicace

C'est avec profonde gratitude et sincères mots, que je dédie ce modeste travail de fin d'étude à mes chers parents ; qui ont sacrifié leur vie pour mon réussite et j'ai éclairé le chemin par leurs conseils judicieux.

J'espère qu'un jour, je peux leur rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi que dieu leur donne le bonheur et longue vie.

Je dédie aussi ce travail à mon frère et mes soeurs, mes famille, mes amis, à tous mes professeurs qui m'ont enseigné et à tous mes chers.

Table des matières

Table des matières	3
Introduction	5
1 Préliminaire	8
1.1 Quelques notions topologiques	8
1.2 Espaces de Baire	12
1.3 Quelques définitions d'analyse multivoque	15
1.4 Sélection et mesurabilité	21
2 Inclusions différentielles sur un espace de Banach	26
2.1 Notations	26
2.2 Résultat d'existence	27
3 Catégorie de Baire sur un problème d'inclusion différentielle	30
3.1 Princip de Baire et existence	30
3.1.1 $\mathcal{N}_\theta$ est dense	31
3.1.2 $\mathcal{N}_\theta$ est ouvert	35
3.2 Résultat d'existence	37
4 Inclusions différentielles impulsives sur un intervalle compact	38
4.0.1 L'espace des solutions	38

4.1 L'existence des solutions	41
4.2 Catégorie de Baire sur un problème d'inclusion différentielle impulsive . . .	44
Conclusion	45
Bibliographie	46
Index	48

Introduction

Les inclusions différentielles sont une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire, la théorie des inclusions différentielles a été introduite en 1934-1936 où il apparaît 4 papiers, deux d'entre eux par le mathématicien français A. Marchaud, et les deux autres par S. K. Zaremba un mathématicien de Cracovie. Cette théorie a connu un développement considérable dans diverses écoles en France, Allemagne, Russie, Italie, Canada, Pologne et les Etats-Unis.

Les gens sont plus intéressés par les inclusions différentielles après les travaux de Wazewski qui a montré l'équivalence entre les problèmes de contrôles et les inclusions différentielles dans leur article qui intitulé "Sur un problème de contrôle optimal, Prague, 1964, 692-704". Les inclusions différentielles dans différentes conditions ont été intensément étudiées dans le bout plusieurs années, et nous renvoyons le lecteur aux monographies par Aubin [9] et Benchohra et autres [12], [31], Pandit et Deo [18], et Samoilenko et Perestyuk 41.

Pour montrer l'existence des solutions on trouve la méthode la plus apparaitre généralement c'est la théorie des points fixes, dans cet mémoire on vas traiter une autre méthode intéressante, basée sur le théorème de Baire. Cette méthode ne peut être appliquée qu'aux problèmes où il y a une solution.

La méthode de la catégorie de Baire a été introduit en 1982 par De Blasi et Pianigiani [[14]-[12]] (à partir d'un résultat de type générique prouvé par Cellina [17]) afin d'étudier l'existence de solutions de certaines classes d'inclusions différentielles à valeur non convexe dans les espaces de Banach, sans hypothèses de compacité. Par suite, la méthode de Baire

a été employée dans différents contextes par plusieurs auteurs dont Bressan et Colombo [4], Papageorgiou [27], Suslov [30] sur les inclusions différentielles ordinaires, et Bressan et Flores [5], Dacorogna et Marcellini [10], De Blasi et Pianigiani [[16],[13]] sur les inclusions différentielles partielles. Un compte rendu des résultats obtenus par la méthode de Baire et une vue sur certains problèmes récents concernant les inclusions différentielles peuvent être trouvés dans Pianigiani [28] et Cellina [9].

Ce mémoire se compose de trois chapitres, le premier chapitre sera consacré à des définitions et des notions générales dont on aura besoin dans les autres chapitres, le deuxième traite l'existence des solutions par la méthode de l'approximation de type Euler d'un problème d'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t, x), (\cdot = \frac{d}{dt}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

avec X un espace de Banach réel, $\mathcal{B}$ l'ensemble de tous les sous-ensemble fermés convexes bornés de X qui ont un intérieur non vide, et F est une multi-fonction de sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X$ dans $\mathcal{B}$.

Dans le troisième chapitre on a appliqué la catégorie de Baire pour montrer l'existence des solutions de problème d'inclusion différentielle suivant

$$\begin{cases} \dot{x} \in \partial F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

Où, $\partial F(t, x)$ désigne par la frontière de $F(t, x)$.

Le résultat principal indique que si X est réflexif et F continue par rapport la métrique de Hausdorff, alors (2) admet au moins une solution, et par une conséquence immédiate (au sens de la catégorie de Baire) les solutions de (1) sont en fait des solutions de (2).

Si X de dimension finie, le résultat d'existence est un cas particulier de théorème de Filippov's [19], et si X est de dimension infinie, la plupart des théorèmes de l'existence se réfèrent à (1) sont obtenus sous des hypothèses de compacité sur F ([7, 11]).

On va montrer tout d'abord que l'ensemble de tous les solutions de (1) est non vide et que selon la métrique de la convergence uniforme est un espace métrique complet. Nous montrons ensuite que l'ensemble de tous les solutions de (2) peut être exprimée comme une intersection dénombrable de sous-ensembles denses ouverts de l'ensemble de tous les solutions de (1). Ainsi l'ensemble de tous les solutions de (2) est un G_δ -sous ensemble dense dans l'ensemble de tous les solutions de (1), il est donc non vide et le problème (2) possède une solution.

Lorsque F est à valeur unique, (1) et (2) se réduisent à la même équation différentielle ordinaire, qui est comme on le sait, n'a pas nécessairement de solutions si F est uniquement continue et X est un espace de dimension infinie ([32, 1]). Cela montre que pour F continue, dans des espaces de Banach de dimension infinie, l'existence de solutions de (2) peut échouer, sans l'hypothèse que F a des valeurs d'intérieur non vide.

Mots clés : espace de Banach, une multifonction, frontière d'un ensemble, inclusion différentielle, espace de Baire.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, on introduit des définitions, notations, lemmes et quelque théorèmes qui sont utilisées le long de ce mémoire.

1.1 Quelques notions topologiques

Définition 1.1. (Espace topologique[26])

Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble τ de parties de X , i.e. $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $\emptyset, X \in \tau$
- ii) Si $U, V \in \tau$, alors $U \cap V \in \tau$.
- iii) Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de X appartenant à τ , alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

L'ensemble X , muni de la topologie τ , est appelé espace topologique. On notera quelquefois (X, τ) un tel espace.

Définition 1.2. (Espaces métriques[26])

Une distance (ou métrique) sur un ensemble X est une application :

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) \end{aligned}$$

possédant, pour tous $x, y, z \in X$, les propriétés suivantes :

- 1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

- 2) $d(x, y) = d(y, x)$;
 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Muni de d , X est appelé espace métrique, on note parfois un tel espace (X, d) . Le nombre réel positif $d(x, y)$ est appelé la distance entre x et y dans X .

Définition 1.3. (pseudo-métrique[23])

un pseudo-métrique sur un ensemble X est une fonction définie par :

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longrightarrow d(x, y) \end{aligned}$$

tell que pour tous points x, y, z nous avons :

- 1) $d(x, x) = 0$
 2) $d(x, y) = d(y, x)$
 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

muni de la distance d , X est appelé espace pseudo-métrique et on note (X, d) .

Définition 1.4. Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.

- 1) On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$S(a, r) = \{x \in X; d(a, x) < r\}.$$

- 2) On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$\overline{S}(a, r) = \{x \in X; d(a, x) \leq r\}.$$

- 3) Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans (X, d) converge vers un élément a de X si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on ait $d(x_n, a) < \varepsilon$.
 4) Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans (X, d) est dite suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, on ait $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Définition 1.5. (Espace métrique complet[26])

Soient (X, d) un espace métrique.

- 1) On dit que (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.
 2) Un sous-ensemble A de (X, d) est dit complet si A muni de la distance induite est un espace métrique complet.

Proposition 1.1. [26] Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d) .

i) Si A est complet, alors A est fermé dans X .

ii) Si (X, d) est complet et si A est fermé dans X , alors A est complet.

Démonstration

i) Soit $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A convergeant vers x . Par conséquent, $(a_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans A . Or A est complet, donc $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément $a \in \overline{A}$. Comme la limite d'une suite est unique dans un espace métrique, on en déduit que $x = a \in A$. Par conséquent, on a $A = \overline{A}$, donc A est fermé dans X .

ii) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans A . Alors $(a_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans X qui est complet, donc $(a_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément $x \in X$. Or A est fermé dans X , donc $x \in A$. Par conséquent, A est complet. $\square$

Définition 1.6. (Espace vectoriels normés[29])

Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}=(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$. On appelle norme sur l'espace vectoriel X toute fonction, notée $x \rightarrow \|x\|$, possédant les propriétés suivantes :

- 1) positivité : $\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0$, pour $x \neq 0$, $\|0\| = 0$
- 2) transformation par les homothéties : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- 3) inégalité de convexité : $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Un espace X muni d'une telle norme, est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.7. (Espace de Banach)

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans X est convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme).

Définition 1.8. (Espace de Lebesgue[2])

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, l'espace de fonctions mesurables et intégrables au sens de lebesgue est noté et définie par :

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\}$$

muni de norme

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = +\infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } c > 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

muni de norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{c, |f(x)| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}$$

Espace réflexif et séparable

Soit X un espace de Banach, X' son dual muni de la norme duale et soit X'' son bidual, c'est-à-dire le dual de X' , muni de la norme $\|\psi\| = \sup_{f \in X', \|f\| \leq 1} |\langle \psi, f \rangle|$

On considère l'injection canonique J de X dans X'' par :

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X'' \\ f &\longrightarrow J_x(f) \end{aligned}$$

où J_x définie par :

$$\begin{aligned} J_x : X' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow J_x(f) \end{aligned}$$

L'application J est une isométrie injective de X dans X'' .

Définition 1.9. [2]

On dit que X est réflexif si l'isométrie canonique J est surjective de X sur X'' . Ceci signifie que pour toute application linéaire continue $\psi : X' \rightarrow \mathbb{R}$, il existe $x \in X$ tel que $\psi = J_x$, c'est-à-dire $\forall f \in X', \langle \psi, f \rangle = J_x(f)$.

Définition 1.10. [2]

On dit qu'un espace métrique X est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset X$ dénombrable et dense.

Exemple 1.1. 1) l'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$

2) l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$

3) tout les espaces de hilbert sont réflexifs

4) l'espace de fonctions continues sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ ($C([a,b])$) est séparable

Proposition 1.2. [2]

Soit X un espace de Banach tel que X' (le dual de X) soit séparable. Alors X est séparable.

Corollaire 1.3. [2]

Soit X un espace de Banach

Alors $(X \text{ réflexif et séparable}) \iff (X' \text{ réflexif et séparable})$

1.2 Espaces de Baire

Proposition 1.4. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . Alors on a :

$$\overset{\circ}{X \setminus A} = X \setminus \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}$$

où $X \setminus A$ est le complémentaire de A par rapport à X .

Proposition 1.5. [26]

Soient (X, τ) un espace topologique, $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et A un sous-ensemble de X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) A est dense dans X .
- ii) Pour tout ouvert non vide U de X , on a $A \cap U \neq \emptyset$.
- iii) Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$.

Démonstration

Montrons l'implication (i) $\implies$ (ii).

Supposons A dense dans X , i.e. $\overline{A} = X$. Alors pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x dans X , on a $A \cap V \neq \emptyset$. Soit U un ouvert non vide de X . Comme U est voisinage de chacun de ses points, on en déduit que $A \cap U \neq \emptyset$.

L'implication (ii) $\implies$ (iii) est triviale.

Montrons l'implication (iii) $\implies$ (i).

Supposons que pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$. Si $\overline{A} \neq X$, alors $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert non vide de X et on a $(X \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$. Donc il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, $B \subset X \setminus \overline{A}$ et $A \cap B = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse, donc on a $\overline{A} = X$. $\square$

Définition 1.11. (ensemble ordonné filtrant croissant[26])

Un ensemble ordonné filtrant croissant est un ensemble Λ muni d'une relation d'ordre, notée $\leq$, qui vérifie l'axiome suivant :

quels que soient les éléments α et β de Λ , il existe au moins un élément λ de Λ vérifiant $\alpha \leq \lambda$ et $\beta \leq \lambda$.

Exemple 1.2. Les exemples les plus importants d'ensembles ordonnés filtrants croissants sont les suivants :

- 1) Les ensembles totalement ordonnés. En particulier, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.
- 2) Soient X un espace topologique, $x \in X$ et $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x . Alors $V(x)$ est un ensemble ordonné filtrant croissant pour la relation d'ordre suivante :
pour $U, V \in V(x)$, $U \leq V \iff V \subset U$. Plus généralement, tout système fondamental de voisinages de x est un ensemble ordonné filtrant croissant pour la même relation d'ordre.
- 3) Soient X un ensemble quelconque et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . Alors $\mathcal{P}(X)$ est un ensemble ordonné filtrant croissant pour la relation d'ordre suivante :
pour $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \leq B \iff A \subset B$. De même, si on note $P_{fini}(X)$ l'ensemble des parties finies de X , $P_{fini}(X)$ est aussi un ensemble ordonné filtrant croissant pour la même relation d'ordre.

Définition 1.12. (famille filtrante croissante[26])

Soit X un espace topologique. On appelle famille filtrante croissante d'éléments de X toute application d'un ensemble ordonné filtrant croissant Λ dans X . Si $\lambda \in \Lambda$, on note usuellement $f(\lambda)$ par x_λ et la famille filtrante croissante f par $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ou tout simplement (x_λ) s'il n'y a pas de risque de confusion.

Dans le cas $\Lambda = \mathbb{N}$, on retrouve la définition des suites, car on suppose implicitement que $\mathbb{N}$ est muni de son ordre naturel. Donc on devrait regarder les familles filtrantes croissantes comme des suites généralisées.

Théorème 1.6. (théorème de cantor[26])

Soit (X, d) un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) L'espace (X, d) est complet.
- ii) L'intersection de toute suite décroissante $(F_n)_{n \geq 0}$ de parties fermées non vides de (X, d)

telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(F_n) = 0$ contient un point et un seul. Où $\delta(F_n)$ est le diamètre de F_n et $\delta(F_n) = \sup\{d(x, y); x, y \in F_n\}$

iii) Toute famille filtrante croissante de Cauchy dans (X, d) est convergente.

Proposition 1.7. [26]

Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) Pour toute famille dénombrable $(F_n)_{n \geq 0}$ de fermés de X telle que $X = \bigcup_{n \geq 0} F_n$, la réunion des intérieurs $\bigcup_{n \geq 0} \overset{\circ}{F}_n$ est dense dans X .
- ii) La réunion de toute famille dénombrable de fermés de X d'intérieurs vides est d'intérieur vide.
- iii) L'intersection de toute famille dénombrable d'ouverts de X et denses dans X est dense dans X .

Démonstration

Montrons l'implication (i) $\implies$ (ii).

Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de fermés de X d'intérieurs vides. Montrons que $Y = \bigcup_{n \geq 0} F_n$ est d'intérieur vide. Si $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset$, alors $F = X \setminus \overset{\circ}{Y}$ est un fermé dans X tel que $F \neq X$ et on a $X = F \cup \bigcup_{n \geq 0} F_n$. Par hypothèse, la réunion $\overset{\circ}{F} \cup \bigcup_{n \geq 0} \overset{\circ}{F}_n$ est dense dans X . Or, pour tout $n \geq 0$, on a $\overset{\circ}{F}_n = \emptyset$, on en déduit que $\overset{\circ}{F}$ est dense dans X , donc F est un fermé dense dans X , d'où $F = X$ ce qui est impossible. Donc on a $\overset{\circ}{Y} = \emptyset$.

Montrons l'implication (ii) $\implies$ (iii).

Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ouverts de X et denses dans X . Soit $U = \bigcap_{n \geq 0} U_n$, et pour tout $n \geq 0$, soit $F_n = X \setminus U_n$. Alors pour tout $n \geq 0$, F_n est un fermé dans X et on a $\overset{\circ}{F}_n = X \setminus \overline{U_n} = \emptyset$, voir proposition 1.4. Donc $X \setminus U = \bigcup_{n \geq 0} X \setminus U_n = \bigcup_{n \geq 0} F_n$ est d'intérieur vide, d'où on a $X \setminus \overline{U} = \emptyset$. Donc U est dense dans X .

Montrons l'implication (iii) $\implies$ (i).

Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de fermés dans X telle que $X = \bigcup_{n \geq 0} F_n$. Pour tout $n \geq 0$, soit $K_n = F_n \setminus \overset{\circ}{F}_n$, alors K_n est un fermé de X tel que $\overset{\circ}{K}_n = \emptyset$. Soit $U_n = X \setminus K_n$, alors U_n est un ouvert dense dans X . Par conséquent, $\bigcap_{n \geq 0} U_n$ est dense dans X et on a $\bigcap_{n \geq 0} U_n = X \setminus \bigcup_{n \geq 0} K_n$. On a $F_n = K_n \cup \overset{\circ}{F}_n$, donc $\bigcup_{n \geq 0} \overset{\circ}{F}_n$ contient le complémentaire de $\bigcup_{n \geq 0} K_n$, on en déduit que $\bigcup_{n \geq 0} \overset{\circ}{F}_n$ est dense dans X . $\square$

Définition 1.13. [26] Un espace topologique X est dit espace de Baire si X vérifie l'une des propriétés de la proposition précédente.

Théorème 1.8. (théorème de Baire[26])

Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors X est un espace de Baire.

Démonstration

Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ouverts de X et denses dans X . Pour montrer que $\bigcap_{n \geq 0} U_n$ est dense dans X , d'après la proposition 1.5, il suffit de montrer que pour tout ouvert non vide V de X , $V \cap \bigcap_{n \geq 0} U_n \neq \emptyset$.

Comme U_0 est dense dans X , alors $V \cap U_0 \neq \emptyset$. et soit $x_0 \in V \cap U_0$. Comme $V \cap U_0$ est un ouvert de X , il existe $r_0 > 0$ tel que $r_0 \leq 1$ et $B(x_0, 2r_0) \subset V \cap U_0$.

On construit, par récurrence sur n , une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans X et une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels strictement positifs tels que $r_n \leq 2^{-n}$ et $B(x_n, 2r_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$, pour tout $n \geq 1$.

En effet, on a déjà construit x_0 et r_0 et supposons x_n et r_n construits; comme U_{n+1} est dense dans X , il existe $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Comme $U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ est ouvert, il existe $0 < r_{n+1} \leq 2^{-n-1}$ tel que $B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$.

Soit $B_n = B'(x_n, r_n)$, on a $B_{n+1} \subset B(x_{n+1}, 2r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \subset B_n$. Comme l'espace (X, d) est complet et les B_n forment une suite décroissante de fermés non vides dont les diamètres tendent vers 0, d'après le théorème de **Cantor** (théorème 1.6), on a $\bigcap_{n \geq 0} B_n \neq \emptyset$.

Or $B_0 \subset V$ et, pour tout $n \geq 0$, on a $B_n \subset U_n$, donc $\bigcap_{n \geq 0} B_n \subset V \cap \bigcap_{n \geq 0} U_n$.

Par conséquent, on a $V \cap \bigcap_{n \geq 0} U_n \neq \emptyset$. Donc $\bigcap_{n \geq 0} U_n$ est dense dans X . □

1.3 Quelques définitions d'analyse multivoque

Pour un espace métrique (X, d) , les notations suivantes seront employées dans tout ce mémoire :

$$-\mathcal{P}(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset\}.$$

$$-\mathcal{P}_p(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ possède la propriété "p"}\}, \text{ avec } p = f(\text{fermé}), p = b(\text{borné}),$$

$$p = cp(\text{compact}), p = cv(\text{convexe}), \text{ etc. Alors,}$$

$$-\mathcal{P}_f(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ fermé}\},$$

- $-\mathcal{P}_{cp}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ compact}\},$
 $-\mathcal{P}_{cv}(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ convexe}\},$ avec X muni d'une structure d'un espace vectoriel,
 $-\mathcal{P}_{cv,cp}(X) = \mathcal{P}_{cv}(X) \cap \mathcal{P}_{cp}(X),$ etc.

Définition 1.14. (métrique de hausdorff)

Soit (X, d) un espace métrique et A, B deux sous-ensembles de X .

i) Pour tout $a \in X$ et $C \in \mathcal{P}(X)$ on définit la distance entre a et C par :

$$d(a, C) = \inf\{d(a, b) : b \in C\}, d(a, \emptyset) = +\infty.$$

ii) On définit la distance entre A et B par :

$$H_d^*(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}$$

iii) On considère la distance pseudo-métrique de Hausdorff

$$H_d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

définie par :

$$H_d(A, B) = \max(H_d^*(A, B), H_d^*(B, A))$$

Donc $(\mathcal{P}_{b,f}(\mathbb{R}^n), H_d)$ est un espace métrique et $(\mathcal{P}_f(\mathbb{R}^n), H_d)$ est un espace métrique généralisé.

D'après cette définition, on peut facilement vérifier les propriétés suivantes :

- $-H_d(A, A) = 0,$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X),$
 $-H_d(A, B) = H_d(B, A),$ pour tout $A, B \in \mathcal{P}(X),$
 $-H_d(A, B) \leq H_d(A, C) + H_d(C, B),$ pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(X).$

Lemme 1.3.1. (Caractérisation de la métrique de Hausdorff)

Soit (X, d) un espace métrique et A, B deux parties de X . Pour chaque $\varepsilon > 0$, considérons les ensembles :

$$A_\varepsilon = \{a \in X : d(a, A) < \varepsilon\} \text{ et } B_\varepsilon = \{b \in X : d(b, B) < \varepsilon\}$$

alors

$$H_d^*(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\}, H_d^*(B, A) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\}$$

et

$$H_d(B, A) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon, A \subset B_\varepsilon\}$$

.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $A \subset B_\varepsilon$, alors

$$d(a, B) \leq \varepsilon \forall a \in A \implies \sup_{a \in A} d(a, B) \leq \varepsilon \implies H_d^*(A, B) \leq \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\}.$$

Supposons que

$$H_d^*(A, B) < \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\} \implies d(a, B) < \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\} \forall a \in A$$

,

donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$d(a, B) < \alpha < \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\} \forall a \in A$$

Donc $A \subset B_\alpha$, alors $\inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\} \leq \alpha$ est contradiction. D'où

$$H_d^*(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\} \dots (1)$$

De la même manière, on peut montrer que

$$H_d^*(B, A) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B \subset A_\varepsilon$, alors

$$d(A, b) \leq \varepsilon \forall b \in B \implies \sup_{b \in B} d(A, b) \leq \varepsilon \implies H_d^*(A, B) \leq \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\}.$$

Supposons que

$$H_d^*(A, B) < \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\} \implies d(A, b) < \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\} \forall b \in B$$

, donc il existe $\beta > 0$ tel que

$$d(A, b) < \beta < \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\} \forall b \in B$$

Donc $B \subset A_\beta$, alors $\inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\} \leq \beta$ est contradiction. D'où

$$H_d^*(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\} \dots (2)$$

d'après (1) et (2) alors :

$$H_d(B, A) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon, A \subset B_\varepsilon\}$$

Remarque 1.1. 1) Généralement, H_d ne vérifie pas la condition

$$H_d(A, B) = 0 \iff A = B.$$

H_d est une pseudo-métrique. Par exemple, soit $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'espace métrique euclidien et $A = [0, 1]$, $B = [0, 1[$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Il est clair que $H_d(A, B) = 0$, mais $A \neq B$; donc H_d n'est pas une distance sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. On remarque que l'ensemble B n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

2) Généralement, H_d ne vérifie pas la condition

$$H_d(A, B) < +\infty, \forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Par exemple, soit $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'espace métrique euclidien et $A = \{0\}$, $B = \mathbb{R}$ il est clair que $H_d(A, B) = +\infty$. On remarque que l'ensemble B n'est pas bornée.

Le lemme suivant montre que la distance de Hausdorff peut être une métrique généraliser.

Lemme 1.3.2. Soit (X, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X . Alors

$$H_d(A, B) = 0 \iff \overline{A} = \overline{B}$$

et donc $(\mathcal{P}_f(X), H_d)$ est un espace métrique généraliser.

En effet ce résultat découle du fait que

$$d(a, A) = 0 \iff a \in \overline{A}.$$

Définition 1.15. Une multi-fonction (ou application multivoque) (ou multi-application) F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de Y . On notera $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ (les notations $F : X \longrightarrow 2^Y$ et $F : X \rightarrow \circ Y$ sont aussi utilisées dans la littérature).

Exemple 1.3. 1) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une multifonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \{1\} , & x > 0 \\ \{-1, 1\} , & x = 0 \\ \{1\} , & x < 0 \end{cases}$$

2) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ une multifonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \{x + 1\} , & x > 0 \\ [-1, 1] , & x = 0 \\ \{x - 1\} , & x < 0 \end{cases}$$

Définition 1.16. On appelle graphe de la multi-fonction F , l'ensemble

$$\text{Graph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

F est à graphe fermé si $\text{Graph}(F)$ est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est fermée.

Définition 1.17. On appelle image de F l'union des images $F(x)$

$$\text{Im}(F) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

et le domaine de F l'ensemble

$$\text{Dom}F = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

Définition 1.18. [25] Soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonctions. On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y avec $F(x_0) \subseteq U$, il existe un ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V$, on a que $F(x) \subseteq U$. Où bien, si pour tout fermée $A \subset Y$, l'ensemble

$$F^-(A) = \{x \in X : F(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

est un fermé dans X

Définition 1.19. Soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonctions. On dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si l'ensemble

$$\{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}.$$

est ouvert pour tout ouvert $U \in Y$. Où bien, si pour tout ouvert $A \subset Y$, l'ensemble $F^-(A)$ est un ouvert dans X .

Définition 1.20. Une application multivoque $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite continue si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement.

Définition 1.21. [3] Une application multivoque F est dite convexe (resp, fermée, compact, borné) si $F(x)$ est convexe (resp, fermée, compact, borné) pour tout $x \in X$

Définition 1.22. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ une application multivoque. On dit que F est totalement bornée si $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$ est borné dans X pour tout ensemble $A \subset X$, c.à.d.

$$\sup_{x \in A} \{\sup\{\|y\| : y \in F(x)\}\} < \infty.$$

Définition 1.23. Une fonction multivoque $F : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est dite Carathéodory si :

- a) la fonction $t \longrightarrow F(t, z)$ est mesurable pour chaque $z \in \mathbb{R}^n$;
- b) pour tout $t \in J$ la fonction $z \longrightarrow F(t, z)$ est semi-continue supérieurement, p.p.

En outre, elle est L^1 -Carathéodory si F est localement intégrablement bornée, c.à.d. pour chaque nombre réel positif r , il existe $h_r \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|F(t, z)\|_{\mathcal{P}} \leq h_r(t) \quad p.p \quad t \in J, \forall \|z\| \leq r.$$

Définition 1.24. Une multi-fonction $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ s'appelle :

- a) k-Lipschitz s'il existe $k > 0$ telle que :

$$H_d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y), \forall x, y \in X;$$

- b) Une contraction s'il est k-Lipschitz avec $k < 1$.

Lemme 1.3.3. [24] Pour une multi-fonction $F : X \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(Y)$ s.c.s. on a

$$\forall x_0 \in X, \lim_{x \rightarrow x_0} \sup F(x) = F(x_0).$$

Lemme 1.3.4. [24] Soit $(K_n)_n \subset K$ tel que K est un sous ensemble compact de X , et X est un espace de Banach séparable. Alors

$$\overline{co}(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup K_n) = \bigcap_{N > 0} \overline{co}(\bigcap_{n \geq N} K_n).$$

Où co désigne l'enveloppe convexe.

1.4 Sélection et mesurabilité

Rappelons qu'un espace mesurable est un couple $(X, \mathcal{A})$, où X est un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est un δ -algèbre (où tribu), c'est-à-dire une famille de parties de X qui vérifie

- i) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- ii) Stabilité par passage au complémentaire, c'est-à-dire Si $B \in \mathcal{A}$, alors $B^c = X/B \in \mathcal{A}$.
- iii) Stabilité par union dénombrable, c'est-à-dire si $B_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}$.

Un espace mesuré est un triplet $(X, \mathcal{A}, v)$ tels que $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, et $v : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est une mesure, c'est-à-dire $v(\emptyset) = 0$ et $v(\bigcup_{i \geq 1} B_i) = \sum_{i \geq 1} v(B_i)$ pour toute famille $(B_i)_{i \geq 1} \subset \mathcal{A}$, à parties disjointes deux à deux.

Définition 1.25. Soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque. On dit que F est (fortement) mesurable si pour chaque fermé $U \subset Y$, l'ensemble $F^-(U) = \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est mesurable dans X .

Définition 1.26. Soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque. On dit que F est (faiblement) mesurable si pour chaque ouvert $U \subset Y$, l'ensemble $F^-(U) = \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est mesurable dans X .

Lemme 1.4.1. [20] Soit X un espace normé séparable. L'application multivoque $F : J \rightarrow \mathcal{P}(X)$ est mesurable si et seulement si pour chaque $x \in X$, la fonction $\varphi : J \rightarrow [0, +\infty[$ définie par :

$$\varphi(t) = d(x, F(t)) = \inf\{\|x - y\| : y \in F(t)\}, t \in J$$

est Lebesgue mesurable.

Définition 1.27. (Sélection)

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite sélection de l'application multivoque $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ si,

$$f(x) \in F(x); \forall x \in X$$

Définition 1.28. (Sélection continue (mesurable))

Une sélection $f : X \rightarrow Y$ d'une application multivoque $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est dite sélection continue(mesurable), si f est continue(mesurable).

Lemme 1.4.2. Soit X un espace de Banach. Soit $F : [0, b] \times X \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ une multi-fonction L^1 –Carathéodory avec $S_{F,y} \neq \emptyset$ et soit Γ un opérateur linéaire continue de $L^1([0, b], X)$ dans $C([0, b], X)$, alors l'opérateur

$$\begin{aligned} \Gamma \circ S_F : C([0, b], X) &\longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(C([0, b], X)) \\ y &\longrightarrow (\Gamma \circ S_F)(y) := \Gamma(S_{F,y}) \end{aligned}$$

est à graphe fermé dans $C([0, b], X) \times C([0, b], X)$, où

$$S_{F,y} = \{v \in L^1([0, b], X) : v(t) \in F(t, y(t)); t \in [0, b]\}.$$

Théorème 1.9. [6] (**Kuratowski-Ryll Nardzewski**)

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, soit $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonction mesurable à valeurs fermées non vides et supposons Y séparable. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Démonstration

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans Y . Pour tout $\omega \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que

$$F(\omega) \cap B(x_n, 1) \neq \emptyset.$$

On pose que $f_0(\omega) = x_n$, où n est le plus petit entier dont la distance à $F(\omega)$ est strictement inférieure à 1. On va vérifier que f_0 est mesurable. Soit V un ouvert dans Y , alors il suffit de montrer que

$$f_0^{-1}(V) = \{\omega \in X : f_0(\omega) \in V\} \in \mathcal{A}.$$

Par définition de f_0 , on a

$$f_0^{-1}(x_n) = F^{-}(B(x_n, 1)) \setminus \bigcup_{m < n} F^{-}(B(x_m, 1)).$$

D'où

$$f_0^{-1}(V) = F^{-}(B(x_n, 1) \cap V) \setminus \bigcup_{m < n} F^{-}(B(x_m, 1) \cap V) \in \mathcal{A}.$$

Donc f_0 est mesurable. Comme Y est séparable, alors on peut vérifier facilement qu'il existe $x_m \in Y$ telle que

$$F(\omega) \cap B(x_n, 1) \cap B(x_m, 1/2) \neq \emptyset, \quad \forall \omega \in X.$$

Soit $f_1(\omega) = x_r$, où r est le plus petit entier naturel tel que pour $\omega \in X$,

$$d(f_0(\omega), F(\omega)) < 1 \quad \text{et} \quad d(f_0(\omega), f_1(\omega)) < 1/2.$$

On suppose que

$$d(f_k(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^k} \quad 0 \leq k \leq m, \forall \omega \in X$$

et

$$d(f_k(\omega), f_{k+1}(\omega)) < \frac{1}{2^{k+1}} \quad 0 \leq k \leq m-1, \forall \omega \in X.$$

On montre qu'il existe f_{m+2} vérifiant

$$d(f_{m+1}(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^{m+1}}, \forall \omega \in X$$

et

$$d(f_{m+1}(\omega), f_{m+2}(\omega)) < \frac{1}{2^m}, \forall \omega \in X.$$

D'après la construction de f_m et f_{m+1} , on utilise la séparabilité de Y pour définir f_{n+m+2}

$$F(\omega) \cap B(x_n, 1) \cap B(x_{n+1}, \frac{1}{2}) \cap \dots \cap B(x_{n+m}, \frac{1}{2^m}) \cap B(x_{n+m+1}, \frac{1}{2^{m+1}}) \neq \emptyset, \forall \omega \in X,$$

où $f_{m+2}(\omega) = x_{n+m+1}$ et $n+m+1$ est le plus petit entier naturel vérifiant l'inégalité ci-dessus et

$$d(f_{n+m}(\omega), f_{n+m+1}(\omega)) < \frac{1}{2^m}, \forall \omega \in X.$$

On en déduit que

$$d(f_{m+1}(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^{m+1}}, \forall \omega \in X$$

et

$$d(f_{m+1}(\omega), f_{m+2}(\omega)) < \frac{1}{2^m}, \forall \omega \in X.$$

On pose que

$$S_n = \{\omega \in X : f_k(\omega) = x_n\} = f_k^{-1}(x_n) \in \mathcal{A}.$$

Alors les ensembles $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ forment une partition de X en ensembles mesurables. Soit $\omega \in X$. Alors il existe $n, k \in \mathbb{N}$ tel que $F(\omega) \cap B(x_n, 2^{-k})$ (qui est non vide par hypothèse); de plus il existe un plus petit entier r tel que la distance entre x_r et $F(\omega) \cap B(x_n, 2^{-k})$ soit inférieure strictement à $2^{-(k+1)}$. On pose que $f_{k+1}(\omega) = x_r$.

$$d(f_k(\omega), F(\omega)) \leq d(f_k(\omega), F(\omega) \cap B(x_n, 2^{-k})) < 2^{-k},$$

et pour tout $z \in F(\omega)$

$$d(f_k(\omega), f_{k+1}(\omega)) \leq d(f_k(\omega), z) + d(z, f_{k+1}(\omega)) < 2^{-k} + 2^{-(k+1)} < 2^{-k+1}.$$

Donc

$$\bigcup_{n \geq 1} S_n = X.$$

Pour tout ω , la suite $(f_k(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y , et donc converge vers un certain élément $f(\omega) \in Y$. Alors f est mesurable (car f est une limite simple de fonctions mesurables). De plus, par

$$d(f_k(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^k}$$

et du fait que F est à image fermée,

$$f(\omega) \in F(\omega) \text{ pour tout } \omega \in X$$

c'est-à-dire que f est une sélection mesurable de F . □

Théorème 1.10. Soit X un espace métrique séparable, et $F : X \longrightarrow \mathcal{P}_f(Y)$ une application multivoque. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) F est mesurable ;
- 2) pour chaque $x \in X$, la fonction $\omega \longrightarrow h(\omega) := d(x, F(\omega))$ est mesurable ;
- 3) F admet des sélections mesurables $f_n, n \in \mathbb{N}$ telles que

$$F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Intégrale d'une application multivoque

Soit $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espace mesuré, et Y un espace de Banach. On note par $\mathcal{F}$ l'ensemble des sélections intégrables de $F : X \longrightarrow P(Y)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in L^1(X, \mathcal{A}, \nu) \mid f(x) \in F(x) \text{ presque partout sur } X \right\}.$$

Définition 1.29. L'intégrale de l'application multivoque F sur X est l'ensemble des intégrales des sélections intégrables de F :

$$\int_X F d\nu := \left\{ \int_X f d\nu \mid f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Autres propriétés sur les inclusions différentielles peut trouvé dans [21].

Définition 1.30. [14] soit E un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, un point $t \in E$ est dite point de densité si :

$$\lim \frac{m(I_n \cap E)}{m(I_n)} = 1$$

pour I_n l'intervalle $]t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}[$

Chapitre 2

Inclusions différentielles sur un espace de Banach

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions par la méthode d'approximation de type euler de l'inclusions différentielle suivante :

$$(2) \begin{cases} \dot{x} \in F(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Où, X un espace de Banach réel avec norme $|\cdot|$, et $\mathcal{B}$ l'ensemble de tous les sous-ensemble fermés convexes bornés de X qui ont un intérieur non vide, F est une multi-fonction de sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X$ dans $\mathcal{B}$.

2.1 Notations

On note par $S(u, r)$ la boule ouvert de centre u et de rayon $r > 0$. On met $S = S(0, 1) \subset X$. Pour tout ensemble $A \subset X$. ∂A désigne par la frontière de A .

Désigner par $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{B}$) l'espace de tous les sous-ensembles non vides de X qui sont bornées (resp. convexe fermé borné d'un intérieur non vide). $\mathcal{K}$ est muni par la pseudo métrique de Hausdorff

$$H_d(A, B) = \inf\{t > 0 | A \subset B + tS, B \subset A + tS\}, A, B \subset \mathcal{K}.$$

De plus, H_d devient une métrique sur $\mathcal{B}$. pour tout $x \in X$ et $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, nous avons $d(x, A) = \inf\{|x - a| / a \in A\}$. Dans l'espace $\mathbb{R} \times X$ nous utilisons la norme $|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times X$.

Soit (t_0, x_0) dans le domaine de F . On considère la restriction de F sur un sous-ensemble ouvert non vide de son domaine, on note $\Omega_2 = J_{2a} \times D_{2R}$, où $J_{2a} =]t_0 - 2a, t_0 + 2a[$ et $D_{2R} = S(x, 2R)$. Désigner par $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ l'ensembles des toutes les solutions de (1) qui sont définis sur $[t_0, T]$.

2.2 Résultat d'existence

On suppose qu'on a l'hypothèse suivante :

(*) F est une application continue de Ω_2 dans $\mathcal{B}$ et satisfait

$$H_d(F(t, x), 0) < M, \forall (t, x) \in \Omega_2.$$

Proposition 2.1. *Soit F satisfait (*). Alors le problem (1) admet au moins une solution $x : [t_0, T] \longrightarrow X$, où $0 < T - t_0 < \min\{a, \frac{R}{M}\}$. De plus, si X est réflexif, la limite uniforme des solutions est une solution de (1).*

Démonstration Supposons que F satisfait (*). On introduit la fonction suivante $\sigma : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\sigma(t, x) = \frac{1}{2} \sup\{r > 0 \mid \text{il existe } y \in F(t, x) \text{ tel que } S(y, r) \subset F(t, x)\}.$$

F est continue et prend les valeurs dans $\mathcal{B}$, il en résulte que σ est continue et positive [[32], Lemme 3.1]. Nous désignons par $L^p([t_0, T], X)$, $1 \leq p < +\infty$, l'espace de banach de tous les fonctions mesurables $u : [t_0, T] \longrightarrow X$, tel que :

$$\int_{t_0}^T |u(t)|^p dt < +\infty.$$

muni du norme

$$\left(\int_{t_0}^T |u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous avons $\Omega_1 = J_a \times D_R$ où, $J_a = (t_0 - a, t_0 + a)$, et $D_R = S(x_0, R)$. Soit $v_0 \in F(t_0, x_0)$ tel que

$$d(v_0, \partial F(t_0, x_0)) > \sigma(t_0, x_0).$$

Soit $t_1 = \sup\{t_0 \leq \tau \leq T \mid d(v_0, \partial F(t, x_0 + (t - t_0)v_0)) > 0, \text{ pour chaque } t \in [t_0, \tau]\}$. On définit $x_1 : [t_0, t_1] \longrightarrow X$ par :

$$x_1(t) = x_0 + (t - t_0)v_0, t \in [t_0, t_1]$$

on remarque que $(t, x_1(t)) \in \Omega_1$ pour $t \in [t_0, t_1]$. Maintenant supposons que

$$x_n : [t_{n-1}, t_n] \longrightarrow X, n \geq 1$$

a été défini et satisfait $(t, x_n(t)) \in \Omega_1$ pour chaque $t \in [t_{n-1}, t_n]$.

Soit $v_n \in F(t_n, x_n(t_n))$ tel que $d(v_n, \partial F(t_n, x_n(t_n))) > \sigma(t_n, x_n(t_n))$.

Soit $t_{n+1} = \sup\{t_n \leq \tau \leq T \mid d(v_n, \partial F(t, x_n(t) + (t - t_n)v_n)) > 0 \text{ pour tout } t \in [t_n, \tau]\}$ on définit $x_{n+1} : [t_n, t_{n+1}] \longrightarrow X$ par :

$$x_{n+1}(t) = x_n(t_n) + (t - t_n)v_n, t \in [t_n, t_{n+1}]$$

il est clair que $(t, x_{n+1}(t)) \in \Omega_1$ si $t \in [t_n, t_{n+1}]$, donc la suite de fonction $\{x_n\}$ est bien définie.

Désigner par x la fonction linéaire qui est égale à x_n sur $[t_{n-1}, t_n]$, $n=1,2,\dots$, avec $t_1 \leq t_2 \leq \dots t_n < t_{n+1} \dots < T$.

nous affirmons que, pour un certain n , $t_n = T$, Supposons le contraire. On a $\{t_n\}$ est strictement croissante, et puisque elle est bornée, Elle a une limite noté $\hat{t}$, $\hat{t} \leq T$.

On pose $\hat{x} = x(\hat{t})$ et fixé $0 < \varepsilon < \sigma(\hat{t}, \hat{x})$. D'après la continuité de F et σ , il existe $\delta > 0$ tel que $|t - \hat{t}| < \frac{\delta}{2(M+1)}$ et $|x - \hat{x}| < \delta$ implique que

$$H_d(\partial F(t, x), \partial F(\hat{t}, \hat{x})) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |\sigma(t, x) - \sigma(\hat{t}, \hat{x})| < \frac{\varepsilon}{4},$$

on fixe n tel que $|t_n - \hat{t}| < \frac{\delta}{2(M+1)}$ et $|x_n(t_n) - \hat{x}| < \frac{\delta}{2}$.

Pour chaque $t \in [t_n, \hat{t}]$ nous avons $|x_n(t_n) + (t - t_n)v_n - \hat{x}| < \delta$ donc

$$\begin{aligned}
d(v_n, \partial F(t, x_n(t_n) + (t - t_n)v_n)) &\geq d(v_n, \partial F(t_n, x_n(t_n) + (t - t_n)v_n)) \\
&\quad - H_d(\partial F(t_n, x_n(t_n)), \partial F(\hat{t}, \hat{x})) \\
&\quad - H_d(\partial F(\hat{t}, \hat{x}), \partial F(t, x_n(t_n) + (t - t_n)v_n)) \\
&> \sigma(t_n, x_n(t_n)) - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \\
&> \sigma(\hat{t}, \hat{x}) - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Par conséquent $t_{n+1} \geq \hat{t}$, qui est une contradiction. Donc il existe n tel que $t_n = T$, et il est claire que $x : [t_0, T] \rightarrow X$ est une solution de (1).

Supposons maintenant, X est réflexif et soit $\{z_n\}$ une suite de solutions de (1) converge uniformément vers z . On va montrer que z est une solution de (1). En effet $\{\dot{z}_n\}$, comme un ensemble borné contenu dans l'espace de Banach réflexif $L^2([t_0, T], X)$ (voir [22], p.89), est faiblement précompact. D'après théorème de Eberlein-Smulian's le sous-suite $\{\dot{z}_n\}$ converge faiblement vers une fonction mesurable $\omega \in L^2([t_0, T], X)$, Par conséquent, d'après théorème de Mazur's ([22], p.36, corrolaire) la suite de combinaison convexe $\{\sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n z_{n+i}\}$ converge fortement vers ω dans $L^2([t_0, T], X)$ et donc aussi dans $L^1([t_0, T], X)$. Par conséquent on a

$$\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n z_{n+i}(t) = x_0 + \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^n z_{n+i}(s) \right) ds, t \in [t_0, T]$$

quand $n \rightarrow +\infty$, on trouve :

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \omega(s) ds, t \in [t_0, T]$$

puisque F est continue et prend des valeurs convexes fermées, alors la fonction Lipschitzien z est une solution de (1) Ceci termine la preuve. $\square$

Chapitre 3

Catégorie de Baire sur un problème d'inclusion différentielle

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions par la catégorie de Baire de problème suivant :

$$(2) \begin{cases} \dot{x} \in \partial F(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Où, X un espace de Banach réel avec norme $|\cdot|$, et $\mathcal{B}$ l'ensemble de tous les sous-ensemble fermés convexes bornés de X qui ont un intérieur non vide, F est une multi-fonction de sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X$ dans $\mathcal{B}$ et $\partial F(t, x)$ désigne par la frontière de $F(t, x)$.

3.1 Princip de Baire et existence

Désigner par $\mathcal{M}_{\partial F}$ l'ensembles des toutes les solutions de (2) qui sont définis sur $[t_0, T]$. Si X est réflexif, d'après la proposition 2.1 $\mathcal{M}_F$ est un sous-ensemble fermé non vide de l'espace de Banach $C([t_0, T], X)$. Par conséquent, $\mathcal{M}_F$ est un espace métrique complet non vide sous la métrique induite par la norme de convergence uniforme de $C([t_0, T], X)$. Notre objectif est de montrer que $\mathcal{M}_{\partial F}$ est un G_δ -sous ensemble dense dans $\mathcal{M}_F$.

Pour toute $\theta > 0$, on note

$$\mathcal{N}_\theta = \{x \in \mathcal{M}_F / \int_{t_0}^T d(\dot{x}(s), \partial F(s, x(s))) ds < \theta\}.$$

Comme $(t, x) \longrightarrow \partial F(t, x)$ est une application continue de Ω_2 dans $\mathcal{K}$ et $\dot{x}$ est mesurable, alors la fonction sous l'intégrale est mesurable.

Proposition 3.1. *Soit F satisfait $(*)$. Alors, pour tout $\theta > 0$, l'ensemble $\mathcal{N}_\theta$ est dense dans $\mathcal{M}_\mathcal{F}$. Si de plus X est réflexif, l'ensemble $\mathcal{N}_\theta$ est un ouvert dans $\mathcal{M}_\mathcal{F}$.*

3.1.1 $\mathcal{N}_\theta$ est dense

Soit F satisfait $(*)$. Pour $\mu > 0$ et $(t, x) \in \Omega_2$, l'ensemble

$$\begin{aligned} F_\mu(t, x) &= \{u \in F(t, x) | d(u, \partial F(t, x)) \leq \mu\}, \\ \Phi_\mu(t, x) &= \{u \in F(t, x) | d(u, \partial F(t, x)) > \mu\}, \\ G_\mu(t, x) &= \{u \in F(t, x) | d(u, \partial F(t, x)) = \mu\}. \end{aligned}$$

Soit $(\hat{t}, \hat{x}) \in \Omega_2$ et $\theta < \mu < \sigma(\hat{t}, \hat{x})$. Alors $F_\mu(\hat{t}, \hat{x})$ et $G_\mu(\hat{t}, \hat{x})$ sont dans $\mathcal{K}$ et $\Phi(\hat{t}, \hat{x})$ est sous-ensemble convexe ouvert borné et non vide de X ([15], remarque 3.3) de plus, il résulte de ([15], remarque 3.8) qu'il existe un voisinage V de $(\hat{t}, \hat{x})$ tel que l'application $(t, x) \longrightarrow \Phi_\mu(t, x)$ et $(t, x) \longrightarrow G_\mu(t, x)$ (respectivement, de V dans les sous-ensembles convexes ouverts bornés et non vides de X et, de V dans $\mathcal{K}$) sont définis et continue dans V .

Pour tout $x \in \mathcal{M}_\mathcal{F}$, et $\varepsilon > 0$, on pose :

$$\Delta_x^\mu = \{t \in [t_0, T] | d(\dot{x}(t), \partial F(t, x(t))) > \mu\}.$$

Lemme 3.1.1. *Soit F satisfait $(*)$. Soient $x \in \mathcal{M}_\mathcal{F}$ et $\varepsilon > 0$ fixé, et*

$$0 < \mu < \min\{\sigma(t, x) | t \in [t_0, T]\}$$

on suppose que Δ_x^μ le mesure de lebesgue $m(\Delta_x^\mu) > 0$. Soit $t_0 < \tau < T$ un point de densité de Δ_x^μ . Alors il existe $\lambda_0(\tau) > 0$ tel que pour chaque $0 < \lambda < \lambda_0(\tau)$ il existe une fonction $z_{\tau, \lambda} : J_{\tau, \lambda} \longrightarrow X$, $J_{\tau, \lambda} = [\tau - \lambda, \tau + \lambda] \subset [t_0, T]$, qui est lipschitzien, différentiable p.p et tel que :

$$z_{\tau, \lambda}(\tau \overset{+}{-} \lambda) = x(\tau \overset{+}{-} \lambda) \tag{3.1}$$

$$|z_{\tau,\lambda}(t) - x(t)| < \varepsilon \text{ pour chaque } t \in J_{\tau,\lambda} \quad (3.2)$$

$$\dot{z}_{\tau,\lambda}(t) \in F_\mu(t, z_{\tau,\lambda}(t)) \text{ p.p dans } J_{\tau,\lambda} \quad (3.3)$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Soit τ un point de densité de Δ_x^μ , et d'après la continuité de $G_{\frac{\mu}{2}}$ et Φ_μ à $(\tau, x(\tau))$ il s'ensuit qu'il existe $0 < \mu < \min\{\sigma(t, x) | t \in [t_0, T]\}$ tel que :

$$\frac{m(J_{\tau,\lambda} \setminus \Delta_x^\mu)}{m(J_{\tau,\lambda})} < \frac{\mu}{8M}, \text{ pour chaque } 0 < \lambda \leq \delta(\tau)$$

De plus, pour chaque $(t, y) \in S((\tau, x(\tau)), \delta(\tau))$, l'ensemble $G_{\frac{\mu}{2}}(t, y)$, (resp $\Phi_\mu(t, y)$) fermé non vide (resp ouvert borné convexe et non vide) et satisfait

$$G_{\frac{\mu}{2}}(\tau, x(\tau)) \subset G_{\frac{\mu}{2}}(t, y) + \frac{\mu}{2}S \subset F_\mu(t, y), \quad (3.4)$$

$$\Phi_\mu(t, y) \subset \Phi_\mu(\tau, x(\tau)) + \frac{\mu}{8}S$$

on fixé $0 < \lambda_0(\tau) < \frac{\delta(\tau)}{[8(M+1)]}$. On remarque que pour chaque $s \in J_{\tau, \lambda_0(\tau)}$ nous avons $(s, x(s)) \in S((\tau, x(\tau)), \frac{\delta(\tau)}{2})$. Soit $J_{\tau,\lambda}$ pour tout intervalle fermé $[\tau - \lambda, \tau + \lambda]$, $0 < \lambda < \lambda_0(\tau)$ on a :

$$q = \int_{J_{\tau,\lambda}} \dot{x}(s)ds = \int_{J_{\tau,\lambda} \cap \Delta_x^\mu} \dot{x}(s)ds + \int_{J_{\tau,\lambda} \setminus \Delta_x^\mu} \dot{x}(s)ds.$$

Pour chaque $s \in J_{\tau,\lambda} \cap \Delta_x^\mu$, nous avons $\dot{x}(s) \in \Phi_\mu(s, x(s)) \subset \Phi_\mu(\tau, x(\tau)) + (\frac{\mu}{8})S$, donc

$$\begin{aligned} \int_{J_{\tau,\lambda} \cap \Delta_x^\mu} \dot{x}(s)ds &\in m(J_{\tau,\lambda} \cap \Delta_x^\mu)[\Phi_\mu(\tau, x(\tau)) + \frac{\mu}{8}S] \\ &\subset m(J_{\tau,\lambda})[\Phi_\mu(\tau, x(\tau)) + \frac{\mu}{8}S] + m(J_{\tau,\lambda} \setminus \Delta_x^\mu)MS \\ &\subset m(J_{\tau,\lambda})[\Phi_\mu(\tau, x(\tau)) + \frac{\mu}{4}S]. \end{aligned}$$

Dautre part

$$\begin{aligned} \left| \int_{J_{\tau,\lambda} \setminus \Delta_x^\mu} \dot{x}(s)ds \right| &\leq Mm(J_{\tau,\lambda} \setminus \Delta_x^\mu) \\ &< \frac{\mu}{8}m(J_{\tau,\lambda}) \end{aligned}$$

donc

$$q \in m(J_{\tau,\lambda})[\Phi_\mu(\tau, x(\tau)) + \frac{3}{8}S]$$

et donc

$$\frac{q}{m(J_{\tau,\lambda})} \in \Phi_\mu(\tau, x(\tau)) + \frac{\mu}{2}S \subset \Phi_{\frac{\mu}{2}}(\tau, x(\tau))$$

puisque $\Phi_{\frac{\mu}{2}}(\tau, x(\tau))$ est ouvert, il existe deux points $q_1, q_2 \in \partial\Phi_{\frac{\mu}{2}}(\tau, x(\tau)) = G_{\frac{\mu}{2}}(\tau, x(\tau))$ tel que $\frac{q}{m(J_{\tau,\lambda})} = \alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2$ pour certain $0 < \alpha < 1$.

Par conséquent, et par une partition appropriée de $J_{\tau,\lambda}$ dans deux intervalle J_1 et J_2 on a : $q = q_1 m(J_1) + q_2 m(J_2)$.

définir maintenant $\omega_{\tau,\lambda}(s) = q_1 \chi_{J_1}(s) + q_2 \chi_{J_2}(s)$, $s \in J_{\tau,\lambda}$ où χ_{J_i} dénote la fonction caractéristique de $J_i, i = 1, 2$ on remarque que $\omega_{\tau,\lambda}$ est une fonction mesurable avec des valeurs $\omega_{\tau,\lambda}(s) \in G_{\frac{\mu}{2}}(\tau, x(\tau))$ et satisfait

$$\int_{J_{\tau,\lambda}} \omega_{\tau,\lambda}(s) ds = \int_{J_{\tau,\lambda}} \dot{x}(s) ds$$

on définit

$$z_{\tau,\lambda}(t) = x(\tau - \lambda) + \int_{\tau-\lambda}^t \omega_{\tau,\lambda}(s) ds, t \in J_{\tau,\lambda}$$

il est clair que $z_{\tau,\lambda}(\tau - \lambda) = x(\tau - \lambda)$. En outre, pour chaque $t \in J_{\tau,\lambda}$, nous avons

$$\begin{aligned} |z_{\tau,\lambda}(t) - x(t)| &\leq \int_{J_{\tau,\lambda}} |\omega_{\tau,\lambda}(s) - \dot{x}(s)| ds \\ &< 2Mm(J_{\tau,\lambda}) \\ &< \frac{\delta(\tau)}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} |z_{\tau,\lambda}(t) - x(\tau)| &\leq |z_{\tau,\lambda}(t) - x(t)| + |x(t) - x(\tau)| \\ &< \delta(\tau) \end{aligned}$$

il s'ensuit que $(t, z_{\tau,\lambda}(t)) \in S((\tau, x(\tau)), \delta(\tau))$, et d'après (3.4) on trouve

$$\dot{z}_{\tau,\lambda}(t) = \omega_{\tau,\lambda}(t) \in G_{\frac{\mu}{2}}(\tau, x(\tau)) \subset F_\mu(t, z_{\tau,\lambda}(t)) \text{ p.p dans } J_{\tau,\lambda}$$

donc la preuve est complet □

Lemme 3.1.2. Soit les hypothèses de Lemme 3.1.1 sont satisfaites. Alors il existe une solution $z : [t_0, T] \rightarrow X$, de (1) tel que :

$$|z(t) - x(t)| < \varepsilon \text{ pour chaque } t \in [t_0, T], \quad (3.5)$$

$$\dot{z}(t) \in F_\mu(t, z(t)) \text{ p.p dans } [t_0, T]. \quad (3.6)$$

Démonstration Soit Δ^* l'ensemble des points de densité de Δ_x^μ . Il est clair que $m(\Delta^*) = m(\Delta_x^\mu)$. Si $m(\Delta^*) = 0$ il n'y a rien à prouver. si $m(\Delta^*) > 0$ et si $\tau \in \Delta^*$, $t_0 < \tau < T$ d'après le Lemme 3.1.1 il existe $\lambda_0(\tau) > 0$ tel que pour chaque $0 < \lambda < \lambda_0(\tau)$ il existe une fonction lipschitzien $z_{\tau,\lambda} : J_{\tau,\lambda} \rightarrow X$ qui est différentiable p.p et satisfait (3.1), (3.2), (3.3). De même dans [8], on considère la famille de tous les intervalles fermés $J_{\tau,\lambda}$ où $\tau \in \Delta^*$, $t_0 < \tau < T$, et $0 < \lambda < \lambda_0(\tau)$. Puisque les intervalles $J_{\tau,\lambda}$ sont couverture au sens de Vitali de Δ^* , d'après le théorème de Vitali, il existe une sous-couverture dénombrable de Δ^* par intervalles disjoints par paire $J_i = J_{\tau_i,\lambda_i}$ tel que $m(\Delta^* \setminus \bigcup_i J_i) = 0$.
puisque

$$\omega(t) = \sum_i \dot{z}_{\tau,\lambda}(t) \chi_{J_i}(t) + \dot{x}(t) \chi_{[t_0,T] \setminus \bigcup_i J_i}(t), t \in [t_0, T] \text{ p.p}$$

on définit

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \omega(s) ds, t \in [t_0, T]$$

il est clair que z est lipschitzien et $\dot{z}(t) = \omega(t)$ p.p. De plus z et x sont égales aux points d'extrémité à chaque intervalle J_i et à chaque $t \in [t_0, T] \setminus \bigcup_i J_i$. Nous prouvons seulement la première partie (la preuve de la deuxième partie est similaire). À cette fin, on définit $J_i = [a_i, b_i]$ et on désigne par $\bigcup_k J_k$ la réunion de tous les intervalles J_k (au sens de Vitali's sous-recouvrement de Δ^*) qui sont contenus dans $[t_0, a_i]$.

Nous avons

$$\begin{aligned} z(a_i) &= x_0 + \sum_k \int_{J_k} \omega(s) ds + \int_{[t_0, a_i] \setminus \bigcup_k J_k} \omega(s) ds \\ &= x_0 + \sum_k \int_{J_k} \dot{z}_{\tau_k, \lambda_k}(s) ds + \int_{[t_0, a_i] \setminus \bigcup_k J_k} \dot{x}(s) ds \end{aligned}$$

Ainsi

$$z(a_i) = x_0 + \sum_k \int_{J_k} \dot{x}(s) ds + \int_{[t_0, a_i] \setminus \bigcup_k J_k} \dot{x}(s) ds = x(a_i)$$

et donc, claire que, $z(b_i) = x(b_i)$ le énoncé est prouvée. Il s'agit de

$$z(t) = \begin{cases} z_{\tau_i, \lambda_i}(t) & t \in J_i \quad i = 1, 2, \dots \\ x(t) & t \in [t_0, T] \setminus \bigcup_i J_i \end{cases}$$

et d'après (3.2), nous obtenons (3.5). De plus,

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} \dot{z}_{\tau_i, \lambda_i}(t) & t \in J_i \text{ p.p } i = 1, 2, \dots \\ \dot{x}(t) & t \in [t_0, T] \setminus \bigcup_i J_i \text{ p.p } \end{cases}$$

puisque $m(\Delta^* \setminus \bigcup_i J_i) = 0$ et l'ensemle $\Delta^* \subset \Delta_x^\mu$ satisfait $m(\Delta_x^\mu \setminus \Delta^*) = 0$, il existe une ensemble $\hat{J} \subset [t_0, T]$ de mesure nulle telle que $\Delta_x^\mu \subset \hat{J} \cup (\bigcup_i J_i)$. Ainsi, pour presque tout $t \in [t_0, T] \setminus \bigcup_i J_i$, nous avons $t \notin \Delta_x^\mu$, donc $\dot{x}(t) \in F_\mu(t, x(t))$, d'autre part, pour presque tout $t \in J_i$, nous avons $\dot{z}(t) = \dot{z}_{\tau_i, \lambda_i}(t) \in F_\mu(t, z_{\tau_i, \lambda_i}(t)) = F_\mu(t, z(t))$. Donc z satisfait (3.6) et le Lemme est prouvée. $\square$

Démonstration ($\mathcal{N}_\theta$ est dense) Soit $x \in \mathcal{M}_\mathcal{F}$ et $\varepsilon > 0$ fixe. D'après le Lemme 3.1.2 il existe $z \in \mathcal{M}_\mathcal{F}$ satisfait (3.5) et (3.6). Et d'après (3.6), $\partial F_\mu(t, z(t)) \leq \mu$ p.p donc $z \in \mathcal{N}_\theta$ tell que $\mu < \frac{\theta}{(T-t_0)}$, puisque $|z(t) - x(t)| < \varepsilon$, pour chaque $t \in [t_0, T]$, l'ensemble $\mathcal{N}_\theta$ est dense dans $\mathcal{M}_\mathcal{F}$. $\square$

3.1.2 $\mathcal{N}_\theta$ est ouvert

Supposons que X est réflexif), et on montre que l'ensemble $\mathcal{N}_\theta$ est ouvert dans $\mathcal{M}_\mathcal{F}$.

Lemme 3.1.3. Soit F satisfait (*). Soit K un sous-ensemble compact de Ω_1 . Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $\delta > 0$ ($\delta < \min\{a, R\}$) tell que pour chaque $(t, u) \in K$, et tout $(s, v) \in S((t, u), \delta)$ nous avons $F(s, v) \subset F(t, u) + \varepsilon S$

Lemme 3.1.4. Soit $A \in \mathcal{B}$. Si $u_1, u_2, \dots, u_n \in A$, est $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, alors

$$d\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \partial A\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i d(u_i, \partial A)$$

Démonstration Nous observons que, pour toute $v \in A$, $d(v, \partial A) = \sup\{\beta \geq 0 \mid v + \beta S \subset A\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, il existe $\beta_i > d(u_i, \partial A) - \varepsilon$, $\beta_i \geq 0$ tel que $u_i + \beta_i S \subset A$. Puisque A est convexe

$$A \supset \sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i + \beta_i S) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right) S$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \partial A\right) &\geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \\ &> \sum_{i=1}^n \alpha_i d(u_i, \partial A) - \varepsilon \end{aligned}$$

Puisque ε est arbitraire, le Lemme est prouvé $\square$

Démonstration ($\mathcal{N}_\theta$ est ouvert) Il suffit de montrer que l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{N}}_\theta = \{x \in \mathcal{M}_\mathcal{F} \mid \int_{t_0}^T d(\dot{x}(t), \partial F(t, x(t))) dt \geq \theta\}$$

est fermé dans $\mathcal{M}_\mathcal{F}$. En effet, supposons que $\{x_n\} \subset \tilde{\mathcal{N}}_\theta$ converge uniformément vers $x \in \mathcal{M}_\mathcal{F}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et l'ensemble $K = \{(t, x(t)) \mid t \in [t_0, T]\}$ et soit δ correspondant (à ε et K) selon de Lemme 3.1.3 il existe n_0 tel que pour chaque $m \geq n_0$ et tout $t \in [t_0, T]$ nous avons $x_m(t) \in S((t, x(t)), \delta) \subset \Omega_2$ donc, d'après le Lemme 3.1.3

$$\dot{x}_m(t) \in F(t, x_m(t)) \subset F(t, x(t)) + \varepsilon S, t \in [t_0, T], m \geq n_0 \quad (3.7)$$

D'autre part, comme X est réflexif et $\{x_n\}$ converge uniformément vers x , d'après la proposition 2.1 il s'ensuit qu'une sous-suite $\{\dot{x}_n\}$ converge faiblement vers $\dot{x}$ dans $L^2([t_0, T], X)$. Donc la suite de combinaison convexe $\left\{ \sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n \dot{x}_{n+i} \right\}$ converge fortement vers $\dot{x}$ dans $L^2([t_0, T], X)$ et on particulier dans $L^1([t_0, T], X)$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T d(\dot{x}(t), \partial F(t, x(t))) dt &\geq \int_{t_0}^T d(\dot{x}(t), \partial[F(t, x(t)) + \varepsilon S]) dt - \varepsilon(T - t_0) \\ &\geq \int_{t_0}^T d\left(\sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n \dot{x}_{n+i}(t), \partial[F(t, x(t)) + \varepsilon S]\right) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^T \left| \sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n \dot{x}_{n+i}(t) - \dot{x}(t) \right| dt - \varepsilon(T - t_0) \end{aligned}$$

Soit $n \geq n_0$, alors d'après (3.7) et Lemme 3.1.4, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T d \left(\sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n \dot{x}_{n+i}(t), \partial[F(t, x(t)) + \varepsilon S] \right) dt &\geq \sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n \int_{t_0}^T d(\dot{x}_{n+i}(t), \partial[F(t, x(t)) + \varepsilon S]) dt \\ &\geq \sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n \int_{t_0}^T d(\dot{x}_{n+i}(t), \partial F(t, x_{n+i}(t))) dt \end{aligned}$$

Par conséquent, puisque $x_{n+i} \in \tilde{\mathcal{N}}_\theta$, nous obtenons

$$\int_{t_0}^T d(\dot{x}(t), \partial F(t, x(t))) dt \geq \theta - \int_{t_0}^T \left| \sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n \dot{x}_{n+i}(t) - \dot{x}(t) \right| dt - \varepsilon(T - t_0)$$

Soit $n \rightarrow +\infty$. Puisque $\left\{ \sum_{i=0}^{k_n} \alpha_i^n \dot{x}_{n+i} \right\}$ converge vers $\dot{x}$ dans $L^1([t_0, T], X)$ et ε est arbitraire, il s'ensuit que $x \in \tilde{\mathcal{N}}_\theta$. Ainsi $\tilde{\mathcal{N}}_\theta$ est fermé, donc $\mathcal{N}_\theta$ est ouvert et la preuve de la proposition 3.1 est complète. $\square$

3.2 Résultat d'existence

D'après les propositions 2.1 et 3.1 nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soit X est un espace de banach réel et réflexif. Soit F satisfait (*). Alors l'ensemble $\mathcal{M}_{\partial\mathcal{F}}$ est dense dans le G_δ sous-ensemble de $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ et donc, en particulier $\mathcal{M}_{\partial\mathcal{F}}$ est non vide.*

Démonstration Soit $\theta_1 > \theta_2 > \dots$ tel que $\theta_n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$. D'après la proposition 2.1 $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ est un espace métrique complet et, d'après la proposition 3.1, les ensembles $\mathcal{N}_{\theta_n}$ sont ouverts et denses dans $\mathcal{M}_\mathcal{F}$. Par conséquent

$$\mathcal{N} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_{\theta_n}$$

est dense de le G_δ sous-ensemble de $\mathcal{M}_\mathcal{F}$ et donc $\mathcal{N}$ est non vide. d'où $\mathcal{N} = \mathcal{M}_\mathcal{F}$, le théorème est prouvé $\square$

Chapitre 4

Inclusions différentielles impulsives sur un intervalle compact

Cette partie traite de l'existence des solutions d'un problème d'inclusion différentielle ordinaire impulsive du premier ordre sur un intervalle compact dans le cas convexe.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in F(t, y(t)), & t \in J/\{t_1, \dots, t_m\}, \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k^-)), & k = 1, 2, \dots, m, \\ y(0) = a, & a \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $F : J \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une multifonction, et $I_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\forall k = 1, 2, \dots, m$.

Définition 4.1. Une fonction $y \in PC \cap \cup_{k=1}^m AC(J_k, \mathbb{R}^n)$ est dite solution du problème (4.1) s'il existe $v \in L^1(J, \mathbb{R}^n)$ tel que $v(t) \in F(t, y(t))$ p.p. $t \in J$,

$\dot{y}(t) = v(t) \forall t \in J/\{t_1, \dots, t_m\}$, $y(t_k^+) - y(t_k^-) = I_k(y(t_k^-))$, $k = 1, 2, \dots, m$, et $y(0) = a$.

4.0.1 L'espace des solutions

Soient $J_k =]t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, \dots, m$; $J_0 = [0, t_1]$; $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{m+1} = b$ et soit y_k la restriction d'une fonction y sur J_k . On considère l'espace $PC = \{y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n / y_k \in C(J_k, \mathbb{R}^n), k = 0, 1, \dots, m, \text{ et } y(t_k^-) \text{ et } y(t_k^+) \text{ existent et satisfont } y(t_k^-) = y(t_k), \forall k = 1, 2, \dots, m\}$.

muni de la norme

$$\|y\|_{PC} = \max\{\|y\|_{J_k} : k = 0, 1, \dots, m\} = \sup_{t \in [0, b]} \|y(t)\|,$$

où

$$\|y\|_{J_k} = \sup_{t \in J_k} \|y(t)\|.$$

Lemme 4.0.1. *L'espace $(PC, \|\cdot\|_{PC})$ est un espace de Banach.*

Démonstration :

Soit $(y_q)_q$ une suite de Cauchy dans PC, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall q_0, q_1 \geq n_0 \implies \|y_{q_0} - y_{q_1}\|_{PC} \leq \varepsilon$$

tq

$$\|y_{q_0} - y_{q_1}\|_{PC} = \sup_{t \in [0, b]} \|y_{q_0}(t) - y_{q_1}(t)\|.$$

Comme $y_q \in PC$ alors $y_q \in C(J_0, \mathbb{R}^n)$, et on a

$$\|y_q - y_{q_1}\|_{J_0} \leq \|y_q - y_{q_1}\|_{PC} \leq \varepsilon$$

donc $(y_q)_q$ est une suite de Cauchy dans $C(J_0, \mathbb{R}^n)$ alors on a $\exists y_0 \in C(J_0, \mathbb{R}^n)$ tq

$$\|y_q - y_{q_1}\|_{J_0} \longrightarrow 0 \text{ quand } q \longrightarrow \infty.$$

On a aussi $y_q \in C(J_1, \mathbb{R}^n)$, on considère la suite des fonctions

$$\tilde{y}_q(t) = \begin{cases} y_q(t); & t \in]t_1, t_2] \\ y_q(t^+); & t = t_1 \end{cases}$$

alors $(\tilde{y}_q)_q$ est une suite de Cauchy dans $C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, donc $\exists y_1 \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$ tq $\lim_{q \rightarrow \infty} \tilde{y}_q = y_1$.

$$\lim_{q \rightarrow \infty} y_q = y_1; \quad \forall t \in]t_1, t_2]; \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \tilde{y}_q(t_1) = \lim_{q \rightarrow \infty} y_q(t_1^+) = y_1(t_1)$$

Donc $\|y_q - y_1\|_{J_1} \longrightarrow 0$ quand $q \longrightarrow \infty$.

Par analogie, on peut continuer la démonstration jusqu'à l'étape "m", d'où

$\lim_{q \rightarrow \infty} \|y_q - y\|_{PC} = 0$; tel que

$$y(t) = \begin{cases} y_0(t); & t \in J_0 \\ y_1(t); & t \in J_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_m(t); & t \in J_m \end{cases}$$

Définition 4.2. (Solution du problème (??))

Une fonction $y \in PC \cap \cup_{k=1}^m AC(J_k, {}^n)$ est dite solution du (??) si

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= f(t, y(t)), t \in J \\ y(t_k^+) - y(t_k^-) &= I_k(y(t_k)), k = 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

et

$$y(0) = a.$$

Lemme 4.0.2. Une fonction $y \in PC \cap \cup_{k=1}^m AC(J_k, {}^n)$ est une solution du problème (??) si et seulement si

$$y \in PC, y(t) = a + \int_0^t f(s, y(s))ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k)), \quad t \in [0, b]. \quad (4.2)$$

Démonstration :

Soit $t \in J$

- si $t \in [0, t_1]$, on a $y(t) = a + \int_0^t f(s, y(s))ds$.
- si $t \in]t_1, t_2]$, la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_1^+) &= y(t_1^-) + I_1(y(t_1)), \end{cases}$$

est donnée comme :

$$\begin{aligned}y(t) &= y(t_1^+) + \int_{t_1}^t f(s, y(s))ds \\ &= (y(t_1) + I_1(y(t_1))) + \int_{t_1}^t f(s, y(s))ds \\ &= y(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, y(s))ds + I_1(y(t_1)) \\ &= \left(a + \int_0^{t_1} f(s, y(s))ds \right) + \int_{t_1}^t f(s, y(s))ds + I_1(y(t_1)) \\ &= a + \int_0^t f(s, y(s))ds + I_1(y(t_1)) \\ &= a + \int_0^t f(s, y(s))ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k))\end{aligned}$$

et ainsi de suite

⋮

— si $t \in]t_m, b]$ on trouve aussi

$$y(t) = a + \int_0^t f(s, y(s)) + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k)).$$

Inversement il est facile de démontrer que si y est une solution de l'équation integrale (4.2) alors y est solution du problème (??).

4.1 L'existence des solutions

Théorème 4.1. *Supposons qu'il existe une fonction continue croissante $\psi : [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, et $p \in L^1(J, R_+)$ tel que*

$$\|F(t, u)\| \leq p(t)\psi(\|u\|) \text{ pour p.p. } t \in J \text{ et } u \in R^n,$$

avec

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)ds < \int_{N_k}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

où $N_0 = a$, et pour $k = 1, 2, \dots, m+1$, on a

$$N_k = \sup_{t \in [t_{k-1}, t_k]} |I_{k-1}(y(t))| + M_{k-1}, \quad y \in PC,$$

$$M_{k-1} = \Gamma_{k-1}^{-1} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s)ds \right)$$

avec

$$\Gamma_l(z) = \int_{N_{l-1}}^z \frac{du}{\psi(u)}, \quad z \geq N_{l-1}, \quad l \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Alors si $y \in PC$ est une solution du problème (4.1), elle vérifie :

$$\sup\{\|y(t)\|; t \in [t_{k-1}, t_k]\} \leq M_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m+1.$$

Par conséquent, quelque soit $y \in PC$ solution du problème (4.1), on a

$$\|y\|_{PC} \leq \max\{\|a\|, M_{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots, m+1\} := \tilde{b}.$$

Théorème 4.2. Supposons qu'on a les conditions du théorème 4.1, avec $F : J \times R^n \rightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(R^n)$ est Carathéodory.

Alors le problème (4.1) admet au moins une solution.

Démonstration :

Considérons l'opérateur multivoque $N : PC \longrightarrow \mathcal{P}(PC)$ défini par :

$$N(y) = \left\{ h \in PC; h(t) = a + \int_0^t g(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k)), t \in [0, b] \right\},$$

où $g \in S_{F,y} = \{v \in L^1 : v(t) \in F(t, y(t)) \text{ p.p. } t \in J\}$.

On va montrer que la multifonction N est compacte, s.c.s, et à valeurs compactes convexes.

La preuve est donnée par des étapes.

Etape 1 : $N(y)$ est convexe pour tout $y \in PC$.

Soient $h_1, h_2 \in N(y)$ alors il existe $g_1, g_2 \in S_{F,y}$ tel que pour chaque $t \in [0, b]$ on a

$$h_1(t) = a + \int_0^t g_1(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k)),$$

et

$$h_2(t) = a + \int_0^t g_2(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k)),$$

soit $l \in]0, 1[$. Pour tout $t \in [0, b]$ on a

$$(lh_1 + (1-l)h_2)(t) = a + \int_0^t (lg_1 + (1-l)g_2)(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k)).$$

Comme $S_{F,y}$ est convexe(car F est à valeurs convexes) alors

$$lh_1 + (1-l)h_2 \in Ny.$$

Etape 2 : N transforme chaque ensemble borné à un ensemble borné dans PC .

Il suffit de montrer que

$$\exists \ell > 0, \forall y \in \mathcal{B}_q = \{y \in PC : \|y\| \leq q\}, \forall h \in N(y), \text{ on a } \|h\| \leq \ell.$$

On a si $h \in N(y)$, alors il existe $g \in S_{F,y}$ tel que pour tout $t \in J$ on a

$$h(t) = a + \int_0^t g(s)ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k)).$$

Alors pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} \|h(t)\| &\leq \|a\| + \int_0^t \|g(s)\| ds + \sum_{0 < t_k < t} \|I_k(y(t_k))\| \\ &\leq \|a\| + \int_0^b \|F(s, y(s))\| ds + \sum_{k=1}^m \sup_{x \in \mathcal{B}_q} \|I_k(x)\| \\ &\leq \|a\| + \psi(q)\|p\|_{L^1} + \sum_{k=1}^m \sup_{x \in \mathcal{B}_q} \|I_k(x)\|. \end{aligned}$$

Alors pour tout $h \in N(y)$, on a

$$\|h\| \leq \|a\| + \psi(q)\|p\|_{L^1} + \sum_{k=1}^m \sup_{x \in \mathcal{B}_q} \|I_k(x)\| := \ell.$$

Etape 3 : N transforme chaque ensemble borné en un ensemble équicontinu dans PC .

Soient $\tau_1, \tau_2 \in J, \tau_1 < \tau_2$ et $\mathcal{B}_q$ la boule définie dans l'étape précédente. Pour tout $y \in \mathcal{B}_q$ et $h \in N(y)$, il existe $g \in S_{F,y}$ tel que

$$h(t) = a + \int_0^t g(s) ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y(t_k)), \quad t \in J.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|h(\tau_2) - h(\tau_1)\| &\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|g(s)\| ds + \sum_{\tau_1 \leq t_k < \tau_2} \|I_k(y(t_k))\| \\ &\leq \psi(q) \int_{\tau_1}^{\tau_2} p(s) ds + \sum_{\tau_1 \leq t_k < \tau_2} \sup_{x \in \mathcal{B}_q} \|I_k(x)\| \longrightarrow 0 \text{ quand } \tau_2 \rightarrow \tau_1. \end{aligned}$$

Donc par l'étape 2 et 3, on obtient que N est compact.

Etape 4 : Le graphe de N est fermé.

Soit $y_n \rightarrow y_*$, $h_n \in N(y_n)$, et $h_n \rightarrow h_*$. il suffit de montrer qu'il existe $g_* \in S_{F,y_*}$, tel que

$$h_*(t) = a + \int_0^t g_*(s) ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y_*(t_k)), \quad t \in J.$$

$h_n \in N(y_n)$, alors $\exists g_n \in S_{F,y_n}$ tel que

$$h_n(t) = a + \int_0^t g_n(s) ds + \sum_{0 < t_k < t} I_k(y_n(t_k)), \quad t \in J.$$

Comme les $I_k, k = 1, \dots, m$ sont continues, on a

$$\left\| \left(h_n(t) - a - \sum_{0 < t_k < t} I_k(y_n(t_k)) \right) - \left(h_*(t) - a - \sum_{0 < t_k < t} I_k(y_*(t_k)) \right) \right\|_{PC} \rightarrow 0,$$

quand $n \rightarrow \infty$.

Soit Γ un opérateur linéaire continu, défini comme suit

$$\begin{aligned}\Gamma : L^1(J, n) &\longrightarrow PC(J, n) \\ g &\longrightarrow \Gamma(g),\end{aligned}$$

tel que

$$\Gamma(g)(t) = \int_0^t g(s)ds; \quad \forall t \in [0, b].$$

Par le lemme ??, l'opérateur $\Gamma \circ S_F$ est à graphe fermé, de plus on a

$$\left(h_n(t) - a - \sum_{0 < t_k < t} I_k(y_n(t_k)) \right) \in \Gamma(S_{F, y_n}).$$

Alors

$$\left(h_*(t) - a - \sum_{0 < t_k < t} I_k(y_*(t_k)) \right) = \int_0^t g_*(s)ds,$$

et $g_* \in S_{F, y_*}$.

Considérons l'ensemble

$$U = \{y \in PC : \|y\|_{PC} < \tilde{b} + 1\},$$

où $\tilde{b}$ est la constante dans théorème 4.1, donc on obtient que $N : \bar{U} \rightarrow \mathcal{P}(PC)$ est compacte et s.c.s, et par la définition de U il n'existe pas un $y \in \partial U$ tel que $y \in \lambda N(y)$, $\forall \lambda \in]0, 1[$. Donc par le lemme ?? on obtient que le problème (4.1) admet au moins une solution.

4.2 Catégorie de Baire sur un problème d'inclusion différentielle impulsive

Là, nous étudions l'existence de solutions par la cathégory de Baire de problème suivant :

$$(2) \begin{cases} \dot{x} \in \partial F(t, x) \\ x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Où, X un espace de Banach réel avec norme $|\cdot|$, et $\mathcal{B}$ l'ensemble de tous les sous-ensemble fermés convexes bornés de X qui ont un intérieur non vide, F est une multi-fonction de sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times X$ dans $\mathcal{B}$ et $\partial F(t, x)$ désigne par la frontiere de $F(t, x)$.

Conclusion et perspectives

Il est connu l'importance de la théorie de point fixe pour trouver des solutions à diverses problèmes. A travers ce travail, nous avons fait la lumière à autre méthodes, où on a traits l'existence des solutions pour les inclusions différentielles par la méthode d'approximation de type euler, et aussi on a étudié la cathégorie de Baire pour obtenir des solutions à notre problème.

Dans le futur recherche, on s'intéresse à appliquée la cathégorie de Baire pour obtenir des solutions sur d'autre type de problème d'inclusions différentielles.

Bibliographie

- [1] O. Arino, S. Gautier, and J. Penot. A fixed point theorem for sequentially continuous mappings with application to ordinary differential equations. *Funkcial. Ekvac*, 27(3) :273–279, 1984.
- [2] H. B. (auth.). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2010.
- [3] T. S. a. Bernd Luderer, Leonid Minchenko. *Multivalued Analysis and Nonlinear Programming Problems with Perturbations*. Nonconvex Optimization and Its Applications 66. Springer US, 1 edition, 2002.
- [4] A. Bressan and G. Colombo. Generalized baire category and differential inclusions in banach spaces. *Journal of differential equations*, 76(1) :135–158, 1988.
- [5] A. Bressan and F. Flores. On total differential inclusions. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 92 :9–16, 1994.
- [6] M. V. C. Castaing. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1 edition, 1977.
- [7] C. Castaing and M. Valadier. Équations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 3(R1) :3–16, 1969.
- [8] A. Cellina. On the differential inclusion $\dot{x} \in [-1, +1]$. *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti*, 69(1-2) :1–6, 7 1980.

- [9] A. Cellina. A view on differential inclusions. *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*, 63(3) :197–209, 2005.
- [10] B. Dacorogna and P. Marcellini. *Implicit partial differential equations*, volume 37. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] J. Daures. Contribution à l'étude des équations différentielles multivoques dans les espaces de banach. *CR Acad. Sci. Paris*, 270(12) :A769–A772, 1970.
- [12] F. De Blasi and G. Pianigiani. Non-convex-valued differential inclusions in banach spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, 157(2) :469–494, 1991.
- [13] F. De Blasi and G. Pianigiani. The baire method for the prescribed singular values problem. *Journal of the London Mathematical Society*, 70(3) :719–734, 2004.
- [14] F. S. De Blasi and G. Pianigiani. A baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in banach spaces. *Funkcial. Ekvac*, 25(2) :153–162, 1982.
- [15] F. S. De Blasi and G. Pianigiani. Remarks on hausdorff continuous multifunction and selections. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 24(3) :553–561, 1983.
- [16] F. S. De Blasi and G. Pianigiani. On the dirichlet problem for first order partial differential equations. a baire category approach. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 6(1) :13–34, 1999.
- [17] C. De Lellis and L. Székelyhidi Jr. The euler equations as a differential inclusion. *Annals of mathematics*, pages 1417–1436, 2009.
- [18] W. Dong. Relaxation theorem for the evolution differential inclusions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 237(1) :188–200, 1999.
- [19] A. F. Filippov. The existence of solutions of generalized differential equations. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 10(3) :608–611, 1971.
- [20] O. A. Graef J.R., Henderson J. *Impulsive Differential Inclusions : A Fixed Point Approach*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis Applications. De Gruyter, 2013.
- [21] H. Hermes. The generalized differential equation $\dot{x} \in r(t, x)$. *Advances in Mathematics*, 4(2) :149–169, 1970.
- [22] E. Hille and R. Phillips. Functional analysis and semi-groups, vol. In *XXXI of American Mathematical Society Colloquium Publications, revised edn*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1957.

- [23] N. R. Howes. *Modern Analysis and Topology*. Universitext. Springer, 1995.
- [24] H. F. J. Aubin. *Set-Valued Analysis*. Birkhauser, 1990.
- [25] D. K. *Multivalued differential equations*. New York, 1992.
- [26] E. H. H. Nawfal. *Topologie générale et espaces normés*. Dunod, 2011.
- [27] N. Papageorgiou. On the “bang-bang” principle for nonlinear evolution inclusions. *Aequationes mathematicae*, 45(2-3) :267–280, 1993.
- [28] G. Pianigiani. Differential inclusions the baire category method. In *Methods of nonconvex analysis*, pages 104–136. Springer, 1990.
- [29] L. Schwartz. *Analyse, 1. Theorie des ensembles et topologie*. Collection Enseignement des sciences 42. Hermann, 1991.
- [30] S. Suslov. Nonlinear bang-bang principle in banach spaces. *Siberian Mathematical Journal*, 33(4) :675–685, 1992.
- [31] A. A. Tolstonogov. Extreme continuous selectors of multivalued maps and their applications. *Journal of differential equations*, 122(2) :161–180, 1995.
- [32] J. A. Yorke. A continuous differential equation in hilbert space without existence. *Funkcial. Ekvac*, 13 :19–21, 1970.